高程系统及高程基准理念与概念更新

PAGravf4.5，章传银

高程的本质是地球重力位（差）。大地测量学中的高程是地球重力场空间中的重力位数在地固坐标参考系中的几何近似表达，以方便人们利用重力场环境和性质来解决有关地球科学和工程实际问题。若将大地水准面重力位W_G选为起算基准常数，则地面点重力位数就代表了该点相对于大地水准面的重力势能，这是一种具有物理意义的“物理高程”，是自然客观的重力场量，对应的高程系统是物理意义上的，称重力位数系统。

11.1 高程系统的严密大地测量学定义

定义几何高程时应满足的一些基本条件：①点的高程应该是单值的（唯一性）；②为了不偏离观测高程太大，归算改正数应当很小，局部地区低等级水准测量时可以忽略；③同一水准面上各点的高程应尽可能地接近相等。

地面点的高程是按大地测量学的唯一性和可测性要求（这是一般大地测量要素的约束性要求）对其重力位（数）的几何定量表达，两地面点的高差是两点重力位差在地固坐标参考系中的具体几何实现。大地测量高程通常有正高和正常高两种形式，正（常）高是地固坐标参考系中的几何量，也称“几何高程”。

设地面点 A 的重力位为W_A，Q 点与 A 点经纬度相同，Q 点正常重力位U_Q等于 A 点重力位 W_A，则由重力场原理可知，QA 是 A 点高程异常ζ_A，如图 9 所示。显然，凡在图 9 中能标注的大地测量要素，都默认了应属于同一个地固参考系，且几何度量尺度统一，图中箭头表示度量方向。可见，地固参考系理论是现代高程系统及高程基准不可或缺的重要支撑，大地测量高程是在地固坐标参考系中按重力场理论定义的。

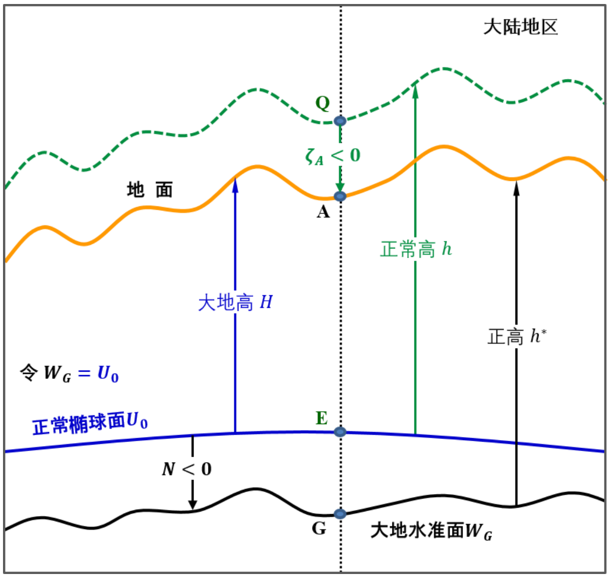

图 9 地固参考系中大地高、正（常）高与大地水准面高的几何度量关系

（1）正高系统的物理大地测量学定义

正高定义为地面点 A 的重力位数c_A与 A 到大地水准面 G 之间平均重力$\bar{g}_A$的比值

$$h_A^* = \frac{W_G - W_A}{\bar{g}_A} = \frac{c_A}{\bar{g}_A} \tag{11.1}$$

而平均重力$\bar{g}_A$的物理学定义为

$$\bar{g}_A = \frac{1}{h_A^*}\int_0^{h^*} g(h)dh \tag{11.2}$$

式中：dh为地面到大地水准面之间的积分线元。假设地面点到大地水准面间的地壳密度ρ为常数，可采用珀雷归算（Prey reduction）公式计算平均重力

$$\bar{g}_A = g_A - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma}{\partial h} + 2\pi G\rho\right) h_A^* \tag{11.3}$$

式中：g_A为地面点 A 的实测重力；G为万有引力常数；$\partial\gamma/\partial h$为正常重力梯度。按式（11.3）计算平均重力$\bar{g}_A$后得到的正高为 Helmert 正高。

