

地球外部全要素重力场量的地形影响算法体系

PAGravf4.5, 章传银

在物理大地测量学中, 重力场量的地形影响处理有且仅有两个基本目的: ①分离离散扰动重力场量中的超短波成分, 以提高重力场量的推估或格网化水平, 方便构建格网数值模型或进行重力场数值积分计算; ②重力场逼近时用于分离地形引力场超短波成分, 以辅助改善超短波重力场的逼近性能。对于后者, 维持不同位置、不同类型的外部重力场量地形影响之间解析函数关系, 是重力场逼近理论的约束性要求。

7.4 经典地面重力归算方案及其局限性

经典的 Stokes 边值问题以大地水准面为边界面, 经典的布格重力异常和均衡重力异常都只定义在大地水准面上。传统重力归算本质上是通过对地形影响改正和垂向解析延拓, 将地面或近地空间重力值 (观测量) 归算到大地水准面上。

7.4.1 空间改正与空间异常

大地水准面上重力值 g 可用地面重力值 g_s 表示为

$$g = g_s - \left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_N h - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial h^2}\right)_N h^2 - \dots = g_s + \Delta_1 g \quad (4.1)$$

式中: $\Delta_1 g$ 称为空间改正, 历史上也称自由空气改正。

空间改正是指, 不考虑地面与大地水准面间的地形质量, 将地面重力值 g_s 沿铅垂线向下解析延拓到大地水准面上后, 所需增加的改正数。

由于不知道大地水准面上实际重力梯度, 通常用正常重力梯度来代替实际重力梯度, 并略去高阶梯度项, 至多保留到 2 阶项。这样, 空间改正就变成

$$\Delta_1 g = - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right)_N h - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2}\right)_N h^2 \quad (4.2)$$

用近似值表示正常重力梯度, 则 $\Delta_1 g = 0.3086h - 1.5 \times 10^{-7}h^2 \approx 0.3086h$ 。其中, 地面正 (常) 高 h 的单位为 m, 空间改正 $\Delta_1 g$ 的单位 mGal。

这样, 大地水准面上的空间异常可写为

$$\Delta g = g - \gamma_0 = g_s - \gamma_0 + \Delta_1 g \quad (4.3)$$

式中: g 为大地水准面上的重力值; γ_0 为正常椭球面上的正常重力值。

比较地面空间异常定义 $\Delta g_s = g_s - \gamma_\zeta$ 和大地水准面上空间异常定义 $\Delta g = g - \gamma_0$, 不难发现, 比上述空间改正更为严密的方法是, 直接由空间异常的垂向解析函数关系, 将地面空间异常 Δg_s 解析延拓到大地水准面上 Δg 。

7.4.2 层间改正与局部地形改正

假设地面和大地水准面均为平面, 根据引力的定义, 此时地面和大地水准面间的地形质量 (厚度为 h 的平面质量层) 对计算点 P 产生的引力等于 $2\pi G\rho h$ 。称从地面重力中

去掉质量层后的重力变化为层间改正

$$\Delta_2 g = -2\pi G\rho h \quad (4.4)$$

近似地，取地形密度 $\rho = 2.67 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ，则 $\Delta_2 g = -0.1118h$ (mGal)。

由于假设地形的质量层是平面层，因此层间改正又称平面层间改正。平面层间改正引起计算点的引力位变化为 $\Delta_2 V = 2\pi G\rho h S/R$ ，其中 S 为平面层的底面积。显然 $\lim_{S \rightarrow \infty} \Delta(\Delta_2 V) \neq 0$ ，因此， $\Delta_2 V$ 不是调和函数，可见平面层间改正 $\Delta_2 g$ 破坏了地球引力场的调和性质。

在进行平面层间改正时，假设了计算点周围是平面，即计算点周围没有地形起伏。因此，进行层间改正后，还须去掉计算点周围高于计算点的地形质量，并补进计算点周围低于计算点的地形质量，这项改正称为局部地形改正 $\Delta_3 g$ 。空间改正 $\Delta_1 g$ 和局部地形改正 $\Delta_3 g$ 都是解析的，都不改变地球外部引力场的调和性质。

7.4.3 布格异常与格网化计算

称大地水准面上的

$$\Delta g_b = \Delta g + \Delta_2 g + \Delta_3 g = g_s - \gamma_0 + \Delta_1 g + \Delta_2 g + \Delta_3 g \quad (4.5)$$

为布格 (Bouguer) 重力异常，简称布格异常。

称 $\Delta_b g = \Delta_2 g + \Delta_3 g$ 为布格改正。由于层间改正基于平面质量层假设，这样的布格异常和布格改正也称为平面布格异常和平面布格改正。布格改正改变了地球的总质量，从而使得大地水准面和外部重力场发生了改变。

布格异常定义在大地水准面这个等位面上，并采用一定的方式消除了地形质量的影响，因而通常认为，布格异常要比空间异常平滑些。利用布格异常进行推估或格网化，原则上可能比直接利用空间异常的性能好，表现为格网化误差可能会小些。

在计算格网平均值时，一般采用具有平移不变性即各向同性的格网化算法，从而将任一格网中心坐标为 (λ, φ) 的格网平均布格异常表示为如下的通用形式

$$\Delta \bar{g}_b(\lambda, \varphi) = [\sum_k f(\lambda_k - \lambda, \varphi_k - \varphi) \Delta g_b(\lambda_k, \varphi_k)] \quad (4.6)$$

式中： $\Delta g_b(\lambda_k, \varphi_k)$ 为坐标 (λ_k, φ_k) 处的离散布格异常； $f(\lambda_k - \lambda, \varphi_k - \varphi)$ 为格网化的二维核函数。

选择不同形式的核函数 $f(\Delta\lambda, \Delta\varphi)$ ，对应不同类型的格网化算法。常见的格网化算法包括：加权平均法、距离（平方）反比加权平均法、Shepard 方法、多面函数法、克里金插值法和加权径向基函数拟合法等。

技术上要求，若选择的格网化算法不满足重力场解析函数关系，格网化运算应在重力等位面上进行，以抑制重力场信号扭曲。例如，由于地面不是重力等位面，因而不宜直接采用不满足重力场解析关系的格网化算法，对离散分布的地面空间异常进行格网化，格网化运算前需事先将离散地面空间异常统一归算到某一等位面（如大地水准面）上。

7.4.4 经典重力归算的局限性

经典的重力归算方法一般通过空间改正 $\Delta_1 g = -0.3086h + O(h^2)$ (mGal)，将地面测点重力延拓到大地水准面上，这项改正仅考虑正常重力梯度。然而即使在海拔数百米的丘陵地区，扰动重力梯度的影响量级都有可能达到或超过 mGal 量级。实际上，我们完全能先由地面或近地空间测点的重力和位置观测量，直接由严密公式计算正常重力和测点空间异常，然后，按严密解析延拓方法，求得空间异常由地面或近地空间延拓到大地水准面上的解析延拓量。

经典的地形改正概念，改正对象仅局限于地面重力，现代地球重力场测量技术已由传统地面重力观测为主发展到空天地海多种类型重力场量获取，需要处理大地水准面外部各种类型重力场量的地形影响。经典的地形直接影响是地形质量对重力（扰动重力/空间异常）的影响，地形间接影响是地形质量对重力位（扰动位/高程异常/大地水准面高）的影响，现代物理大地测量学需要处理地形质量对全要素重力场量的影响，空间改正、地形改正、直接影响和间接影响概念显然已不能满足基本需要，PAGrav4.5 因此发展适合地面及其外部全要素重力场量解析严密的地形影响算法体系，并全面淡化经典重力归算概念。

7.5 陆海完全布格与剩余地形影响算法

在物理大地测量学中，重力场量的地形影响处理有且仅有两个基本目的：一是分离离散扰动重力场量中的超短波成分，以提高重力场量的推估或格网化水平，方便构建格网数值模型或进行重力场数值积分计算；另一个目的是重力场逼近时用于分离地形引力场超短波成分，以辅助改善超短波重力场的逼近性能。对于后者，维持不同位置、不同类型的外部重力场量地形影响之间解析函数关系，是重力场逼近理论的约束性要求。

地球重力场理论指出，地球外部任意类型扰动场量都可以表示为同一高度等位面上扰动位、扰动重力或其当地坐标系中偏导数的线性组合，如垂线偏差可用扰动位的当地水平导数表示，扰动重力梯度可用扰动重力的垂向导数表示。因此，若解决了扰动位和扰动重力的地形影响问题，也就自然解决了其他各种重力场量的地形影响问题。

