

## 扰动重力场空域边值积分算法公式

PAGravf4.5, 章传银

全球地球重力场一般在谱域中表达和求解, 扰动重力场的空域积分算法主要用于局部重力场逼近。在局部地区, 为实现有限半径积分, 通常采用参考重力场模型移去恢复法, 即先计算并移去边界面上被积扰动场量的模型值, 获得残差扰动场量, 再用有限积分半径按空域积分算法, 由残差扰动场量得到计算点处的目标残差扰动场元, 最后计算并恢复计算点处目标扰动场元的模型值, 得到目标扰动场元的局部逼近解。

### 7.9.1 广义 Stokes 与 Hotine 积分公式

已知大地水准面或其外部某一重力等位面  $S$  上的空间异常  $\Delta g$ , 则地球外部空间计算点的扰动位  $T(\theta, \lambda, r)$  或高程异常  $\zeta(\theta, \lambda, r)$ , 可用如下广义 Stokes 积分公式计算

$$T(\theta, \lambda, r) = \gamma \zeta(\theta, \lambda, r) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Delta g' S(r, \psi, r') ds \quad (9.1)$$

式中:  $r'$  为空间异常  $\Delta g'$  所在重力等位面上流动点 (面元  $ds$ ) 的地心距;  $S(r, \psi, r')$  为广义 Stokes 核函数, 且

$$S(r, \psi, r') = \frac{2}{L} + \frac{1}{r} - \frac{3L}{r^2} - \frac{5r' \cos \psi}{r^2} - \frac{3r'}{r^2} \cos \psi \ln \frac{r - r' \cos \psi + L}{2r} \quad (9.2)$$

式中:  $L$  为流动点到计算点的空间距离。

当计算点与流动点位置相同时, 广义 Stokes 积分奇异, 奇异积分值可表示为

$$\zeta|_0 = \frac{A_0}{\gamma} \Delta g_0 \quad (9.3)$$

式中:  $A_0$ 、 $\Delta g_0$ 、 $\gamma$  分别为计算点所在积分面元的面积、空间异常和正常重力。

已知大地水准面或其外部某一重力等位面  $S$  上的扰动重力  $\delta g$ , 则地球外部空间计算点的扰动位  $T(\theta, \lambda, r)$  或高程异常  $\zeta(\theta, \lambda, r)$ , 可用如下广义 Hotine 积分公式计算

$$T(\theta, \lambda, r) = \gamma \zeta(\theta, \lambda, r) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \delta g' H(r, \psi, r') ds \quad (9.4)$$

式中:  $H(r, \psi, r')$  为广义 Hotine 核函数, 且

$$H(r, \psi, r') = \frac{2}{L} - \frac{1}{r'} \ln \frac{r - r' \cos \psi + L}{r(1 - \cos \psi)} \quad (9.5)$$

当计算点与流动点位置相同时, 广义 Hotine 积分奇异, 奇异积分值可表示为

$$\zeta|_0 = \frac{A_0}{\gamma} \delta g_0 \quad (9.6)$$

若将计算面地心距  $r$  和边界面地心距  $r'$  都近似为各自平均值的常量, 则广义 Stokes/Hotine 积分公式可用 FFT 算法进行快速计算。

Stokes 边值问题要求, 边界面必须是等位面, 如大地水准面或其外部等位面, 即空间异常/扰动重力必须位于重力等位面上。等位面可采用参考重力场模型 (不大于 360 阶) 构造, 在高度不大于 10 千米的近地空间, 可用等正 (常) 高面的大地高格网表示。

### 7.9.2 广义 Vening-Meinesz 积分公式

在当地水平坐标系中, 对广义 Stokes 积分公式 (9.1) 两端求水平导数, 得

$$\xi = -\frac{1}{4\pi r\gamma} \iint_S \Delta g' \frac{\partial S(r,\psi,r')}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} ds, \quad \eta = -\frac{1}{4\pi r \cos \varphi \gamma} \iint_S \Delta g' \frac{\partial S(r,\psi,r')}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} ds \quad (9.7)$$

$$\text{对} \quad \cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (9.8)$$

两边进行水平导数运算得

$$-\sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (9.9)$$

$$-\sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \cos \varphi \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) \quad (9.10)$$