平均重力$\bar{g}$为常数，因而地面点的正高h^*与积分路径无关，能唯一确定，不具有多值性，是满足唯一性和可测性要求的大地测量要素，可用来表示地面点的几何高程。

（2）正常高系统物理大地测量学定义

正常高定义为 Q 的正常重力位数$(= U_0 - U_Q)$与 Q 到正常椭球面 E 之间平均正常重力$\bar{\gamma}_Q$的比值

$$h_A = \frac{U_0 - U_Q}{\bar{\gamma}_Q} \tag{11.4}$$

由 Molodensky 条件，Q 点正常重力位数等于 A 点重力位数，即$U_0 - U_A = c_A = W_G - W_A$，将其代入式（11.4），就是 Molodensky 正常高

$$h_A = \frac{U_0 - U_Q}{\bar{\gamma}_Q} = \frac{W_G - W_A}{\bar{\gamma}_Q} = \frac{c_A}{\bar{\gamma}_Q} \tag{11.5}$$

式中：$\bar{\gamma}_Q$也称 Molodensky 平均正常重力。由于$W_G = U_0$，因此有

$$U_Q = W_A \tag{11.6}$$

可见，地面点 A 的重力位等于 Q 点正常重力位，如图 9。中国目前的正常高系统即为式（11.5）定义的 Molodensky 正常高系统。

值得强调的是，这里的 Molodensky 条件，完全不涉及 Molodensky 边值问题，而是布隆斯公式在 A 点的几何实现。类似地，Molodensky 平均正常重力$\bar{\gamma}_Q$为常数，因而地面点的正常高h与积分路径无关，能唯一确定，不具有多值性，也是满足唯一性和可测性要求的大地测量要素，也可用来表示地面点的几何高程。

正高定义式（11.1）和正常高定义式（11.5）明确规定，大地测量几何高程的起算基准值都是约定且唯一不变的大地水准面重力位常数W_G，这是几何高程定义的大地测量学约束性要求，而由重力场逼近理论可知，大地水准面（高）只是由约定的大地水准面重力位W_G和重力场观测数据，在地固坐标参考系中的几何实现。

11.2 正高与正常高之间解析函数关系

高程是重力位（数）在地固坐标参考系中的几何表达，两点之间的高差是其重力位差在地球空间的几何表达。正（常）高在地固坐标参考系中客观唯一且精密可测，都是满足唯一性和可测性要求的大地测量要素。

地面点的大地高（椭球）H等于地面点正高h^*与大地水准面（椭球）高N之和，也等于地面点正常高h与该点高程异常ζ之和

$$H = h^* + N = h + \zeta \tag{11.7}$$

式（11.7）是GNSS代替水准测量，由N（或ζ）测定地面点正高h^*（或正常高h）的大地测量学依据。由式（11.7）得，地面点的正高与正常高之差为

$$h^* - h = \zeta - N = \Delta\zeta \tag{11.8}$$

可见，任意地面点的正高h^*与正常高h之差，等于该点高程异常ζ与大地水准面高N之差$\Delta\zeta$。

Stokes 边值问题积分解是大地水准面及其外部整个地球空间的扰动位（Hofmann，2006），可同时确定大地水准面高N及外部高程异常ζ（广义 Stokes 公式）。特别地，Stoke 边值问题积分解约束了ζ与N之间的解析函数关系（章传银，2017）

$$\zeta = N + \Delta\zeta = N + \int_0^{h^*} \frac{\partial\zeta}{\partial h} dh = N - \int_0^{h^*} \frac{\delta g}{\gamma} dh \tag{11.9}$$

式中：δg、γ分别为线元dh处的扰动重力和正常重力。

11.3 大地水准面为零高程面的适用性

正（常）高在地固参考系中用重力场理论定义，是具有唯一性和可测性的大地测量要素，然而其代表的物理意义（重力位数）只能是近似的，这是正（常）高大地测量学定义的固有性质。

（1）高程起算面唯一性的大地测量学依据

若地面点 A 的正常高等于零$h_A = 0$，由正常高定义式（11.5）得

$$h_A = \frac{U_0 - U_Q}{\bar{\gamma}_Q} = \frac{W_G - W_A}{\bar{\gamma}_Q} = \frac{c_A}{\bar{\gamma}_Q} = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_A = 0, \quad W_A = W_G \tag{11.10}$$