7.5.1 陆域地形完全布格影响球近似算法

陆域地形质量产生的引力场也称陆域地形完全布格影响，定义为大地水准面以上地形质量对外部各种重力场量的影响，因而也是各种重力场量的陆域地形完全布格影响。

地球外部空间任意类型重力场量的陆海完全布格影响定义为，陆域地形质量（地形面与大地水准面之间的地形质量）和海水补偿质量（将海水密度 ρ_w 补偿到陆域地形密度 ρ 后导致的海洋水体质量变化）对该类型重力场量产生的总影响，如图 4。

忽略大气质量影响，则地球外部任意点的扰动位 T 都可表示为地形质量引力位 T^t 与扣除地形质量后的扰动位 T^{NT} 之和

$$T = T^{NT} + T^t = T^{NT} + T^B + T^R \quad (5.1)$$

式中： T^t 为全部地形质量对计算点产生的引力位，称为扰动位的完全布格影响； T^B 为厚度等于地形高度的球壳质量对计算点产生的引力位，称为扰动位的球壳布格影响； T^R 为局部地形质量对计算点产生的引力位，称为扰动位的局部地形影响。

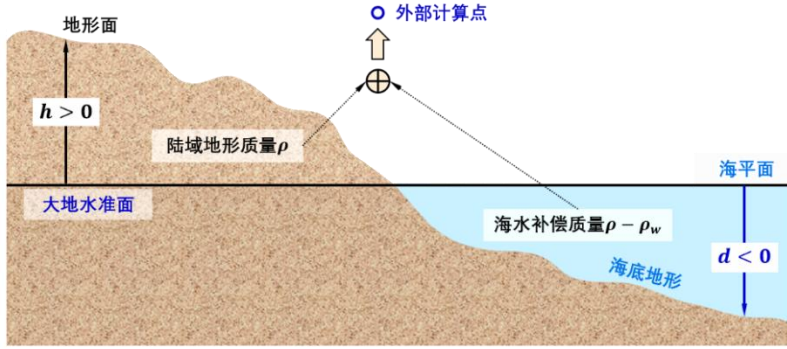


图 4 陆海统一的完全布格影响基本原理

扣除地形质量后的扰动位 T^{NT} 也称陆域完全布格扰动位。由扰动位 T 在地球外部的调和性质可知，扰动位的完全布格影响、球壳布格影响和局部地形影响在地球外部均是调和的。

球近似下，地球外部（ $r \geq R + h$ ， R 为地球平均半径）近地空间扰动位的完全布格影响可展开为泰勒级数形式

$$T^t = T^B + T^R = 4\pi G\rho_0 \frac{R^2 h}{r} \left(1 + \frac{h}{R} + \frac{h^2}{3R^2}\right) + T^R \quad (5.2)$$

式中： G 为万有引力常数； h 为地球外部计算点正下方的地形高程； r 为计算点的地心距； ρ_0 为地面到大地水准面间地形的几何平均密度，通常取 $\rho_0 = 2.67 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 。

将式 (5.1) 代入扰动重力定义式，可得地球外部任意高度上有

$$\delta g = -\frac{\partial T^{NT}}{\partial r} - \frac{\partial T^t}{\partial r} = \delta g^{NT} + \delta g^t = \delta g^{NT} + \delta g^B + \delta g^R \quad (5.3)$$

式中： δg^{NT} 为扣除地形质量后的扰动重力，也称陆域完全布格扰动重力； δg^t 称为扰动重力的完全布格影响； δg^B 称为扰动重力的球壳布格影响； δg^R 称为扰动重力的局部地形影响。

球近似下，地球外部近地空间扰动重力的完全布格影响为

$$\delta g^t = \delta g^B + \delta g^R = 4\pi G\rho_0 \frac{R^2 h}{r^2} \left(1 + \frac{h}{R} + \frac{h^2}{3R^2}\right) + \delta g^R \quad (5.4)$$

式 (5.2)、式 (5.4) 截断到 h/R 的二次项，因而适合地面及近地空间（如航空高度），但不适合卫星高度。

7.5.2 地球外部局部地形影响的积分算法

(1) 地球外部局部地形影响严密积分算法

根据定义，仅考虑地表密度 $\rho = \rho_0$ ，则扰动位局部地形影响的严密积分表达式为

$$T^R = \gamma \zeta^R = G\rho \iint_s \int_{R+h}^{R+h'} L^{-1}(r, \psi, r') dr' ds \quad (5.5)$$

式中： $ds = r'^2 \cos\varphi' d\varphi' d\lambda'$ 为地面流动积分面元； r' 为流动积分面元（流动点）的地心距； $L = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\psi}$ 为流动点（即积分体元 $dV = dr' ds$ ）到计算点的空间积分距离。且

$$\int L^{-1}(r, \psi, r') dr' = \ln(r' - rt + L) + C \quad (5.6)$$

式中， $t = \cos\psi$ ， C 为积分常数。

当计算点与流动点位置相同时，扰动位局部地形影响积分奇异，且奇异积分值为

$$T^R|_0 = \frac{1}{6} G\rho A_0 \sqrt{A_0/\pi} (h_{xx} + h_{yy}) \quad (5.7)$$

式中： A_0 为计算点积分面元的面积； h_{xx}, h_{yy} 为计算点的地形高度分别在北方向 x 和东方向 y 的二阶水平偏导数。

根据扰动重力定义，可得扰动重力局部地形影响的严密积分表达式

$$\delta g^R = -T_r^R = -\frac{\partial T^R}{\partial r} = -G\rho \iint_s \int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial r} dr' ds \quad (5.8)$$

$$\text{式中：} \quad \int \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial r} dr' = -\int \frac{r-r't}{L^3} dr' = -\frac{r'}{rL} + C \quad (5.9)$$

当计算点与流动点位置相同时，扰动重力局部地形影响积分奇异，奇异积分值为

$$\delta g^R|_0 = \frac{1}{2} G\rho \sqrt{\pi A_0} (h_x^2 + h_y^2) \quad (5.10)$$

式中： (h_x, h_y) 为计算点的地形坡度向量。

顾及 $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos\alpha$ ， $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos\varphi \sin\alpha$ ，可得垂线偏差局部地形影响严密积分式

$$\begin{aligned} \xi^R &= -\frac{\partial T^R}{\gamma r \partial \varphi} = -\frac{\partial T^R}{\gamma r \partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{\partial T^R}{\gamma r \partial \psi} \cos\alpha \\ &= \frac{G\rho}{\gamma r} \iint_s \int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial \psi} dr' \cos\alpha ds \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \eta^R &= -\frac{\partial T^R}{\gamma r \cos\varphi \partial \lambda} = -\frac{\partial T^R}{\gamma r \cos\varphi \partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{\partial T^R}{\gamma r \cos\varphi \partial \psi} \cos\varphi \sin\alpha \\ &= \frac{G\rho}{\gamma r} \iint_s \int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial \psi} dr' \sin\alpha ds \end{aligned} \quad (5.12)$$

式中： α 是 ψ 的大地方位角；

$$\int \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial \psi} dr' = \frac{r-r't}{L \sin\psi} + C \quad (5.13)$$

由球面三角公式得

$$\sin\psi \cos\alpha = \cos\varphi \sin\varphi' - \sin\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (5.14)$$

$$\sin\psi \sin\alpha = \cos\varphi' \sin(\lambda' - \lambda) \quad (5.15)$$

依据定义，可得扰动重力梯度局部地形影响的严格积分表达式

$$T_{rr}^R = \frac{\partial^2}{\partial r^2} T^R = G\rho \iint_s \int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial^2 L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial r^2} dr' ds \quad (5.16)$$

$$\text{式中：} \quad \int \frac{\partial^2 L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial r^2} dr' = \int \left[-\frac{1}{L^3} + \frac{3(r-r't)^2}{L^5} \right] dr' = \frac{r'}{r^2 L} + \frac{r'(r-r't)}{rL^3} + C \quad (5.17)$$

同理，可导出水平重力梯度局部地形影响的严密积分表达式

$$T_{nn}^R = \frac{1}{r^2} T_{\varphi\varphi}^R \quad (5.18)$$

$$T_{ww}^R = -\frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} T_{\lambda\lambda}^R \quad (5.19)$$

其中,
$$T_{\varphi\varphi}^R = \frac{\partial^2 T^R}{\partial \psi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}, \quad T_{\lambda\lambda}^R = \frac{\partial^2 T^R}{\partial \psi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \quad (5.20)$$

