

区域重力场及大地水准面建模原理与要求

PAGravf4.5, 章传银

1.1 区域重力场及大地水准面精化原则

任意点的大地水准面高及其他重力场量都需要覆盖全球的观测重力场数据才能精密确定, 区域观测重力场数据无法完整包含中长波重力场及大地水准面信息。按重力场逼近方法确定的重力场及大地水准面, 其波长越长(空间尺度越大), 对应谱分量的精度水平一般越高。

由此可得, 科学合理的区域重力场及大地水准面精化原则: 采用合适的全球重力位系数模型作为参考重力场和区域外边界约束条件, 控制中长波误差, 在此基础上集成区域及周边观测重力场资源, 以提高区域重力场及大地水准面中短波分量的精度水平, 两者结合实现区域重力场及大地水准面高精度建模。

同理, 对于省级或城市等局部地区, 也应以区域重力场模型为参考重力场, 控制中短波误差累积, 集成局部地区及周边重力场数据, 以区域外参考场为远区边界约束, 提高大地水准面短波超短波的精度水平, 实现局部地区大地水准面的精细建模。因此, 按照大地测量学要求, 区域重力大地水准面精化方案一般应遵循“小区域重力大地水准面精化, 以较大区域重力场模型为参考重力场和远区外边界条件”的逐级控制原则。

水准测量采用高差逐站传递方式, 本质上是实测两水准点间的重力位差, 相对误差原则上与水准路线长度无关。

显然, 对于任一特定区域, 会存在某个空间尺度, 小于该空间尺度时, 两点间重力高程异常差的相对精度会低于 GNSS 水准高程异常差的相对精度。可见, GNSS 水准与重力大地水准面融合算法应能有效整合重力高程异常的高精度中长波成分与 GNSS 水准控制网的高精度短波超短波成分, 而在误差处理方面, 能同时有效抑制短波重力高程异常误差, 控制长距离 GNSS 水准高程异常误差的累积。

此外, 纳入地固参考系和归算到全球高程基准后的 GNSS 水准高程异常, 应能成为一般观测场量, 参与重力场及大地水准面逼近建模。

1.2 重力场外部边值问题的分类及解法

按位理论第一、第二和第三边值问题, 来区分重力场边值问题性质, 难以有效描述边值积分解法的特点。位理论第一边值问题的边界值是引力位(扰动位), 第二边值问题的边界值是扰动重力, 第三边值问题的边界值是空间异常。若边界值为垂线偏差、重力梯度或其他类型扰动重力场量时, 没有对应的位理论边值问题可表达。

考察 Stokes 第三边值问题积分解的推导过程与 Hotine 第二边值问题积分解的推导过程不难发现, 两种位理论边值问题解的推导过程相同。考察同属于位理论第三边值问题的 Stokes 问题和 Molodensky 问题, 两种边值问题积分解的推导过程和解的表现形式存

在显著差异，求解 Molodensky 问题远比求解 Stokes 边值复杂得多。

可见，将外部重力场边值问题按位理论边值问题分类，无法满足地球重力场逼近的理论需要，也难体现重力场边值问题解的性质和特点。

实际上，重力场边值问题的性质主要取决于边界面是否为等位面。观测场量大都以水准面和铅垂线为参考，在测点当地水平坐标系中获取，因而根据边界面是否为等位面，PAGravf4.5 将所有以扰动位在当地水平坐标系中偏导数的线性组合为边值的外部边值问题分成 Stokes 问题和 Molodensky 问题两大类。

将边界面是等位面、边界值为扰动位在当地水平坐标系中偏导数任意线性组合的边值问题统称为 Stokes 问题，将边界面不是等位面、边界值为扰动位偏导数任意线性组合的边值问题统称为 Molodensky 问题。当边界面不是等位面时，可用如下 4 种方式中任一种来求解边值问题。

(1) 将边界面重力场量如空间异常或垂线偏差等解析延拓到与边界面接近的重力等位面上，此时边界面转换为等位面，从而将边值问题变成 Stokes 问题，然后解 Stokes 边值问题。

(2) 对边界面重力场量施加由边界面内法线方向到铅垂线方向的校正，从而将边值问题变成 Stokes 问题。

(3) 在非等位面上直接按积分法解 Molodensky 边值问题。

(4) 按谱域最小二乘逼近法求解 Molodensky 边值问题。

Molodensky 边值问题难以获得严密积分解，考虑到 Stokes 边值问题积分解在计算地面高程异常时同样也可完全避开地形压缩问题，因而建议，重力场边值问题主要采用 Stokes 问题解法，而 Molodensky 边值理论可用于重力场数据向重力等位面的归算处理，以及定量分析非等位面数据处理过程中重力场信息近似的误差影响等。