由球面三角公式可得

$$\sin \psi \cos \alpha = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (9.11)$$

$$\sin \psi \sin \alpha = \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) \quad (9.12)$$

综合式 (9.9) ~ 式 (9.12) 有

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos \alpha, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos \varphi \sin \alpha \quad (9.13)$$

代入式 (9.7) 得

$$\xi = \frac{1}{4\pi r\gamma} \iint_S \Delta g' \frac{\partial S(r,\psi,r')}{\partial \psi} \cos \alpha ds, \quad \eta = \frac{1}{4\pi r\gamma} \iint_S \Delta g' \frac{\partial S(r,\psi,r')}{\partial \psi} \sin \alpha ds \quad (9.14)$$

顾及  $L = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}$ , 有

$$\frac{\partial}{\partial \psi} L = \frac{rr'}{L} \sin \psi, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{L} \right) = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial \psi} L = -\frac{rr'}{L^3} \sin \psi \quad (9.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \ln \frac{r-r' \cos \psi + L}{2r} = \frac{1}{r-r' \cos \psi + L} \left( \frac{rr'}{L} \sin \psi + r' \sin \psi \right) = \frac{r' \sin \psi}{r+L-r' \cos \psi} \frac{L+r}{L} \quad (9.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} S(r, \psi, r') &= \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{2}{L} + \frac{1}{r} - \frac{3L}{r^2} - \frac{5r' \cos \psi}{r^2} - \frac{3r' \cos \psi}{r^2} \ln \frac{r-r' \cos \psi + L}{2r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{2}{L} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial}{\partial \psi} L + \frac{5r' \sin \psi}{r^2} + \frac{3r' \sin \psi}{r^2} \ln \frac{r+L-r' \cos \psi}{2r} - \frac{3r' \cos \psi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \ln \frac{r+L-r' \cos \psi}{2r} \\ &= \left( -\frac{2rr'}{L^3} - \frac{3r'}{rL} + \frac{5r'}{r^2} + \frac{3r'}{r^2} \ln \frac{r-r' \cos \psi + L}{2r} - \frac{3r' \cos \psi}{r^2} \frac{r'}{r-r' \cos \psi + L} \frac{L+r}{L} \right) \sin \psi \\ &= \left[ -\frac{2r}{L^3} - \frac{3}{rL} + \frac{5}{r^2} + \frac{3}{r^2} \ln \frac{r-r' \cos \psi + L}{2r} - \frac{3r'(L+r) \cos \psi}{r^2 L (r-r' \cos \psi + L)} \right] r' \sin \psi \end{aligned} \quad (9.17)$$

同理, 在当地水平坐标系中对广义 Hotine 公式 (9.4) 两端求水平导数, 有

$$\xi = \frac{1}{4\pi r\gamma} \iint_S \delta g' \frac{\partial H(r,\psi,r')}{\partial \psi} \cos \alpha ds, \quad \eta = \frac{1}{4\pi r\gamma} \iint_S \delta g' \frac{\partial H(r,\psi,r')}{\partial \psi} \sin \alpha ds \quad (9.18)$$

$$\begin{aligned} \text{由于} \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \ln \frac{r-r' \cos \psi + L}{r(1-\cos \psi)} &= \frac{r(1-\cos \psi)}{r-r' \cos \psi + L} \frac{\left( \frac{rr'}{L} \sin \psi + r' \sin \psi \right) r(1-\cos \psi) + (r-r' \cos \psi + L) r \sin \psi}{r^2 (1-\cos \psi)^2} \\ &= \frac{\sin \psi}{r-r' \cos \psi + L} \frac{L+r' (1-\cos \psi) + (r-r' \cos \psi + L)}{1-\cos \psi} = \left[ \frac{r'(L+r)}{(r-r' \cos \psi + L)L} + \frac{1}{1-\cos \psi} \right] \sin \psi \end{aligned} \quad (9.19)$$

$$\begin{aligned} \text{因此} \quad \frac{\partial}{\partial \psi} H(r, \psi, r') &= \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{2}{L} - \frac{1}{r'} \ln \frac{r-r' \cos \psi + L}{r(1-\cos \psi)} \right) = \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{2}{L} - \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \psi} \ln \frac{r-r' \cos \psi + L}{r(1-\cos \psi)} \\ &= \left[ -\frac{2rr'}{L^3} - \frac{L-r}{(r-r' \cos \psi + L)L} + \frac{1}{r'(1-\cos \psi)} \right] \sin \psi \end{aligned} \quad (9.20)$$