将式 (5.14) 两边对 φ 求偏导, 有

$$-\cos\psi \cos^2 \alpha + \sin\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\sin\varphi \sin\varphi' - \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (5.21)$$

从而可得
$$\sin\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\sin\varphi \sin\varphi' - \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda' - \lambda) + \cos\psi \cos^2 \alpha \quad (5.22)$$

再将式 (5.15) 两边对 λ 求偏导, 有

$$-\cos\psi \cos\varphi \sin^2 \alpha + \sin\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} = -\cos\varphi' \sin(\lambda' - \lambda) \quad (5.23)$$

从而可得
$$\sin\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} = -\cos\varphi' \sin(\lambda' - \lambda) + \cos\psi \cos\varphi \sin^2 \alpha \quad (5.24)$$

将扰动位局部地形影响积分式 (5.5) 两边对球面角距 ψ 求二阶偏导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T^R}{\partial \psi^2} &= G\rho \iint_S \int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \frac{1}{L} dr' ds = \\ &G\rho \iint_S \int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\psi}} dr' ds \end{aligned} \quad (5.25)$$

式中:
$$\int \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \frac{1}{L} dr' = \frac{r'(6r^2 + 4r'^2 + 6r^2 \cos 2\psi - rr' \cos 3\psi) - rt(4r^2 + 11r'^2)}{4L^3 \sin^2 \psi} \quad (5.26)$$

正常重力场不存在地形影响问题, 地形影响的对象是重力位、重力和重力梯度, 因此, 任意计算点处扰动重力、空间异常的地形影响都严格等于其重力的地形影响。高海拔地区, 重力的局部地形影响有正有负。近岸海域存在局部地形影响, 大洋深处局部地形影响等于零。

(2) 局部地形影响积分快速算法

采用当地水平极坐标系, 令 z 轴为天顶方向, 原点位于计算点正下方的地形面 O , 原点处的 $z = 0$, \tilde{h} 为计算点相对其下方地形面 O 的高度, 因而有 $dz = dr'$, $d\tilde{h} = dr$, 如图 5, 此时扰动位局部地形影响严密积分式 (5.5) 等价于

$$\begin{aligned} T^R &= G\rho \iint_S \int_0^{\Delta h} \frac{dz}{L} ds = G\rho \iint_S \int_0^{\Delta h} \frac{dz}{\sqrt{(\tilde{h}-z)^2 + l^2}} ds \\ &= G\rho \iint_S \left[\ln \frac{\sqrt{(\tilde{h}-\Delta h)^2 + l^2} - \tilde{h} + \Delta h}{\sqrt{(\tilde{h}-\Delta h)^2 + l^2} + \tilde{h} - \Delta h} - \ln \frac{\sqrt{\tilde{h}^2 + l^2} - H}{\sqrt{\tilde{h}^2 + l^2} + H} \right] ds \end{aligned} \quad (5.27)$$

式中: Δh 为流动积分面 ds 相对于计算点正下方地形面 O 的高差; l 为过 O 点等高面上流动面元 ds 到计算点正下方地形面 O 的直线距离。

不难理解, 无论采用何种形式的坐标系, 只要能保证流动面元及其到计算点积分距离计算的严密性, 则重力场积分公式都是严密的, 因而式 (5.27) 与式 (5.5) 等价, 也是严密积分公式。将式 (5.27) 中的被积函数在 $z = 0$ 附近展开至 3 阶, 得

$$T^R = G\rho \iint_S \left[\frac{1}{L} \Delta h + \frac{\tilde{h}}{2L^3} \Delta h^2 + \frac{2\tilde{h}^2 - l^2}{6L^5} \Delta h^3 \right] ds \quad (5.28)$$

式中： $\mathcal{L} = \sqrt{\tilde{h}^2 + l^2}$ 为等高面 $z = 0$ 上的流动面元 ds 到外部计算点的空间距离 ($\mathcal{L} \neq L$)，而 L 为流动体元 $dzds$ 到外部计算点的空间距离，如图 5)。

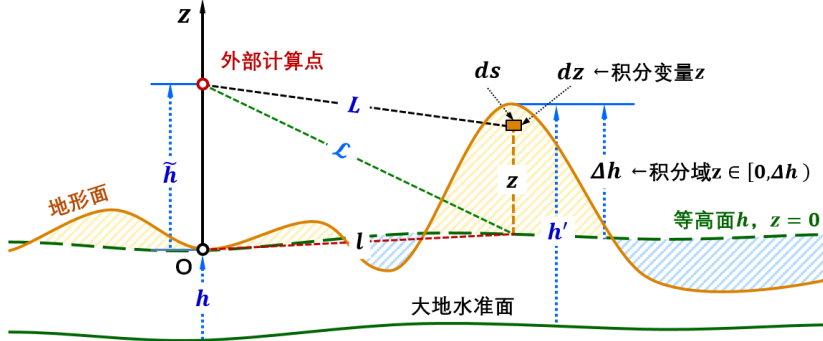


图 5 当地极坐标系中局部地形影响严密积分各要素几何关系

将 $\Delta h^2 = h'^2 - 2h'h + h^2$ ， $\Delta h^3 = h'^3 - 3h'^2h + 3h'h^2 - h^3$ 代入式 (5.28) 并展开，则右边每一项积分号内只存在唯一积分变量 l ，因而可用 FFT 算法逐项进行快速计算。其中， h 为计算点正下方的地形高度， h' 为流动面元处的地形高度。

同理，扰动重力局部地形影响严密积分式 (5.8) 等价于

$$\delta g^R = \frac{G\rho}{r} \iint_S \left[\frac{(r_0+z)}{\sqrt{(\tilde{h}-z)^2+l^2}} \right]_0^{\Delta h} ds = \frac{G\rho}{r} \iint_S \left[\frac{r_0+\Delta h}{\sqrt{(\tilde{h}-\Delta h)^2+l^2}} - \frac{r_0}{\mathcal{L}} \right] ds \quad (5.29)$$

将式 (5.29) 中的被积函数在 $z = 0$ 附近展开至 4 阶，得

$$\delta g^R = \frac{G\rho}{r} \iint_S \left[\frac{r\tilde{h}+\mathcal{L}^2}{\mathcal{L}^3} \Delta h + \frac{2\tilde{h}\mathcal{L}^2+r_0(2\tilde{h}^2-l^2)}{2\mathcal{L}^5} \Delta h^2 + \frac{2\tilde{h}^3r+\tilde{h}^2l^2-3r_0\tilde{h}l^2-l^4}{2\mathcal{L}^7} \Delta h^3 + \frac{8r\tilde{h}^4-4\tilde{h}^3l^2-12\tilde{h}l^4-24r_0\tilde{h}^2l^2+3l^4r_0}{8\mathcal{L}^9} \Delta h^4 \right] ds \quad (5.30)$$

其中， $\Delta h^4 = h'^4 - 4h'^3h + 6h^2h'^2 - 4h'h^3 + h^4$ 。式 (5.30) 展开后可按 FFT 算法计算。

将垂线偏差局部地形影响积分公式中被积函数在 $z = 0$ 附近展开至 3 阶

$$\int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial \psi} dr' = -\frac{r^2 \sin \psi}{\mathcal{L}^3} \Delta h - \frac{3\tilde{h}r^2 \sin \psi}{2\mathcal{L}^5} \Delta h^2 - \left[\frac{r^2 \sin \psi}{3\mathcal{L}^5} + \frac{5r^2 \sin \psi (2\tilde{h}^2 - l^2)}{6\mathcal{L}^7} \right] \Delta h^3 \quad (5.31)$$

将式 (5.31) 分别代入式 (5.11) 和式 (5.12)，就可实现 FFT 算法快速计算外部垂线偏差的局部地形影响。

扰动重力梯度局部地形影响严密积分式 (5.16) 等价于

$$T_{rr}^R = G\rho \iint_S \left[\frac{\tilde{h}-\Delta h}{((\tilde{h}-\Delta h)^2+l^2)^{3/2}} - \frac{\tilde{h}}{\mathcal{L}^3} \right] ds \quad (5.32)$$

将式 (5.32) 中的被积函数在 $z = 0$ 附近展开至 3 阶，得

$$T_{rr}^R = G\rho \iint_S \left[\frac{2\tilde{h}^2-l^2}{\mathcal{L}^5} \Delta h - \frac{3\tilde{h}(2\tilde{h}^2-3l^2)}{2\mathcal{L}^7} \Delta h^2 + \frac{4\tilde{h}^4+6r^4-12\tilde{h}^2l^2-(6r^4+3r^2l^2)t}{\mathcal{L}^9} \Delta h^3 \right] ds \quad (5.33)$$

