

负荷格林函数与负荷效应空域积分算法

E TideLoad4.5, 章传银

负荷格林函数定义为单位点质量负荷变化 (kg/m^2) 的响应函数, 而大地测量要素的地面负荷效应, 等于负荷格林函数与地面负荷面密度 $\sigma_w (= \rho_w h_w)$ 在全球地面上的卷积。一般地, 类似于地球重力场理论中的 Stokes 积分公式, 地面计算点处 (θ, λ) , 任意类型大地测量要素的负荷形变效应 $F(\theta, \lambda)$, 可用球近似下负荷格林函数积分表示为

$$F(\theta, \lambda) = R^2 \rho_w \iint_{\sigma} h_w G(\psi) d\sigma \quad (3.1)$$

式中: σ 为单位球面, R 为地球平均半径; ψ 为地面负荷流动面元 $d\sigma$ 到地面计算点 (θ, λ) 的球面角距, $G(\psi)$ 是以球面角距 ψ 为自变量的负荷格林函数, 其形式与计算类型有关。将负荷格林函数积分 $F(\theta, \lambda)$ 拆分成两个部分, 第一部分为负荷的直接影响, 第二部分为负荷的间接影响。

$$F(\theta, \lambda) = F^d(\theta, \lambda) + R^2 \rho_w \iint_{\sigma} h_w G^i(\psi) d\sigma \quad (3.2)$$

式中: (θ, λ) 为地面计算点的球坐标; $F^d(\theta, \lambda)$ 为地面计算点处负荷效应的直接影响, 可由负荷等效水高按严密积分计算; $G^i(\psi)$ 称为负荷间接影响格林函数。

8.3.1 地面要素负荷直接影响积分

(1) 地面重力位直接影响积分

已知地面负荷等效水高变化 h_w , 则负荷变化对计算点 (θ, λ, r) 处的重力位直接影响 V^d , 可按万有引力公式计算:

$$V^d(\theta, \lambda, r) = G \rho_w \iint_S \frac{h_w}{L} dS, \quad L = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi} \quad (3.3)$$

式中: L 为计算点 (θ, λ, r) 与地面负荷流动点 (θ', λ', r') 之间的空间距离; $dS = R^2 d\sigma$ 为地面负荷流动积分面元; ψ 为地面流动点 (θ', λ', r') 到计算点 (θ, λ, r) 的球面角距, 有

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda' - \lambda), \\ \sin \psi &= \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' \cos(\lambda' - \lambda) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \sin \psi \cos \alpha &= \sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta' \cos(\lambda' - \lambda), \\ \sin \psi \sin \alpha &= \sin \theta' \sin(\lambda' - \lambda) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta'} = \cos \alpha, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\sin \alpha \sin \theta \quad (3.6)$$

其中, α 为 ψ 的大地方位角。顾及 $d\sigma = \psi d\psi d\alpha$, 在地面, 当计算点与流动点重合时, 有

$$L = r\psi, \quad r - r' \cos \psi = r\psi^2/2 \quad (3.7)$$

$$A = dS = r^2 \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_0^{\psi_0} \psi d\psi d\alpha = \pi r^2 \psi_0^2 \rightarrow \psi_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (3.8)$$

式中：\$A = dS\$为地面负荷所在的流动积分面元的面积。此时，积分 (3.3) 式在地面计算点处奇异，由 (3.7) 和 (3.8) 式，可得积分奇异值为

$$V_d^0(\theta, \lambda, r) = G\rho_w r^2 \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_0^{\psi_0} \frac{h_w}{r\psi} \psi d\psi d\alpha = 2\pi G\rho_w h_w r \psi_0 \quad (3.9)$$

(2) 地面扰动重力直接影响积分

按照扰动重力定义，由 (3.3) 式得地面及地球外部计算点\$(r, \theta, \lambda)\$处的扰动重力直接影响为

$$\delta g^d(\theta, \lambda, r) = -\frac{\partial V^d(r, \theta, \lambda)}{\partial r} = -G\rho_w \iint_S h_w \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{L} \right) dS = G\rho_w \iint_S h_w \frac{r-r' \cos\psi}{L^3} dS \quad (3.10)$$