1.3 重力场逼近的误差分析与精度评定

地球重力场无缝连续地充满于整个地固空间，我们只能用一定分辨率的格网空间平均值来表达重力场量，这是重力场量区别于一般离散点几何大地测量要素的典型特征，重力场逼近的误差分析与质量控制因而没有几何大地控制网误差分析与质量控制那样直观有效。然而，各种重力场量及其相互之间在整个地球外部空间是高度解析相关的，重力场逼近问题本质上是重力场量之间的一维线性变换问题，充分利用重力场的这些性质和特征，可灵活构建形式多样的解析约束条件，丰富重力场建模误差分析与质量控制的内涵与策略。

(1) 观测重力场量误差与目标重力场元精度概念

地球重力场量在地球外部空间或边界面上连续可微，因而观测重力场量虽然在离散点上获取，但在重力场逼近的数学模型中，实际发挥作用的是相应于某种分辨率的观测场量空间平均值，例如空域重力场积分需要积分边界面上格网平均观测场量，谱域观测

场量的观测模型一般截断到某一最大阶数，观测场量也等效于相应分辨率的空间平均值。

同理，地球重力场逼近得到的目标重力场元，也是相应于其有效分辨率的空间平均值，而不是离散点值。例如，重力场逼近求得的 $1' \times 1'$ 扰动重力格网模型，其格网值表达的是 $1' \times 1'$ 格网扰动重力平均值，由谱域基函数展开式（如重力位系数展开式）计算某处目标场元，由于展开式截断到最大阶数，计算结果等效于该处目标场元有效分辨率的空间平均值。

可见，对于重力场逼近目的，观测重力场量误差特指该观测场量相应某一空间分辨率的空间平均值误差，称为观测场量的空间代表性误差，而不是测点处实际观测误差；用于表达逼近解的目标场元，目标场元精度特指该重力场元相应于有效分辨率的空间平均值精度，下称重力场元的空间代表性精度，也不是点值精度。重力场元格网的空间代表性精度取决于重力场逼近精度、空间分辨率与单元格网处局域重力场结构（特别是短波超短波结构）。顾及空间分辨率与重力场空间解析结构，可有效改善目标场元格网的科学应用水平。

观测重力场量的空间代表性误差取决于观测误差、测点空间分布密度和局域重力场空间结构，当观测精度足够时，空间代表性误差主要由测点分布密度和局域重力场结构决定。例如，当测点重力测量精度优于 0.1mGal ， $1' \times 1'$ 扰动重力空间代表性误差为 1mGal 时，则扰动重力空间代表性误差主要由测点分布密度、局域重力场结构和格网化算法性能决定，此时进一步提高测点重力测量精度，对改善观测扰动重力空间代表性误差无效。地面大地测量时代，通常假设重力场的短波超短波结构与地形起伏相关，也将空间代表性误差称为地形代表性误差。

特别地，重力场量的空间分辨率，不是简单的几何图像像素平均，其代表性与局域重力场结构相关，即相同空间分辨率在重力场结构简单的地区代表性强，而在重力场结构复杂地区的代表性弱。任一空间分辨率任意类型的重力场量格网，单元格网重力场量之间都蕴含着丰富的空间解析函数关系，因而其所含的重力场信息量，要比其几何分辨率丰富得多。

(2) 重力场逼近的误差分析与精度评定理论基础

地球重力场逼近是地球重力场线性空间中自由度为 1 的一维线性变换，不同空间位置上同一类型重力场量之间、不同类型重力场量之间以及不同位置上各种类型重力场量之间都是函数相关的，能用空域重力场积分公式或谱域参数化基函数级数形式解析表达，因此，地球重力场信息（信号）是高度解析的，重力场的高度解析性质在整个地球外部空间中无处不在。科学有效地利用重力场高度解析的典型地球物理特性，可从强观测噪声环境中有效提取微弱重力场信号。这是地球重力场逼近问题区别于一般几何大地测量学问题的显著特征。例如，卫星重力场探测方法可从信噪比小于 10^{-3} 的强噪声环境中有效提取重力场信号。