水平重力梯度局部地形影响严密积分式 (5.25) 中被积函数等价于

$$\begin{aligned} \int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \frac{1}{L} dr' &= \int_0^{\Delta h} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \frac{1}{\sqrt{(\tilde{h}-z)^2 + 4r_0^2 \sin^2(\psi/2)}} dz \\ &= \frac{1}{8\sin^2 \frac{\psi}{2}} \left[\frac{\tilde{h}(2\mathcal{L}^2 + r_0^2 \sin^2 \psi)}{\mathcal{L}^3} - \frac{(\tilde{h}-\Delta h)(2\mathcal{L}^2 + r_0^2 \sin^2 \psi - 4\tilde{h}\Delta h + 2\Delta h^2)}{(\mathcal{L}^2 - 2\tilde{h}\Delta h + \Delta h^2)^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

在 $z = 0$ 附近展开至 3 阶, 得

$$\begin{aligned} \int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \frac{1}{L} dr' &= -\frac{2(\tilde{h}^2 + 2r_0^2)\cos\psi + r_0^2(-5 + \cos 2\psi)}{2L^5} r_0^2 \Delta h \\ &\quad + \frac{6(\tilde{h}^2 + 2r_0^2)\cos\psi + 3r_0^2(-7 + 3\cos 2\psi)}{4L^7} \tilde{h} r_0^2 \Delta h^2 \\ &\quad + \frac{(8\tilde{h}^4 + 12\tilde{h}^2 r_0^2 - 19r_0^4)\cos\psi - r_0^2(36\tilde{h}^2 - 18r_0^2 - (24\tilde{h}^2 - 2r_0^2)\cos 2\psi + 3r_0^2 \cos 3\psi)}{4L^9} r_0^2 \Delta h^3 \end{aligned} \quad (5.35)$$

若计算点也在地面上, 则有 $\tilde{h} = 0$, $\mathcal{L} = l$, 式 (5.27) ~ 式 (5.35) 可进一步大幅度简化。

7.5.3 外部海水完全布格影响的积分算法

海域地形场通常用海水完全布格影响表示。海水完全布格影响定义为, 将海水密度补偿到陆地地形密度后, 对各种地球重力场量产生的影响。

根据定义, 扰动位海水完全布格影响的严密积分公式为

$$T^o = G\beta \iint_s \int_{R+d}^R L^{-1}(r, \psi, r') dr' ds \quad (5.36)$$

式中, $d < 0$ 为以平均海水面 (注意这里原则上不是深度基准面) 起算的海底水深; β 为海水补偿密度, 等于地形密度与海水密度之差, 可取 $\beta = \rho - \rho_w = 1.64 \times 10^3 \text{kg/m}^3$; L 为海洋水体的流动体元 ($dV' = dr' ds$) 到计算点的空间距离。

采用当地水平极坐标系, 令 z 轴为地心向径方向 (天顶方向), 此时有 $dz = dr'$, $z = 0$ 是海平面, 则式 (5.36) 等价于

$$\begin{aligned} T^o &= G\beta \iint_s \int_d^0 \frac{dz}{L} ds = G\beta \iint_s \int_d^0 \frac{dz}{\sqrt{(\tilde{h}-z)^2 + l^2}} ds \\ &= G\beta \iint_s \left[\ln \frac{\sqrt{\tilde{h}^2 + l^2} - \tilde{h}}{\sqrt{\tilde{h}^2 + l^2} + \tilde{h}} - \ln \frac{\sqrt{(\tilde{h}-d)^2 + l^2} - \tilde{h} + d}{\sqrt{(\tilde{h}-d)^2 + l^2} + \tilde{h} - d} \right] ds \end{aligned} \quad (5.37)$$

式中: $ds = r'^2 d\sigma = r'^2 \cos\varphi' d\varphi' d\lambda'$ 为海面面元; $\mathcal{L} = \sqrt{\tilde{h}^2 + l^2}$ 为海面上的流动面元 ds 到外部计算点的空间距离 ($\mathcal{L} \neq L$), \tilde{h} 为计算点的海拔高; $l = 2r_0 \sin \frac{\psi}{2}$ 为计算点在海面的投影点与流动面元之间的直线距离, r_0 为海平面的平均地心距。

同理, 扰动重力海水完全布格影响严密积分表达式为

$$\delta g^o = -\frac{\partial T^o}{\partial r} = -G\beta \iint_s \int_{R+d}^R \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial r} dr' ds \quad (5.38)$$

$$\text{等价于} \quad \delta g^o = \frac{G}{r} \iint_s \beta \int_d^0 \frac{(r_0 + z) dz}{\sqrt{(\tilde{h}-z)^2 + l^2}} ds = \frac{G\beta}{r} \iint_s \left[\frac{r_0}{\mathcal{L}} - \frac{r_0 + d}{\sqrt{(\tilde{h}-d)^2 + l^2}} \right] ds \quad (5.39)$$

顾及 $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos\alpha$, $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos\varphi \sin\alpha$, 可得垂线偏差海水完全布格影响严密积分表

达式

$$\xi^o = \frac{T_\theta^o}{\gamma r} = \frac{G\beta}{\gamma r} \iint_S \int_{R+d}^R \frac{\partial L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial \psi} dr' \cos \alpha ds \quad (5.40)$$

$$\eta^o = -\frac{T_\lambda^o}{\gamma r \sin \theta} = \frac{G\beta}{\gamma r} \iint_S \int_{R+d}^R \frac{\partial L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial \psi} dr' \sin \alpha ds \quad (5.41)$$

扰动重力梯度海水完全布格影响严密积分表达式

$$T_{rr}^o = \frac{\partial^2}{\partial r^2} T^o = G\beta \iint_S \int_{R+d}^R \frac{\partial^2 L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial r^2} dr' ds \quad (5.42)$$

等价于

$$T_{rr}^o = G\beta \iint_S \left[\frac{\tilde{h}-d}{((\tilde{h}-d)^2+l^2)^{3/2}} - \frac{h}{L^3} \right] ds \quad (5.43)$$

类似地，将上述严积分式中的被积函数在海平面 $z = 0$ 附近展开，可导出积分快速 FFT 算法公式。将式 (5.37) 被积函数在 $z = 0$ 处展开至 3 阶，得

$$T^o = G\beta \int_d^0 \frac{1}{L} dz ds = G\beta \iint_S \left(\frac{1}{L} d + \frac{\tilde{h}}{2L^3} d^2 + \frac{2\tilde{h}^2-l^2}{6L^5} d^3 \right) ds \quad (5.44)$$

将式 (5.39) 被积函数在 $z = 0$ 处展开至 4 阶，得

$$\delta g^o = \frac{G}{r} \iint_S \beta \left[\frac{r\tilde{h}+L^2}{L^3} d + \frac{2\tilde{h}L^2+r_0(\tilde{h}^2+L^2)}{2L^5} d^2 + \frac{2\tilde{h}^3r+\tilde{h}^2l^2-3r_0\tilde{h}l^2-l^4}{2L^7} d^3 + \frac{8r\tilde{h}^4-4\tilde{h}^3l^2-12\tilde{h}l^4-24r_0\tilde{h}^2l^2+3l^4r_0}{8L^9} d^4 \right] ds \quad (5.45)$$

将垂线偏差海水布格影响严密积分公式中被积函数在 $z = 0$ 附近展开至 3 阶

$$\begin{aligned} & \int_{R+d}^R \frac{\partial L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial \psi} dr' \\ &= -\frac{r^2 \sin \psi}{L^3} d - \frac{3\tilde{h}r^2 \sin \psi}{2L^5} d^2 - \left[\frac{r^2 \sin \psi}{3L^5} + \frac{5r^2 \sin \psi (2\tilde{h}^2-l^2)}{6L^7} \right] d^3 \end{aligned} \quad (5.46)$$

由式 (5.39)，扰动重力梯度海水完全布格影响等于

$$T_{rr}^o = -\frac{\partial \delta g^o}{\partial r} = G\beta \iint_S \left[\frac{2\tilde{h}^2-l^2}{L^5} d + \frac{3\tilde{h}(2\tilde{h}^2-3l^2)}{2L^7} d^2 + \frac{4\tilde{h}^4+6r^4-12\tilde{h}^2l^2-(6r^4+3r^2l^2)\cos \psi}{L^9} d^3 \right] ds \quad (5.47)$$