在地面上，当计算点与流动点重合时，积分 (3.10) 奇异，该积分面元处的奇异值为

$$\delta g_0^d(\theta, \lambda, r) = 2\pi G\rho_w h_w \int_0^{\psi_0} \frac{\psi^2/2}{\psi^3} \psi d\psi = \pi G\rho_w h_w \psi_0 \quad (3.11)$$

(3) 地面垂线偏差直接影响积分

根据垂线偏差定义，由 (3.3) 式得，计算点\$(\theta, \lambda, r)\$处的垂线偏差直接影响：

$$\theta^d(\theta, \lambda, r) = \frac{1}{\gamma r} \frac{\partial V^d(r, \theta, \lambda)}{\partial \psi} = \frac{G\rho_w}{\gamma r} \iint_S h_w \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{L} \right) dS = -\frac{G\rho_w}{\gamma} \iint_S h_w r' \frac{\sin\psi}{L^3} dS \quad (3.12)$$

$$\xi^d(\theta, \lambda, r) = \theta^d(\theta, \lambda, r) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{G\rho_w}{\gamma} \iint_S h_w r' \frac{\sin\psi}{L^3} \cos\alpha dS,$$

$$\eta^d(\theta, \lambda, r) = -\theta^d(\theta, \lambda, r) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\frac{G\rho_w}{\gamma} \sin\theta \iint_S h_w r' \frac{\sin\psi}{L^3} \sin\alpha dS \quad (3.13)$$

式中：\$\theta^d(r, \theta, \lambda)\$为计算点处总垂线偏差的直接影响。

8.3.2 负荷间接影响格林函数积分

将负荷球谐系数\$\{\Delta\bar{C}_{nm}^w, \Delta\bar{S}_{nm}^w\}\$代入式 (2.7)，可得重力位负荷效应间接影响\$\Delta V^i(\theta, \lambda, r)\$为

$$\Delta V^i = \frac{GM}{r} \frac{3\rho_w}{\rho_e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k'_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm}^w \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm}^w \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (3.14)$$

令\$\mathbf{e} = (\theta, \lambda)\$为单位球面上的点坐标，将 (3.14) 式用规格化面球基函数\$\{\bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) = \bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda)\}\$的线性组合表示为

$$\Delta V^i(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{r} \frac{3\rho_w}{\rho_e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k'_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{F}_{nm}^w \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \quad (3.15)$$

其中：\$\bar{F}_{nm}^w = \Delta\bar{C}_{nm}^w, m \geq 0\$；\$\bar{F}_{nm}^w = \Delta\bar{S}_{n|m|}^w, m < 0\$。令

$$Y_n^w(\mathbf{e}) = \sum_{m=-n}^n \bar{F}_{nm}^w \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \quad (3.16)$$

则 (3.15) 式可表示为

$$\Delta V^i(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{r} \frac{3\rho_w}{\rho_e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k'_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n Y_n^w(\mathbf{e}) \quad (3.17)$$

将地面负荷等效水高球谐展开式 (2.3) 也用规格化面球基函数 $\{\bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) = \bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda)\}$ 的线性组合表示为

$$\begin{aligned} h_w(\theta, \lambda, r \approx R) &= h_w(\mathbf{e}) = R \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{R}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{F}_{nm}^w \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \\ &= R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{F}_{nm}^w \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) = a \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^w(\mathbf{e}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

依据球函数展开理论, 由 (3.17) 式得

$$Y_n^w(\mathbf{e}) = \frac{2n+1}{4\pi a} \iint_{\sigma} h_w(\mathbf{e}') P_n(\psi) d\sigma \quad (3.19)$$