式 (9.14)、式 (9.18) 也称为广义 Vening-Meinesz 公式, 式 (9.17)、式 (9.20)

为广义 Vening-Meinesz 核函数。

广义 Vening-Meinesz 公式由广义 Stokes/Hotine 公式导出，属 Stokes 边值问题，要求被积空间异常/扰动重力位于重力等位面。利用式 (9.14)，可以由某一等位面上的空间异常计算地球外部或地面任意点的垂线偏差。利用式 (9.18)，可以由某一等位面上的扰动重力计算地球外部或地面任意点的垂线偏差。

将 $r$ 、 $r'$ 近似为常数，广义 Vening-Meinesz 积分公式 (9.14) 和式 (9.18) 可用 FFT 算法进行快速计算。

### 7.9.3 Poisson 积分算法及其应用计算

Poisson 积分法由某一高度源边界面 $S$ 上任一类型观测扰动场量，计算另一高度目标边界面 $D$ 上同类型扰动场量。用于扰动场量解析延拓的 Poisson 积分公式，可由第一边值问题 Poisson 积分解表达为

$$\mu(\theta, \lambda, r) = \frac{1}{4\pi r} \int_S \mu(\theta', \lambda', r') \frac{r^2 - r'^2}{L^3} ds \quad (9.21)$$

式中： $\mu$ 为任一类型扰动重力场量（如扰动重力或高程异常）， $(\theta', \lambda', r')$ 为源边界面 $S$ 上流动面元 $ds$ 的球坐标， $(\theta', \lambda', r') \in S$ ； $(\theta, \lambda, r)$ 为目标边界面 $D$ 上计算点的球坐标， $(\theta, \lambda, r) \in D$ ； $L$ 为流动面元到计算点的空间距离。

第一边值问题 Poisson 积分解并不要求源边界面 $S$ 是重力等位面，如 1.3.5 节。当计算点也位于源边界面上时，地心距 $r \rightarrow r'$ ， $r^2 - r'^2 \rightarrow 0$ ，边界面球近似下扰动场量的 Poisson 积分核函数 $(r^2 - r'^2)/L^3$ 无定义，Poisson 积分式 (9.21) 无意义，当边界面流动点与计算点重合时， $L \rightarrow 0$ ，Poisson 积分奇异，边界面球近似下奇异积分值也不存在，式 (9.21) 失效。此时，通过恒等式变换 (Hofmann, 2006)，可将式 (9.21) 改写为

$$\mu(\theta, \lambda, r) = \frac{r'^2}{r^2} \mu(\theta, \lambda, r') + \frac{1}{4\pi r} \int_S [\mu(\theta', \lambda', r') - \mu(\theta', \lambda', r)] \frac{r^2 - r'^2}{L^3} ds \quad (9.22)$$

当 $r \rightarrow r'$ ， $L \rightarrow 0$ 时，式 (9.22) 右端积分虽会出现奇异，但由于 $[\mu(\theta', \lambda', r') - \mu(\theta', \lambda', r)] \rightarrow 0$ ，故核函数的奇异点被中和，从而消除积分奇异性。

已知某一边界面上扰动重力 $\delta g$ ，也可以计算地球外部计算点 $(\theta, \lambda, r)$ 的扰动重力梯度 $T_{rr}$ 。将 Poisson 积分用于扰动重力 $\delta g$ ，有

$$\delta g(\theta, \lambda, r) = \frac{1}{4\pi r} \iint_S \delta g' \frac{r^2 - r'^2}{L^3} ds \quad (9.23)$$