式 (5.44) ~ 式 (5.47) 右边各项展开后可用 FFT 算法进行快速计算。若计算点也在海面，有 $h = 0$ ， $L = l$ ，式 (5.37) ~ 式 (5.47) 会大幅简化。

地球外部各类重力场量的海水完全布格影响量级较大，实际计算时应采用较大积分半径，如积分半径不小于 250km。近海陆地受海水布格影响，近岸海域受陆地局部地形影响，海岸带陆域或海域同时受海水布格和陆地局部地形影响。

由于各种类型球壳布格影响量级大，地形起伏三阶近似的引入误差有时甚至超过扰动重力场量本身量级。因此建议，除重力完全布格影响可用积分法计算外，其他各种类型外部扰动场量（包括重力）的完全布格影响，以全球陆海地形质量球谐系数模型为参考地形场，采用移去恢复法按剩余地形影响积分精准计算。

7.5.4 外部场量剩余地形影响的积分算法

陆海剩余地形影响定义为陆海完全布格影响的短波、超短波部分，因而可先构造陆海剩余地形模型，再按积分方法计算各种类型场量的剩余地形影响。

剩余地形模型可由相同格网规格的高分陆海地形模型与低通陆海地形模型格网相减

求得。剩余地形影响积分公式，与局部地形影响和海水完全布格影响的积分公式在形式上相同，只是采用的积分流动体元密度和径向积分域存在一些差异。地球外部扰动位剩余地形影响的严密积分公式为

$$T^{rtm} = G \iint_s \int_R^{R+\delta'} \beta' L^{-1}(r, \psi, r') dr' ds \quad (5.48)$$

式中： δ' 、 β' 分别为积分流动面元 $ds = r'^2 \cos\varphi' d\varphi' d\lambda'$ 处的剩余地形高度和密度。当 ds 位于陆地区域， δ' 为剩余地形高度 δh ， β' 等于地形密度 ρ （ $= 2.67 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ）；当 ds 位于海洋区域， δ' 为剩余水深 δd ， β' 为海水补偿密度 $\beta' = \rho - \rho_w$ （海水密度 $\rho_w = 1.03 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ）。

不难看出，面元 ds 无论位于陆域，还是海域，剩余地形 δ' 都是可正可负的。

同理，可得外部扰动重力剩余地形影响的严密积分表达式

$$\delta g^{rtm} = -\frac{\partial T^{rtm}}{\partial r} = -G \iint_s \beta' \int_R^{R+\delta'} \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial r} dr' ds \quad (5.49)$$

外部垂线偏差剩余地形影响的严密积分表达式

$$\xi^{rtm} = \frac{G}{\gamma r} \iint_s \beta' \int_R^{R+\delta'} \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial \psi} dr' \cos\alpha ds \quad (5.50)$$

$$\eta^{rtm} = \frac{G}{\gamma r} \iint_s \beta' \int_R^{R+\delta'} \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial \psi} dr' \sin\alpha ds \quad (5.51)$$

外部扰动重力梯度剩余地形影响的严密积分表达式

$$T_{rr}^{rtm} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} T^{rtm} = G \iint_s \beta' \int_R^{R+\delta'} \frac{\partial^2 L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial r^2} dr' ds \quad (5.52)$$

综合局部地形影响与海水完全布格影响快速算法思路，采用当地水平极坐标系，令 $z = 0$ 为陆域地形面/海面， z 轴指向天顶方向。令 $\mathcal{L} = \sqrt{\tilde{h}^2 + l^2}$ 为地形面/海面上的流动面元到外部计算点的三维空间距离，则式（5.48）~式（5.52）可等价地改写成

$$\begin{aligned} T^{rtm} &= G \iint_s \beta' \int_0^{\delta'} \frac{dz}{\sqrt{(\tilde{h}-z)^2 + l^2}} ds \\ &= G \iint_s \beta' \left[\ln \frac{\sqrt{(\tilde{h}-\delta')^2 + l^2} - \tilde{h} + \delta'}{\mathcal{L} + \tilde{h} - \delta'} - \ln \frac{\mathcal{L} - \tilde{h}}{\mathcal{L} + \tilde{h}} \right] ds \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\delta g^{rtm} = \frac{G}{r} \iint_s \beta' \int_0^{\Delta h} \frac{\partial}{\partial \tilde{h}} \frac{dz}{\sqrt{(\tilde{h}-z)^2 + l^2}} ds = \frac{G}{r} \iint_s \beta' \left[\frac{1}{\sqrt{(\tilde{h}-\Delta h)^2 + l^2}} - \frac{1}{\mathcal{L}} \right] ds \quad (5.54)$$

$$\text{垂线偏差剩余地形影响被积函数} \int_R^{R+\delta'} \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial \psi} dr' = \frac{1}{2} \text{ctg} \frac{\psi}{2} \left[\frac{\tilde{h} - \delta'}{\sqrt{(\tilde{h} - \delta')^2 + l^2}} - \frac{\tilde{h}}{\mathcal{L}} \right] \quad (5.55)$$

$$T_{rr}^{rtm} = G \iint_s \beta' \left[\frac{\tilde{h} - \delta'}{((\tilde{h} - \delta')^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{\tilde{h}}{\mathcal{L}^3} \right] ds \quad (5.56)$$

为进行快速计算，将上述严密积分表达式中的被积函数在 $z = 0$ 附近展开，这里的 $z = 0$ 是地形面/海面。将式（5.53）被积函数在 $z = 0$ 处展开至3阶，得

$$T^{rtm} = -G \iint_s \beta' \left(\frac{1}{\mathcal{L}} \delta' + \frac{\tilde{h}}{2\mathcal{L}^3} \delta'^2 + \frac{2\tilde{h}^2 - l^2}{6\mathcal{L}^5} \delta'^3 \right) ds \quad (5.57)$$

将式 (5.54) 被积函数在 $z = 0$ 处展开至 4 阶, 得

$$\delta g^{\text{rtm}} = \frac{G}{r} \iint_S \beta' \left[\frac{\tilde{h}}{\mathcal{L}^3} \delta' + \frac{2\tilde{h}^2 - l^2}{2\mathcal{L}^5} \delta'^2 + \frac{\tilde{h}(2\tilde{h}^2 - 3l^2)}{2\mathcal{L}^7} \delta'^3 + \frac{8\tilde{h}^4 - 24\tilde{h}^2 l^2 + 3l^4}{8\mathcal{L}^9} \delta'^4 \right] ds \quad (5.58)$$

将垂线偏差剩余地形影响的被积函数式 (5.55) 在 $z = 0$ 附近展开至 3 阶

$$\int_R^{R+\delta'} \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial \psi} dr' = -\frac{r^2 \sin \psi}{\mathcal{L}^3} \delta' - \frac{3\tilde{h} r^2 \sin \psi}{2\mathcal{L}^5} \delta'^2 - \left[\frac{r^2 \sin \psi}{3\mathcal{L}^5} + \frac{5r^2 \sin \psi (2\tilde{h}^2 - l^2)}{6\mathcal{L}^7} \right] \delta'^3 \quad (5.59)$$

将式 (5.56) 被积函数在 $z = 0$ 附近展开至 3 阶, 得

$$T_{rr}^{\text{rtm}} = G \iint_S \beta' \left[\frac{2\tilde{h}^2 - l^2}{\mathcal{L}^5} \delta' + \frac{3\tilde{h}(2\tilde{h}^2 - 3l^2)}{2\mathcal{L}^7} \delta'^2 + \frac{8\tilde{h}^4 - 24\tilde{h}^2 l^2 + 3l^4}{2\mathcal{L}^9} \delta'^3 \right] ds \quad (5.60)$$

7.6 局部地形补偿与地形 Helmert 凝聚

7.6.1 重力场量的地形 Helmert 凝聚影响

地形质量的 Helmert 凝聚, 涉及一种称为地形质量补偿的概念, 简称地形补偿。大地水准面外部任意类型场量的地形补偿定义为, 为抵消移去地形质量即扣除地形影响后导致地球引力场发生变化, 从而对该类型场量进行的质量补偿量。