式中: ψ 为球面流动面元 \mathbf{e}' 到计算点 \mathbf{e} 的球面角距。

顾及 $dS = R^2 d\sigma$, 将 (3.19) 代入 (3.18) 式, 并交换求和与积分号, 得

$$\begin{aligned} \Delta V^i(\theta, \lambda, r) &= \frac{1}{R^2} \iint_S \rho_w h_w(\mathbf{e}') \frac{GM}{4\pi r a} \frac{3}{\rho_e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n k'_n P_n(\psi) dS \\ &= \rho_w \iint_S h_w(\mathbf{e}') G_V^i(\psi) dS \end{aligned} \quad (3.20)$$

其中,
$$G_V^i(\psi) = \frac{GM}{4\pi R^2 r a} \frac{3}{\rho_e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n k'_n P_n(\psi) \quad (3.21)$$

即为重力位负荷间接影响格林函数的一般形式。

当计算点也位于地面, 即 $r \approx a \approx R$ (R 为地球平均半径), 顾及地球总质量 $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_e$, 则 (3.21) 式简化为

$$G_V^i(\psi) = \frac{GM}{4\pi R^4} \frac{3}{\rho_e} \sum_{n=0}^{\infty} k'_n P_n(\psi) = \frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} k'_n P_n(\psi) \quad (3.22)$$

式 (3.22) 为实用的地面重力位负荷间接影响格林函数, 表示地表单位点质量负荷 (kg/m^2) 对地面重力位的间接影响。

(1) 类似地, 可得地面高程异常负荷间接影响格林函数为

$$G_{\zeta}^i(\psi) = \frac{R}{M} \sum_{n=0}^{\infty} k'_n P_n(\psi) \quad (3.23)$$

(2) 地面重力负荷间接影响格林函数为 \odot

$$G_g^i(\psi) = \frac{g_0}{M} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{2}{n} h'_n - \frac{n+1}{n} k'_n\right) P_n(\psi) \quad (3.24)$$

式中: $g_0 = GM/R^2$ 。

(3) 扰动重力负荷间接影响格林函数为

$$G_{\delta g}^i(\psi) = -\frac{g_0}{M} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) k'_n P_n(\psi) \quad (3.25)$$

(4) 地倾斜负荷间接影响格林函数 \odot

$$G_t^i(\psi) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{\infty} (k'_n - h'_n) \frac{\partial P_n(\psi)}{\partial \psi} \quad (3.26)$$

(5) 地面垂线偏差负荷间接影响格林函数为

$$G_{\theta}^i(\psi) = -\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{\infty} k'_n \frac{\partial P_n(\psi)}{\partial \psi} \quad (3.27)$$

(6) 地面站点水平位移格林函数 \odot

$$G_l^i(\psi) = \frac{R}{M} \sum_{n=0}^{\infty} l'_n \frac{\partial P_n(\psi)}{\partial \psi} \quad (3.28)$$

(7) 地面站点径向位移格林函数为 \odot

$$G_r^i(\psi) = \frac{R}{M} \sum_{n=0}^{\infty} h'_n \frac{\partial P_n(\psi)}{\partial \psi} \quad (3.29)$$

(8) 扰动重力梯度负荷间接影响格林函数为

$$G_{V_{rr}}^i = \frac{g_0}{RM} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) k'_n P_n(\psi) \quad (3.30)$$

(9) 水平重力梯度负荷间接影响格林函数为

$$G_{V_{ss}}^i(\psi) = \frac{g_0}{RM} \sum_{n=0}^{\infty} k'_n \frac{\partial^2 P_n(\psi)}{\partial \psi^2} \quad (3.31)$$

郭俊义 (2001) 进一步导出了地面点负荷格林函数的渐进公式, 以抑制高阶负荷格林函数的振荡性。取其中负荷间接影响格林函数如下:

$$G_{\zeta}^i(\psi) = \frac{R}{M} \frac{k'_{\infty}}{2 \sin \frac{\psi}{2}} + \frac{R}{M} \sum_{n=0}^{\infty} (k'_n - k'_{\infty}) P_n(\psi) \quad (3.32)$$