当按空域积分法逼近重力场时，原则上有两类方案可用于分析局部重力场建模的精度水平。第一类方案直接基于其数学模型即重力场积分公式。首先，需估计边界面上被积观测场量格网（如 Stokes 公式中空间异常格网）的空间代表性误差，包括由实际离散观测量获得边界面上被积观测场量格网过程中的各种引入误差；然后，由重力场积分公式导出误差传播公式，忽略参考重力场模型误差影响，估计目标场元的空间代表性精度。

第二类方案基于重力场量之间解析函数关系。①构造以目标场元为被积场量，目标场元所在面为边界面，以离散点实际观测场量为被积场量的重力场积分算法；②按重力场积分法，计算测点上观测场量的积分值，统计分析积分值（具有空间代表性精度）与观测场量（实测精度，参考真值）差异，获得观测场量的空间代表性误差；③由观测场量的空间代表性误差按照第一类方案，估计目标场元的空间代表性精度。

第二类方案统计出的观测场量空间代表性误差，以实际观测场量为参考真值，而实际观测场量都是全波段的，故空间代表性误差也必然是全波段的，因此，第③步一般无需考虑参考重力场模型误差影响，而第②步获得观测场量空间代表性误差的过程，就是观测误差分析流程。

当按多种观测场量谱域最小二乘法逼近重力场时，如全球重力位系数模型构建或区域 SRBF 重力场逼近，可直接依据重力场逼近数学模型，在最小二乘框架中实现全空间全要素观测场量误差分析、谱域系数（位系数或 SRBF 系数）与目标场元精度评定。

①由重力场逼近获得的谱域系数估计值，按谱域级数展开式，分别计算测点上每种观测场量的估计值，并统计分析估计值（具有空间代表性精度）与观测场量（实测精度，参考真值）差异，获得每种观测场量的空间代表性误差；

②由谱域最小二乘法重力场逼近数学模型，导出误差传播算法公式；

③由各种观测场量的空间代表性误差，按误差传播算法计算全部谱域系数精度和目标场元的空间代表性精度。

1.4 重力场观测与逼近性能外部测评方法

（1）重力场积分法观测场量外部精度指标测定与建模精度评估

首先，选择实测重力场量，如航空重力测线或地面离散分布重力测点等，由逼近后的重力场数值模型，按相应的重力场逼近算法，计算测线或地面测点处的模型值；第二步，统计模型值与观测量（参考真值）之差，计算其标准差，作为观测量空间代表性误差。第三步，按积分法重力场建模精度评定方案，分别选择合适的重力场积分算法，由观测量空间代表性误差，按误差传播定律导出各种重力场元模型精度评定算法，评价全要素重力场模型的空间代表性精度。

（2）谱域最小二乘法观测场量外部精度指标测定与建模精度评估

类似地，首先选择实测重力场量，如航空重力测线或地面离散分布重力测点等，由逼近后的谱域系数模型（位系数或 SRBF 系数），直接计算测线或地面测点处的模型值；

第二步，统计模型值与观测量（参考真值）之差，计算其标准差，作为观测量空间代表性误差。第三步，按谱域最小二乘法逼近法数学模型，导出谱域系数误差传播算法公式，并由观测量空间代表性误差，估计谱域系数精度指标；第四步，由重力场元的谱系数级数形式，按误差传播定律导出全要素重力场元模型精度评定算法，评价全要素重力场模型的空间代表性精度。

(3) 重力场测量仪器设备的外部精度指标测定一般方案

由第 1.3 节的空间代表性误差结构可知，由上述两种方法推估的航空测线重力或地面点重力的观测量空间代表性误差，一定大于航空测线重力或地面点重力的实测误差，因而按上述两种方法可推估出航空重力或地面重力测量设备的最低重力测量精度水平。

由观测量空间代表性误差计算流程可以看出，各种大地测量技术测量的任意类型观测重力场量，如地面垂线偏差测量或重力梯度测量、航空重力向量或航空重力梯度、GNSS 水准实测高程异常、卫星测高垂线偏差测量等，都可采用上述两种方法，有效测定其实测误差的最大值，即观测量的空间代表性误差。特别地，这种方法对实测数据的数量和空间分布没有太多要求，易于制定灵活便捷的质量检测方案。

利用重力场逼近方法，可有效测定空天地海任意类型观测重力场量的空间代表性误差，却无法确定测量设备的直接测量精度指标，重力场逼近方法只能给出实际设备测量误差的上限。然而，对于重力场逼近目的，设备直接测量精度与重力场建模水平没有直接关系，对重力场建模水平起重要作用的主要是观测量的空间代表性误差。