地形 Helmert 凝聚可分解为两个步骤: 第一步, 扣除地形质量生成的引力场, 即减去陆地完全布格地形影响; 第二步, 补偿扣除地形质量后引起的引力场变化, 即加上地形补偿。地形 Helmert 凝聚引起外部任意重力场量的变化, 称为该重力场量的地形 Helmert 凝聚影响, 可统一表示为

$$\alpha^h = \alpha^t - \alpha^c \quad (6.1)$$

式中: α^h 为扰动场量 α 的地形 Helmert 凝聚; α^t 为 α 的陆地完全布格影响; α^c 为 α 的地形补偿。

不同于局部地形影响和完全布格影响, 地形 Helmert 凝聚前后, 地形质量保持不变, 因而场量在垂直方向的地形 Helmert 凝聚影响一般远小于其完全布格影响, 也小于其局部地形影响。地形 Helmert 凝聚后的大地水准面外部空间, 称为 Helmert 空间, 对应的重力场为 Helmert 重力场, 与实际地球重力场相差由地形 Helmert 凝聚引起的引力场变化。地形 Helmert 凝聚影响是调和的。

7.6.2 地形补偿与 Helmert 凝聚影响算法

下面给出大地水准面外部近地调和空间中, 任意高度各类重力场量的地形补偿算法。依据定义, 外部扰动位的地形补偿可表示为

$$T^c = T^B + T^{cR} = T^B + G \iint_S \frac{\mu' - \mu}{L} ds \quad (6.2)$$

式中: T^{cR} 称为扰动位的局部地形补偿; ds 为地形面上的流动面元; μ 称为地形质量补偿密度, 球近似下有

$$\mu = \rho h \left(1 + \frac{h}{R} + \frac{h^2}{3R^2} \right) \quad (6.3)$$

式中： h 为计算点正下方的地面高程； ρ 为地形密度。

分别用计算面和地形面的平均地心距代替实际地心距，式 (6.2) 右边第二项局部地形补偿积分可用 FFT 算法进行快速计算。

当计算点与流动点位置相同时， T^{cR} 是奇异积分，奇异积分值为

$$T^{cR}|_0 = \frac{R^2}{6\tilde{r}^3} GA_0 \sqrt{A_0/\pi} (\mu_{xx} + \mu_{yy}) \quad (6.4)$$

式中： μ_{xx}, μ_{yy} 为计算点地形质量补偿密度在北方向 x 和东方向 y 的二阶偏导数。

将式 (6.2) 代入扰动重力定义式，可得扰动重力地形补偿的积分式为

$$\delta g^c = \delta g^B + \delta g^{cR} = \delta g^B + G \iint_S (\mu' - \mu) \frac{r-r't}{L^3} ds \quad (6.5)$$

式中： δg^{cR} 称为扰动重力的局部地形补偿。

当计算点与流动点位置相同时，积分奇异，奇异积分值为

$$\delta g^{cR}|_0 = \frac{R^2}{12\tilde{r}^3} GA_0 \sqrt{A_0/\pi} (\mu_{xx} + \mu_{yy}) \quad (6.6)$$

综合式 (6.2) 和式 (6.5) 不难发现，地球外部任意类型扰动场量 α 的地形 Helmert 凝聚影响可表示为

$$\alpha^h = \alpha^t - \alpha^c = (\alpha^B + \alpha^R) - (\alpha^B + \alpha^{cR}) = \alpha^R - \alpha^{cR} \quad (6.7)$$

由式 (6.7) 可知，球近似球壳布格影响 α^B 抵消，即地形 Helmert 凝聚影响等于局部地形影响 α^R 与局部地形补偿 α^{cR} 之差。

将式 (5.5) 和式 (6.5)，以及式 (5.8) 和式 (6.5) 分别代入式 (6.7)，就可求得大地水准面外部近地空间扰动位和扰动重力的地形 Helmert 凝聚影响，进而可以得到其他各种类型重力场量的地形 Helmert 凝聚影响。

采用当地水平极坐标系，令 z 轴为天顶方向，此时有 $dr = d\tilde{h}$ ，则

$$\begin{aligned} \delta g^{cR} &= -G \iint_S (\mu' - \mu) \frac{\partial}{\partial \tilde{h}} \frac{1}{L} ds = G \iint_S (\mu' - \mu) \frac{\tilde{h}}{L^3} - \frac{\mu' - \mu}{L^3} (h' - h) ds \\ &= G \iint_S (\mu' - \mu) \frac{\tilde{h}}{L^3} ds - G \iint_S \frac{\mu' h' - \mu h}{L^3} ds \\ &\quad + G \iint_S \frac{\mu' h}{L^3} ds + G \iint_S \frac{\mu h'}{L^3} ds - G \iint_S \frac{\mu h}{L^3} ds \end{aligned} \quad (6.8)$$

式 (6.8) 右边每一项可用 FFT 算法进行快速计算。

$$\text{顾及} \quad \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial \psi} = \frac{r r' \sin \psi}{L^3}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos \alpha, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos \varphi \sin \alpha \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \text{有} \quad \xi^{cR} &= -\frac{\partial T^{cR}}{\gamma r \partial \varphi} = -\frac{\partial T^{cR}}{\gamma r \partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{\partial T^{cR}}{\gamma r \partial \psi} \cos \alpha = \frac{G}{\gamma r} \iint_S (\mu' - \mu) \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial \psi} \cos \alpha ds \\ &= \frac{G}{\gamma} \int_S (\mu' - \mu) \frac{r' \sin \psi}{L^3} \cos \alpha ds \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \eta^{cR} &= -\frac{\partial T^{cR}}{\gamma r \cos \varphi \partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{\partial T^{cR}}{\gamma r \partial \psi} \sin \alpha = \frac{G}{\gamma r} \iint_S \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial \psi} (\mu' - \mu) \sin \alpha ds \\ &= \frac{G}{\gamma} \iint_S (\mu' - \mu) \frac{r' \sin \psi}{L^3} \sin \alpha ds \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned}
T_{rr}^{cR} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} T^{cR} = G \iint_S (\mu' - \mu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{L} \right) ds \\
&= G \iint_S (\mu' - \mu) \left(3 \frac{r-r' \cos \psi}{L^5} - \frac{1}{L^3} \right) ds \quad (6.12)
\end{aligned}$$

式 (6.10) ~ 式 (6.12) 为垂线偏差和扰动重力梯度局部地形补偿的 FFT 算法公式。

7.7 陆海地形球谐分析与地形影响综合

地面/海面任意一点 $P(\theta, \lambda, R)$ 的地形面密度 $q(\theta, \lambda)$ 可用规格化的球谐系数展开式表示为

$$q(\theta, \lambda) = \beta h = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (7.1)$$

式中: a 取地球椭球长半轴, 以方便与地球重力场位系数模型融合; A_{nm}, B_{nm} 为 n 阶 m 次规格化地形质量球谐系数。

式 (7.1) 中, 当 P 位于陆地地面时, h 为陆地地形高度 ($h > 0$), β 为地形密度, 可取 $\beta = \rho = 2.67 \times 10^3 \text{kg/m}^3$; 当 P 位于海面时, h 为海洋水深 ($h < 0$), β 为海水补偿密度 (等于地形密度 ρ 与海水密度 ρ_w 之差), 可取 $\beta = \rho - \rho_w = 1.64 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 。

地球外部空间点 (θ, λ, r) 引力位的陆海完全布格影响可用全球陆海地形质量球谐级数表达为

$$V^{\text{tbg}}(\theta, \lambda, r) = \frac{3GM}{r\rho_e} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (7.2)$$

式中: $\rho_e = 5.517 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 为地球平均密度。

而地球外部空间点 (r, θ, λ) 引力位的剩余地形影响可用全球陆海地形质量球谐级数表示为

$$V^{\text{rtm}}(\theta, \lambda, r) = \frac{3GM}{r\rho_e} \sum_{n=n_1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (7.3)$$

式中: n_1 为剩余陆海地形模型的最小阶数。

规格化地形质量球谐系数与规格化地形位系数之间的关系为

$$\bar{C}_{nm}^{\text{ter}} = \frac{3}{\rho_e} \frac{1}{2n+1} A_{nm}, \quad \bar{S}_{nm}^{\text{ter}} = \frac{3}{\rho_e} \frac{1}{2n+1} B_{nm} \quad (7.4)$$

可见, 地形位系数 $\bar{C}_{nm}^{\text{ter}}, \bar{S}_{nm}^{\text{ter}}$ 定义为, 由陆域地面与大地水准面间的地形质量、海域海面 (不是深度基准面) 与海底之间海水补偿质量组合, 生成的地球外部引力场即陆海完全布格影响, 经规格化球谐分析后, 对应的地形引力场位系数, 也称重力位系数的陆海完全布格影响。