式（11.10）表明，A 点的重力位数等于零$c_A = 0$，且 A 的重力位W_A等于大地水准面重力位常数W_G，因此正常高等于零的点在大地水准面上。

将式（11.10）中的$c_A = 0$或$W_A = W_G$代入正高定义式（11.1）得

$$h_A^* = \frac{W_G - W_A}{\bar{g}_A} = \frac{c_A}{\bar{g}_A} = \frac{0}{\bar{g}_A} = 0 \tag{11.11}$$

式（11.11）表明，A 点的正高也等于零$h_A^* = 0$。

联合式（11.10）和式（11.11）表明，正常高为零的地面点，正高和重力位数都等于零，其重力位等于大地水准面重力位常数，该地面点一定在大地水准面上。可见，零正高面、零正常高面、零重力位数面与大地水准面重合，其重力位恒等于大地水准面重力位常数W_G。

综上所述，无论是正高系统、正常高系统，还是重力位数系统，高程起算面都是（全球或区域）大地水准面（章传银，2017）。

（2）大地水准面重力位性质及基准性分析

正（常）高定义[式（11.1）和式（11.5）]是解释高程基准和几何高程性质的唯一大地测量学理论依据。水准测量高差改正数公式依据正（常）高定义式推导，高程起算基准的性质同样也只能依据正（常）高定义式给出直观解释，否则容易导致认识上错误。

大地测量高程系统的定义式可统一表示为

$$h = \frac{W_G - W}{g} = \frac{c}{g} \tag{11.12}$$

当g为地面点到大地水准面之间的平均重力时，式（11.12）为正高系统定义；当g为 Molodensky 平均正常重力时，式（11.12）为 Molodensky 正常高系统定义；当$g = 1$式，式（11.12）即为重力位数系统。

起算基准唯一且不随时间变化，是整个大地测量学科的限制性要求。考察高程系统定义式（11.12），$g \neq 0$，地面点的重力位W是确定（或表达）其正（常）高的唯一自变量，而大地水准面重力位W_G是事先约定的不变常数值。因此，高程系统定义式（11.12）限制了只有约定的W_G才是正（常）高系统唯一不变的起算基准常数。

（3）大地水准面几何形变的定义

任意地面点的高程客观存在，由其重力位数唯一定义。对于时刻形变着的地球，重力位W客观上随地球内部质量重新分布而变化，从而导致任意点的重力位数或几何高程随时间变化。地球形变直接引起两个历元时刻重力位的空间分布不同，导致地固坐标参考系中重力位等于W_G的大地水准面高在两个历元时刻存在差异，这种差异就是大地水准面（的几何）形变。

（4）传统高程基准及起算值的性质

大地水准面通常被选为高程起算面，根据高斯（Gauss-Listing）定义，它是与全球平均海面最为吻合的重力等位面。传统地面大地测量时代，高程基准实现与地面点正（常）高测定主要基于水准测量原理。零高程可选为基本验潮站处的平均海面，并约定过高程零点的重力等位面为（区域）大地水准面。人们通过水准测量传递高差，以测定水准网点的正（常）高，从而获得（区域）大地水准面相对于水准网点的位置，实现高程基准。那时无需知晓高程零点（或大地水准面）的重力位，选定的高程零点显然没有精度和历元概念。这表明，高程零点（基本验潮站处的高程起算面）在选择时可有一定灵活性，具有约定性质，然而一旦选定，要用水准原点网来维持零高程（水准原点高程）的长期（如 20 年）不变性，以维护高程基准的唯一性。

11.4 似大地水准面作为基准面的问题

传统物理大地测量学中，将椭球高等于地面高程异常的地球封闭曲面称为似大地水准面，并将似大地水准面看作正常高的起算基准面，然而这种认识与正常高定义式

（11.5）矛盾。一方面，零正常高面的重力位数等于零，零正常高面就是大地水准面，而不是所谓的似大地水准面。另一方面，经纬度相同、高度不等的两个点，高程异常不相等，若认为正常高由似大地水准面起算，则在垂直方向就必须有两个不重合的起算点，正常高系统的唯一性不成立。