顾及 $T_{rr} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} T \right) = -\frac{\partial}{\partial r} (\delta g)$ ，将式 (9.23) 两边对径向求偏导，得

$$\begin{aligned} T_{rr} &= -\frac{1}{4\pi r} \iint_S \delta g' \frac{\partial}{\partial r} \frac{r^2 - r'^2}{L^3} ds \\ &= \frac{1}{4\pi r} \iint_S \delta g' \frac{r^3 - 5rr'^2 + (r^2 + 3r'^2)r'^2 \cos\psi}{L^5} ds \end{aligned} \quad (9.24)$$

类似于改化后的 Poisson 积分式 (9.22)，可采用改化后的积分算法抑制扰动重力积分计算的奇异性。

### 7.9.4 扰动重力场元正反积分运算

#### (1) 高程异常积分计算扰动重力

根据扰动重力定义，对扰动位 $T$ 的 Poisson 积分公式取垂线方向导数得

$$\delta g = \frac{\partial T}{\partial n} \approx -\frac{\gamma \partial \zeta}{\partial r} = -\frac{\gamma}{2\pi} \iint_S \frac{\zeta - \zeta_p}{l^3} ds \quad (9.25)$$

式中： $\partial n$ 表示铅垂线方向微分； $l$ 为等位边界面上计算点与流动点之间的直线距离。

当流动点与计算点重合时，积分奇异，奇异积分值为

$$\delta g|_0 = \frac{\gamma \sqrt{A_0/\pi}}{4} (\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) \quad (9.26)$$

式中： $\zeta_{xx}$ 、 $\zeta_{yy}$ 为计算点的高程异常二阶水平偏导数， $\gamma \zeta_{xx}$ 、 $\gamma \zeta_{yy}$ 分别为水平重力梯度北向、水平重力梯度东向。

式 (9.25) 也称为逆 Hotine 积分公式。利用式 (9.25)，可以由等位面上的高程异常计算该等位面上的扰动重力。

由于扰动重力 $\delta g$ 是扰动位 $T$ 沿垂线方向的导数，因此，式 (9.25) 要求边界面（高程异常所在面）是重力等位面。

#### (2) 高程异常积分计算空间异常

将重力基本微分方程代入式 (9.25) 得

$$\Delta g = -\frac{\gamma}{2\pi} \iint_S \frac{\zeta - \zeta_p}{l^3} ds - \frac{\zeta \gamma}{2r} \quad (9.27)$$

式 (9.27) 也称为逆 Stokes 积分公式。利用式 (9.27)，可以由等位面上的高程异常计算该等位面上的空间异常。

#### (3) 垂线偏差积分计算高程异常

$$\zeta = \frac{r}{4\pi} \iint_{\sigma} \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) d\sigma \quad (9.28)$$

当流动点与计算点重合时，积分奇异，奇异积分值为

$$\zeta|_0 = \frac{A_0}{4\pi} (\xi_y + \eta_x) \quad (9.29)$$

式中： $\xi_y$ 、 $\eta_x$ 分别为 $\xi$ 和 $\eta$ 在东方向和北方向的偏导数。

利用式 (9.28)，可由等位面上的垂线偏差计算该等位面上的高程异常。

#### (4) 垂线偏差积分计算空间异常

$$\Delta g = -\frac{\gamma}{4\pi} \iint_{\sigma} \left( 3 \operatorname{csc} \psi - \operatorname{csc} \psi \operatorname{csc} \frac{\psi}{2} - \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right) (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) d\sigma \quad (9.30)$$

当流动点与计算点重合时，积分奇异，奇异积分值为

$$\Delta g|_0 = -\frac{\gamma \sqrt{A_0/\pi}}{4} (\xi_y + \eta_x) \quad (9.31)$$

利用式 (9.30)，可由等位面上的垂线偏差计算该等位面上的空间异常。

#### (5) 垂线偏差积分计算扰动重力

由重力基本微分方程，顾及式 (9.28) 和式 (9.30)，可得到由垂线偏差计算扰动重力的公式

$$\delta g = -\frac{\gamma}{4\pi} \iint_{\sigma} \left( 3csc\psi - csc\psi csc\frac{\psi}{2} - tg\frac{\psi}{2} - 2ctg\frac{\psi}{2} \right) (\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha) d\sigma \quad (9.32)$$