将式 (7.4) 代入扰动重力场量球谐展开式, 并顾及正常重力场量不存在地形影响问题, 就可导出地球外部各种重力场量的剩余地形影响球谐综合表达式。大地水准面或其外部点 (θ, λ, r) 处高程异常剩余地形影响球谐综合计算式

$$\begin{aligned}
\zeta^{\text{rtm}}(\theta, \lambda, r) &= \frac{GM}{r\gamma} \frac{3}{\rho_e} \\
&\sum_{n=n_1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (7.5)
\end{aligned}$$

式中： γ 为计算点的正常重力。同理，可得外部重力剩余地形影响球谐综合计算式

$$g^{\text{rtm}}(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{r^2} \frac{3}{\rho_e} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (7.6)$$

外部垂线偏差剩余地形影响球谐综合计算式

$$\text{南向: } \xi^{\text{rtm}}(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{r^2} \frac{3}{\gamma \rho_e} \sin\theta \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (7.7)$$

$$\text{西向: } \eta^{\text{rtm}}(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{r^2} \frac{3}{\sin\theta \gamma \rho_e} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=1}^n m (A_{nm} \sin m\lambda - B_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (7.8)$$

外部径向重力梯度剩余地形影响球谐综合计算式

$$V_{rr}^{\text{rtm}}(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{r^3} \frac{3}{\rho_e} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (7.9)$$

外部水平重力梯度剩余地形影响球谐综合计算式

$$\text{北向: } V_{nn}^{\text{rtm}}(\theta, \lambda, r) = -\frac{GM}{r^3} \frac{3}{\rho_e} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (7.10)$$

$$\text{西向: } V_{ww}^{\text{rtm}}(\theta, \lambda, r) = -\frac{GM}{r^3} \frac{3}{\sin^2\theta \rho_e} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=1}^n m^2 (A_{nm} \sin m\lambda + B_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (7.11)$$

在式 (7.5) ~ 式 (7.11) 中，取 $n_1 = 1$ ，就是对应类型重力场量的陆海完全布格影响球谐综合算法公式。陆海完全布格影响的一阶项明显，不能忽略。

7.8 陆海统一经典布格与均衡影响算法

7.8.1 陆地布格重力异常经典归算方法

经典的平面布格重力异常只定义在大地水准面上，等于大地水准面上的空间异常，减去大地水准面外所有地形质量对地面点重力产生的影响。因而，大地水准面上的布格重力异常经典算法为

$$\Delta g_B = \Delta g - g^R - 2\pi G\rho h \quad (8.1)$$

式中： Δg 为大地水准面上空间异常， $-g^R$ 为经典的平面地形改正（ g^R 等于地面重力局部地形影响的平面近似）， $-2\pi G\rho h$ 为层间改正（ $2\pi G\rho h$ 等于地面重力球壳布格影响的平面近似）。

在陆地山区，层间改正 $-2\pi G\rho h$ 远小于零，因而布格重力异常也一般小于零。由于实际重力测点一般不在大地水准面上，因而需要将实测重力从测点高度延拓到大地水准面上，得到该点在大地水准面上的空间异常 Δg 后，才可以按算法公式 (8.1)，计算经典布格重力异常。

这样，对于地面或近地空间，由测点重力与测点高度观测量，计算平面布格重力异常（大地水准面上）的一般算法公式为

$$\Delta g_B = \Delta g^s - g^R - 2\pi G\rho h - \Delta g^c \quad (8.2)$$

式中： Δg^s 为测点空间异常； Δg^c 为空间异常的解析延拓量。

由于地形影响的对象是重力本身，与正常重力无关。因此由地面测点重力与高度观测量，计算平面布格扰动重力（大地水准面上）的算法公式为

$$\delta g_B = \delta g^s - g^R - 2\pi G\rho h - \delta g^c \quad (8.3)$$

式中： δg^s 为测点扰动重力； δg^c 为扰动重力的解析延拓量，与 Δg^c 几乎相等。

式（8.2）和式（8.3），就是由地面或航空重力计算经典布格重力异常和布格扰动重力的通用公式。

值得注意的是，无论测点在地面还在航空高度上，经典布格重力异常（布格扰动重力）中的空间异常（扰动重力）都只定义在大地水准面上，而地形影响（包括局部地形影响和平面层间影响）特指地形质量对地面重力的影响。即使由航空重力计算经典布格重力异常或布格扰动重力，式（8.2）和式（8.3）中的 g^R 也只能采用地面重力的局部地形影响，既不是航空高度上也不是大地水准面上重力的局部地形影响。

7.8.2 海洋及陆海统一布格重力异常计算

大陆地区，陆域地形导致大地水准面外存在质量，需要去掉，产生陆地布格影响。而在海洋地区，海平面下方的海水密度小于地形密度，海水质量亏损需要补偿，从而产生海水布格影响。

重力（空间异常/扰动重力）的海水完全布格影响严密积分公式为

$$g_b^w = \frac{G\beta}{r} \iint_s \left[\frac{r_0}{L} - \frac{r_0+d}{\sqrt{(\tilde{h}-d)^2+l^2}} \right] ds \quad (8.4)$$

式中： $d < 0$ 为海底水深； $\beta = \rho - \rho_w$ 为海水补偿密度； \tilde{h} 为计算点相对于海面的高度； r_0 为计算点正下方海面的地心距； ds 为海面积分面元； L 为海面流动积分面元到计算点的空间距离； l 为计算点在海面上投影点与海面积分面元 ds 之间的直线距离。

由于式（8.1）中的局部地形影响 g^R 和式（8.4）中的海水完全布格影响 g_b^w 都是一定区域范围内的积分值，因此，近岸海域受陆域局部地形影响不为零，近海陆地受海水布格影响也不为零。可见，海岸带地区需要采用陆海统一的布格影响算法。

海平面的海拔高度等于零，局部地形影响积分区域若包含海域，则海域部分对局部地形影响的贡献等于零；同样，陆域地面的海洋水深等于零，海水布格影响积分区域若包含陆域，则陆域部分对海水布格影响的贡献也等于零。可见，局部地形影响与海水布格影响在积分域上完全分离且无缝拼接，因此两项积分公式直接相加，就是陆海统一的布格重力异常和布格扰动重力计算公式

$$\Delta g_B = \Delta g^s - g^R - 2\pi G\rho h - g_b^w - \Delta g^c \quad (8.5)$$

$$\delta g_B = \delta g^s - g^R - 2\pi G\rho h - g_b^W - \delta g^c \quad (8.6)$$

这表明，陆海统一的算法能力可通过积分公式相加形成。令

$$g^B = g_b + g_b^W = g^R + 2\pi G\rho h + g_b^W \quad (8.7)$$

通常称 g^B 为经典的重力布格影响量。不难看出，对于空间异常或扰动重力，经典的布格影响量是统一的，无需区分。

7.8.3 陆地 Airy-Heiskanen 地壳均衡影响

布格重力异常在山区通常表现为较大的负值，人们因此联想地壳上不规则高山起伏的“多余”物质，可能被下面岩浆层存在的对应亏损物质所补偿。令海平面至岩浆面的深度为补偿深度 D ，Airy-Heiskanen 模型认为，地壳下层是岩浆层，密度为 $\rho_1=3.27\times 10^3\text{kg/m}^3$ ，岩浆层上面漂浮一座山体，密度为地壳密度 $\rho = 2.67\times 10^3\text{kg/m}^3$ ，这座山体高出海平面部分就是可见的地形，山越高沉入岩浆的部分（称为山根）越深，山体与山根相对岩浆面近似对称。山体与山根之间形成一个密度差 $\Delta\rho_1 = \rho_1 - \rho = 0.6\times 10^3\text{kg/m}^3$ ，是岩浆层中局部密度亏损。

假设把地形起伏的多余物质填入其下面的亏损部分，给予补偿，补偿密度正好等于亏损密度 $\Delta\rho_1 = 0.6\times 10^3\text{kg/m}^3$ ，补偿密度使重力值加大，这种因补偿而导致的重力值变化，就是 Airy-Heiskanen 地壳均衡影响。令地形高度为 h ，山根深度为 b ，由漂浮的静力平衡条件可知

$$b\Delta\rho_1 = \rho_0 h \implies b = \frac{\rho_0}{\Delta\rho_1} h = 4.45h \quad (8.8)$$

陆地山根质量亏损，需要质量补偿，因此，一般情况下陆地地壳均衡影响与平面布格影响大致反号。令 z 轴为铅垂线方向，原点 O 位于海平面，则陆地地壳均衡影响等于

$$g_I = -G\Delta\rho_1 \iint_{\sigma} \int_D^{D+b} \frac{z-z'}{L^3} dz d\sigma \quad (8.9)$$