通常情况下，实际测点不会正好落在地面高程异常模型构建（或确定）时所选择的特定地面数字高程模型面上，在厘米级水平的高程基准应用中，需要对地面高程异常模型，增加一项随高度变化的高程异常梯度（或扰动重力）改正$\delta\zeta$（章传银，2017）

$$\zeta = \zeta_0 + \delta\zeta = \zeta_0 + \int_{h_0}^{h} \frac{\partial\zeta}{\partial h} dh = \zeta_0 - \int_{h_0}^{h} \frac{\delta g}{\gamma} dh = \zeta_0 - \left[\frac{\delta g}{\gamma}\right](h - h_0) \quad (11.13)$$

式中：ζ为实际测点高度处的高程异常，h为测点的高度；ζ_0为由地面高程异常模型内插至测点处的高程异常；h_0为由数字地面高程模型内插至测点处的地面高度；$\delta g, \gamma$分别为实际测点到地面数字高程模型面间流动点的扰动重力和正常重力，[·]为平均值运算。

例如，若用 1′×1′地面高程异常模型表达似大地水准面成果，则在中国大陆西部地区，式（11.13）中的改正$\delta\zeta$有时可达分米量级。可见，虽然正常高系统定义科学严密，但在分米级精度要求下，将似大地水准面作为起算基准面，既不满足大地测量学基准性要求，也与正常高定义式（11.5）矛盾。PAGravf4.5 因此全面淡化似大地水准面以及与之关联的概念和知识。

11.5 高程系统的几何性质与概念更新

无论是正高还是正常高系统，都是在地固参考系中用重力场理论定义的。考察解析正高系统，设近地空间有两个解析正高分别为h_1'和h_2'的等正高面，即$\Delta h_{12}' = h_2' - h_1' = C \neq 0$，为常数，由式（11.7）可得这两个等正高面的椭球高差ΔH_{12}为

$$\Delta H_{12} = H_2 - H_1 = (h_2' + N) - (h_1' + N) = h_2' - h_1' = \Delta h_{12}' = C \quad (11.14)$$

式（11.14）表明，两个等正高面的椭球高差等于其正高高差，$\Delta H_{12} = \Delta h_{21}'$，由此可得等正高面在地固参考系中相互平行，与大地水准面高N无关。

可见，局域范围内所有等正高面与大地水准面平行，等正高面与大地水准面具有相同的几何形状。由此推论，正高为地面点到大地水准面沿垂直于大地水准面的直线距离高度。还可直接推论，平均重力定义式（11.2）中的积分路线是直线。

受垂线偏差和弯曲正常重力线影响，铅垂线是不规则曲线，地面到大地水准面间的铅垂线长度大于直线距离。习惯上将正高看成是地面点沿铅垂线到大地水准面的不规则曲线长度，这种认识没有大地测量学依据，是错误的。

地球外部不存在平行的全球封闭曲面，大地水准面与等正高面只在无穷小的局域空间平行，正高因此具有典型的局域性质。

正常高是具备唯一性与可测性的大地测量要素，然而由于高程异常随高度不同而不相等，等正常高面在地固参考系中并不严格平行。高程异常信号随高度增加衰减，因此，等正常高面的几何形状，相对于大地水准面的几何形状，随高度增加会越来越平滑。

不难发现，等正高面与大地水准面平行，正高系统具有更直观的几何度量性质；等正常高面随高度增加越来越平滑，这表明正常高系统更接近重力场性质。可见，正高系统和正常高系统，分别有各自的优势、不足和科学应用，都有存在的必要性和科学性。

11.6 大地水准面、全球大地位与正常重力场

依据高斯定义，大地水准面是与全球平均海面最佳吻合的重力等位面，这本质上是一种人为约定。高斯大地水准面的重力位称为地球重力位常数，又称全球大地位W_0。

大地水准面是重力位约定为常数W_0的特定重力等位面，它在地固参考系中表达为大地水准面的大地（椭球）高即大地水准面高。因而计算大地水准面高之前，需要事先指定（约定）正常椭球，且要求正常椭球面的正常重力位$U_0 = W_0$。