利用式 (9.32)，可由等位面上的垂线偏差计算该等位面上的扰动重力。

当流动点与计算点重合时，积分奇异，奇异积分值为

$$\delta g|_0 = -\frac{\gamma}{2\pi} \left( \sqrt{\pi A_0} + \frac{A_0}{r} \right) (\xi_y + \eta_x) \quad (9.33)$$

式 (9.28)、式 (9.30)、式 (9.32) 也称为逆 Vening-Meinesz 积分公式。将  $r$  近似为常数，则上述所有扰动场量逆运算积分式 (9.25)、式 (9.27)、式 (9.28)、式 (9.30) 和式 (9.3 9)，均可用 FFT 算法进行快速计算。

#### (6) 扰动重力梯度积分的正反算

由地球外部某一等位面上扰动重力梯度  $T_{rr}$ ，计算外部空间点  $(\theta, \lambda, r)$  的扰动重力  $\delta g$ ，可直接采用广义 Hotine 积分公式，因此

$$\delta g(\theta, \lambda, r) = \frac{1}{4\pi} \iint_s T_{rr} H(r, \psi, r') ds \quad (9.34)$$

式中：  $H(r, \psi, r')$  为广义 Hotine 核函数。

已知某一等位面上扰动重力  $\delta g$ ，则该等位面上任意点的扰动重力梯度可用扰动场元的径向梯度积分式表达为

$$T_{rr} = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\delta g - \delta g'}{l^3} ds \quad (9.35)$$

式中：  $l$  为流动点到计算点之间的直线距离。

将多种重力场积分算法优化组合，采用 1~2 次残差累积逼近方案，有望改善重力场边值问题解算与短波重力场逼近的性能和水平。

### 7.9.5 重力场积分核函数解析性质

重力场积分公式中的积分核函数变量，是被积场量所在边界面的积分流动面元到计算点的直线距离，可用流动点与计算点之间的球面角距  $\psi$  表示。由于重力场积分核函数存在不收敛问题，导致重力场积分算法普遍存在频谱泄漏问题。当计算点也位于边界面上时，重力场积分还存在奇异性问题，而奇异积分值的数值计算结果一般随边界面上被积场量的空间分辨率不同出现明显跳变，导致局部重力场数值积分计算结果容易产生不确定性。

考察球近似边界面上 Stokes、Hotine、Vening-Meinesz 和 Poisson 积分核函数的性质。令计算点也位于积分边界球面上，则流动面元和计算点的地心距  $r' = r = R$ ，面元到计算点的直线距离  $l = 2R\sin(\psi/2)$ ，由广义 Stokes 核函数表达式 (9.4)，可得边界球面上的 Stokes 核函数为

$$\begin{aligned} S(\psi) &= R \cdot S(R, \psi, R) = \sin^{-1}\frac{\psi}{2} + 1 - 6\sin\frac{\psi}{2} - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln \frac{1 - \cos\psi + 2\sin(\psi/2)}{2} \\ &= 1 + \sin^{-1}\frac{\psi}{2} - 6\sin\frac{\psi}{2} - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln \left( \sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2} \right) \end{aligned} \quad (9.36)$$

由广义 Hotine 核函数表达式 (9.5)，可得边界球面上 Hotine 核函数为

$$H(\psi) = R \cdot H(R, \psi, R) = 2 - \ln\left(1 + \sin^{-1}\frac{\psi}{2}\right) \quad (9.37)$$

将 Hotine 核函数 $H(\psi)$ 对球面角距 $\psi$ 微分，可得球面上 Vening-Meinesz 核函数为

$$V(\psi) = \frac{\partial}{\partial\psi} H(\psi) = \frac{1}{2} \frac{ctg\frac{\psi}{2}}{1+\sin\frac{\psi}{2}} \quad (9.38)$$