7.8.4 海洋及陆海统一均衡重力异常计算

海洋有一层低密度海水 $\rho_w=1.03\times 10^3\text{kg/m}^3$ 和一层密度等于 ρ 的洋壳，两层物质自重将小于岩浆的浮力，需要补充物质才能达到静力平衡，从而导致岩浆物质向海洋地区上涌，形成反山根。

对海水层密度亏损的补偿 $\beta = \rho - \rho_w = 1.64\times 10^3\text{kg/m}^3$ ，产生海水布格影响，已用式 (8.4) 表达。令海底水深为 d ，海水补偿后，海洋反山根静力平衡条件变为

$$b'\Delta\rho_1 = \beta d \implies b' = \frac{\beta}{\Delta\rho_1} d = 2.73d \quad (8.10)$$

陆地山根质量亏损，需要质量补偿，因此，海洋地壳均衡影响与海水布格影响一般也反号。海洋地壳均衡影响等于

$$g_I^o = -G\Delta\rho_1 \iint_{\sigma} \int_{D-b'}^D \frac{z-z'}{L^3} dz d\sigma \quad (8.11)$$

由于陆域地壳均衡影响式 (8.9) 和海洋地壳均衡影响式 (8.11) 都是对一定区域范围内的积分，因此，近岸海域的陆地均衡影响不为零，近海陆地的海洋均衡影响也不为

零。可见，在海岸带区域，也需要陆海统一的地壳均衡影响算法。

与陆海统一布格影响算法的分析思路相似，海面高度等于零，陆域均衡影响积分区域若包含海域，则海域部分对陆域地壳均衡影响的贡献等于零（海域无陆地山根）；陆地海洋水深等于零，海洋均衡影响积分区域若包含陆域，则陆域部分对海洋地壳均衡影响的贡献也等于零（陆域无海洋反山根）。因此，陆地均衡影响与海洋均衡影响在积分域上也完全分离且无缝拼接，两项积分公式直接相加，就得到陆海统一的均衡重力异常和均衡扰动重力计算公式

$$\Delta g_B = \Delta g^s - g^B - g_l - g_l^o - \Delta g^c \quad (8.12)$$

$$\delta g_B = \delta g^s - g^B - g_l - g_l^o - \delta g^c \quad (8.13)$$

$$\text{令} \quad g^l = g_l + g_l^o \quad (8.14)$$

并称 g^l 为经典的重力陆海地壳均衡影响量。

7.8.5 布格/均衡影响符号问题的物理解释

陆地布格影响 g_b 是移去大地水准面以外的地形质量，海水布格影响 g_b^w 是补偿海水密度至地形密度，因此，陆地布格影响与海水布格影响反号。

陆地均衡影响 g_l 是将地形多余物质填入山根的亏损部分，陆地均衡影响与陆地布格影响反号；海洋均衡影响 g_l^o 是移去海洋反山根的过程质量，海洋均衡影响与海水布格影响反号。

陆地布格影响大于零 $g_b > 0$ ，因此，海水布格影响、陆地均衡影响小于零 $g_b^w < 0, g_l < 0$ ，而海洋均衡影响大于零 $g_l^o > 0$ 。用+表示大于零，-表示小于零，则陆地布格影响 (+)，海水布格影响 (-)，陆地均衡影响 (-)，海洋均衡影响 (+)，如图 6。

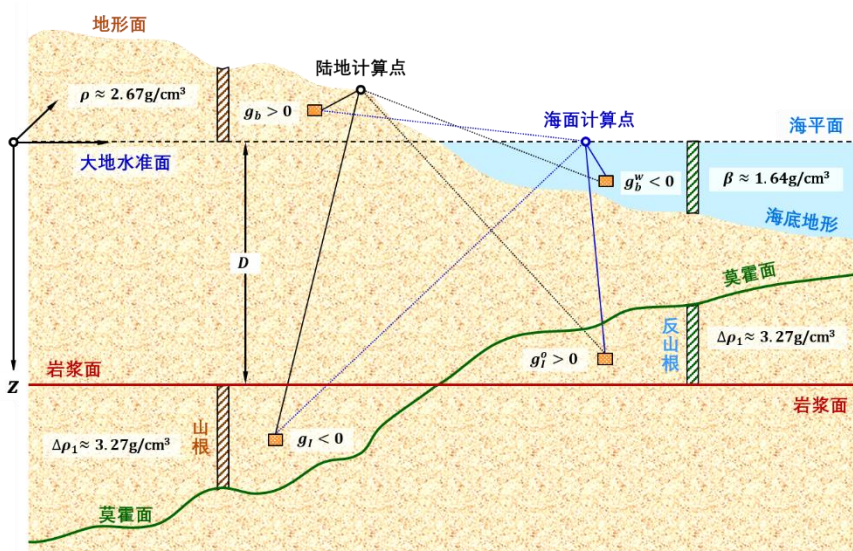


图 6 陆海统一的地面重力布格与均衡影响量计算原理

由地壳均衡补偿原理可知，陆地布格影响大于陆地均衡影响，且相互抵偿一部分；

海洋的海水布格影响大于海洋均衡影响，也相互抵偿一部分。因此，无论是陆地还是海洋，在大部分地区，均衡异常一般会小于布格异常。

正常重力场是扰动重力场约定的起算基准，不存在地形影响问题。因此，同一点处的重力、扰动重力和空间异常的各种地形影响都严格相等，重力位与扰动位的地形影响、重力梯度与扰动重力梯度的地形影响也分别相等。例如，测点的重力、扰动重力、空间异常的局部地形影响、地形 Helmert 凝聚、陆海布格影响、陆海均衡影响和地形剩余影响都分别相等，无需区分。布格重力异常与布格扰动重力的地形影响相同，均衡重力异常与均衡扰动重力的地形影响相同。

值得注意的是，由于正常重力不存在地形影响问题，因而扰动重力的地形影响与空间异常的地形影响严格相等，两者之间并不满足重力基本微分方程，而且，空间异常的地形影响与高程异常的地形影响之间满足 Hotine 公式，而不是 Stokes 公式。

7.9 多源异构重力勘探解析建模基本方案

PAGrav4.5 具有大地水准面及其外部任意类型重力场元、多种性质地形影响的高精度解析计算能力，同时具备多种异质、不同高度、交叉分布、陆海共存观测数据混叠的全空间、全要素外部重力场解析建模功能。两者结合，可有效解决任何复杂观测情况下，深度融合所有多源异质重力场数据的地球物理重力勘探解析建模问题。

例如，在全球任意区域，都可联合空天地海的重力、重力梯度、(天文)垂线偏差、卫星测高、GNSS 水准和卫星重力等多源数据，精确计算陆海统一的完全布格重力异常、完全布格扰动重力、完全布格垂线偏差和完全布格重力梯度，计算陆海统一的经典布格/均衡重力异常/扰动重力。

利用 PAGrav4.5 计算系统，可按如下四个步骤实现多源异构重力勘探解析建模：

(1) 确定计算范围、计算面（如地形等高面）与重力勘探模型类型，获取（收集）计算范围及周边各种重力场探测与大地测量数据；

(2) 利用[高精度重力场逼近与全要素建模]有关程序，精密确定计算面上的目标重力场元高分格网模型；

(3) 利用[不同高度各类场元多种地形影响计算]有关程序，精密计算与重力勘探模型类型一致的地形影响高分格网模型；

(4) 将第（3）步重力场元格网模型，直接减去第（4）步地形影响格网模型，就是充分融合所有可能重力场数据信息的重力勘探格网模型。

多源异构重力勘探解析建模方案，本质上以重力场量之间的解析函数关系为强约束，深度融合不同高度、交叉混叠、陆海共存的多源多种异质重力场观测数据，直接依据重力勘探模型的严密定义，在统一的观测系统数学模型中整体实现多种类型重力勘探模型的高精度解析建模。

多源异构重力勘探解析建模方案，可避免重力归算、延拓和格网化运算，有效解决传统方法中的重力场信号衰减、非解析失真、地形影响不易控制难题。重力场观测类型可以是重力、重力梯度、卫星测高、垂线偏差、GNSS 水准等，测量方式可以在陆地、海洋、航空或卫星。目标模型类型可以是重力异常（重力扰动）、重力梯度或垂线偏差。

可见，多源异构重力勘探解析建模方案，能充分提取所有各类重力场与大地测量信息，实现全要素解析建模（如完全布格重力梯度/垂线偏差建模），以显著提升重力场精细结构探测及精细重力勘探能力与技术水平。