在表达正常重力场的正常椭球四个常数中，地心引力常数GM和地球自转平均角速度ω是实测量；另外两个常数，一个是地球长半轴a，另一个可从地球力学形状因子J_2、椭球面正常重力位U_0或椭球几何扁率f中选择一个。后两个常数中，需要约定其中一个常数值后，另一个常数才具有可测性。

与重力大地水准面解析一致的全球大地位W_0实现原理。先由最佳全球重力位系模型，联合全球平均海面高模型，按高斯大地水准面约定原则，估计地球长半轴a，再由全球位系模型的实测位系数$\bar{C}_{20}$（与a协调一致），联合GM和ω，构成地球正常椭球四个基本常数，从而解析计算正常椭球面的正常重力位U_0，最后将U_0约定为全球大地位常量$W_0 = U_0$，从而科学实现$W_0 = U_0 = W_G$。

重力场量位系数展开式指出，确定或表达整个外部重力场，无需知道或事先约定大地水准面重力位，更无需事先知道大地水准面形状。大地水准面可在外部重力位完全确定后，由其约定的常数值W_0，在地固坐标参考系中直接表达（如工程放样）。

正常重力场与全球大地位W_0都具有约定性质。具有约定性质的大地测量要素，一旦约定其常数值，应在较长时期（如 20 年）内唯一不变，不随时间变化，以保证与其关联的地球重力场量的唯一性和相互之间关系的解析相容性。

具有约定性质的正常重力场和大地水准面重力位（全球大地位）均不存在地形影响、潮汐效应和负荷形变效应问题，无误差概念和无历元概念，这是大地测量学基准性的约束性要求。

11.7 解析大地水准面与解析正高概念

受地形密度近似和地形质量调整方式假设影响，地形质量调整后的所谓“真实”大地水准面，在大陆山区的不确定性可达分米级，在厘米级精度水平上不满足大地测量要素的唯一性和可测性限制性要求，经地形调整后的大地水准面高在计量学上无定义，因而不是科学有效的大地测量要素，既无法精密测定，也没有精度概念。

为解决这一理论问题，PAGravf4.5 引入解析大地水准面概念，替换以往各种大地水准面概念，使其满足唯一性和可测性约束性要求，而能成为有效的大地测量要素，从而

维持高程基准概念、高程系统定义与重力场逼近理论的科学严密性。

PAGravf4.5 将地形质量按某种方式调整到大地水准面内部，且地形质量调整前后，整个地面及地球外部空间（或地球外部任一封闭曲面）的重力位（扰动位）处处相等，这种情况下解算的大地水准面高，就是解析大地水准面。解析大地水准面高，是地面或地球外部高程异常的解析延拓解，解析大地水准面高与高程异常之间具有严密的解析函数关系和 Possion 积分关系，满足 GNSS 代替水准测量的技术要求。

PAGravf4.5 通过维持大地水准面解的唯一性和可测性，能有效深度融合卫星重力、重力场位系数模型和区域重力场数据，严格在重力场理论框架中实现重力场及大地水准面的高精度解析逼近。

由于地面点到大地水准面之间的地壳密度不能精准获得，Helmert 正高存在不确定性。当点位下方没有被地形质量填充时，平均重力计算不严密，因而 Helmert 正高不是唯一可测的。在厘米级精度水平上，Helmert 正高不是满足唯一性要求的大地测量要素，也不满足 GNSS 代替水准测量的基准性条件。PAGravf4.5 令地面到大地水准面间流动点的重力等于外部重力场解析延拓到流动点的重力值（解析重力），而平均重力等于流动点解析重力的几何平均值，由此得到的正高为解析正高。

解析正高无需地壳密度假设，其平均重力能由最新重力场数据不断精化。从大地测量要素的唯一性和精密可测性上考察，解析正高比其他类型正高更适合高程基准目的。不同于 Helmert 正高，解析正高和正常高都严格满足 GNSS 代替水准测量的基准性条件，相互之间还具有严密的重力场解析函数关系，都可直接推广应用于月球和类地行星。

经简单计算，全球地面点的解析正高与正常高在数值上更为接近，与 Helmert 正高在 3000m 高度上相差约 60cm。