由式 (9.36) ~ 式 (9.38) 可知，当计算点与流动点重合时，Stokes、Hotine 和 Vening-Meinesz 球面核函数趋于无穷大，即 $S(\psi) \rightarrow \infty$ 、 $H(\psi) \rightarrow \infty$ 和 $V(\psi) \rightarrow \infty$ ，如图 7。图中横坐标 $l = 2R\sin(\psi/2)$ ，单位为 km，纵坐标无量纲。此时，重力场积分奇异，需要计算奇异积分值。

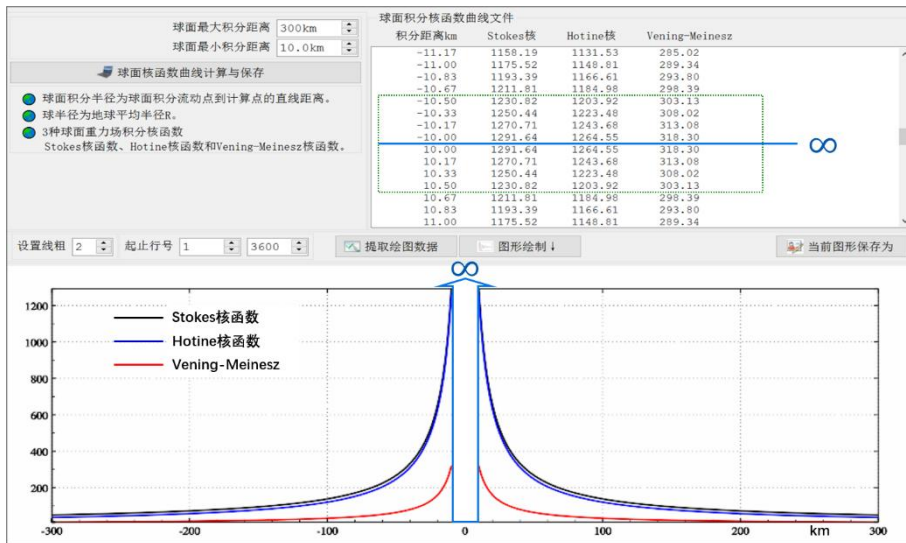


图 7 主要重力场积分球面核函数曲线

用于同类扰动场元运算的 Poisson 积分式 (9.21)，情况更为复杂。首先，当计算点位于边界球面时，计算点和流动面元地心距相等 $r = r'$ ，Poisson 核函数 $P(\psi) = (r^2 - r'^2)/L^3$ 恒等于零，无定义；其次，当计算点与流动点重合时，Poisson 核函数 $P(\psi)$ 奇异。因此，当计算面与边界面相同时，Poisson 积分结果不稳定。为实现有效的解析延拓运算，只能将 Poisson 积分运算限制在较小的作用距离范围内，并采用近似变换方法，消除 Poisson 积分的奇异性，如式 (9.22)。

特别地，Poisson 积分式是推导 Stokes 边值积分解和 Hotine 边值积分解的理论基础，也是推导 Vening-Meinesz 积分公式的依据。然而，由于 Poisson 核函数存在严重的高阶振荡与不收敛问题，特别是球边界面上计算点的 Poisson 核无定义，从而导致空域重力场积分的数值计算结果存在难以控制的不确定性。为应对此类问题，通常假设（残差）扰动场量随空间变化具有各向同性的随机统计性质，或者借助边值问题谱域逼近解的近似，改化重力场积分核函数。这类改化算法在以往数十年间一度成为重力场数值积分的

重要技术手段，然而，由于普遍引入非重力场解析关系假设，如观测场量空间统计假设或数据驱动参数估计法等，这些改进方法的普适性缺乏确切的重力场理论依据，PAGravf4.5 因此不再推荐重力场积分核函数改化算法。

重力场积分数值计算虽存在某些缺陷，然而重力场积分公式显式直观地表达了重力场量之间的解析函数关系，因而空域重力场边值理论仍然也一直是认识和理解重力场逼近理论和物理大地测量学原理的重要理论基础。