$$G_g^i(\psi) = -\frac{g_0}{M} \frac{k'_{\infty} - 2h'_{\infty}}{2 \sin \frac{\psi}{2}} - \frac{g_0}{M} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)k'_n - k'_{\infty} - 2(h'_n - h'_{\infty})] P_n(\psi) \quad (3.33)$$

$$G_{\delta g}^i(\psi) = -\frac{g_0}{M} \frac{k'_{\infty}}{2 \sin \frac{\psi}{2}} - \frac{g_0}{M} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)k'_n - k'_{\infty}] P_n(\psi) \quad (3.34)$$

$$G_t^i(\psi) = -\frac{1}{M} \frac{h'_{\infty} \cos \frac{\psi}{2}}{4 \sin^2 \frac{\psi}{2}} + \frac{1}{M} \frac{k'_{\infty} \cos \frac{\psi}{2} (1+2 \sin \frac{\psi}{2})}{2 \sin \frac{\psi}{2} (1+\sin \frac{\psi}{2})} - \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \left(k'_n - \frac{k'_{\infty}}{n} - h'_n + h'_{\infty} \right) \frac{\partial P_n(\psi)}{\partial \psi} \quad (3.35)$$

$$G_{\theta}^i(\psi) = \frac{1}{M} \frac{k'_{\infty} \cos \frac{\psi}{2} (1+2 \sin \frac{\psi}{2})}{2 \sin \frac{\psi}{2} (1+\sin \frac{\psi}{2})} - \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \left(k'_n - \frac{k'_{\infty}}{n} \right) \frac{\partial P_n(\psi)}{\partial \psi} \quad (3.36)$$

$$G_l^i(\psi) = -\frac{R}{M} \frac{l'_{\infty} \cos \frac{\psi}{2} (1+2 \sin \frac{\psi}{2})}{2 \sin \frac{\psi}{2} (1+\sin \frac{\psi}{2})} + \frac{R}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \left(l'_n - \frac{l'_{\infty}}{n} \right) \frac{\partial P_n(\psi)}{\partial \psi} \quad (3.37)$$

$$G_r(\psi) = \frac{R}{M} \frac{h'_\infty}{2\sin\frac{\psi}{2}} + \frac{a}{M} \sum_{n=0}^{\infty} (h'_n - h'_\infty) P_n(\psi) \quad (3.38)$$

各种大地测量要素（观测量或参数）的负荷形变效应，等于其负荷直接影响积分与负荷间接影响格林函数积分之和。这里将负荷直接影响积分与负荷间接影响格林函数积分的组合，仍统称为负荷格林函数积分。

令 $G^i(l) = 2R\sin\frac{\psi}{2} G^i(\psi) = lG^i(\psi)$ ，将负荷勒夫数代入式 (3.23) ~ (3.31)，求得地表单位点质量负荷 $q_w = 1$ (kg/m²) 作用下，各种地面大地测量要素负荷间接影响格林函数，及负荷间接影响随积分距离变化值，如表 3.1。

表 3.1 地面站点的负荷间接影响格林函数取值

$l(\text{km})$	$G_\zeta^i \times 10^{-13}$	$G_g^i \times 10^{-17}$	$G_{\delta g}^i \times 10^{-18}$	$G_t^i \times 10^{-14}$	$G_\theta^i \times 10^{-19}$	$G_l \times 10^{-12}$	$G_r \times 10^{-11}$	$G_{rr}^i \times 10^{-15}$	$G_{ss}^i \times 10^{-15}$
0.1	-0.0249	-11.3315	15.8795	42.2955	-2.1192	-0.8369	-42.1264	-40.7525	20.0337
0.2	-0.0439	-9.8972	29.6981	21.1510	-8.0632	-3.1842	-41.9553	-73.6102	34.1831
0.3	-0.0625	-8.8334	39.7946	14.1058	-16.6878	-6.5901	-41.7788	-92.3770	37.9744
0.4	-0.0804	-8.2348	45.2182	10.5853	-26.3601	-10.4097	-41.5956	-93.8712	29.4189
0.5	-0.0975	-8.1095	45.8894	8.4739	-35.3064	-13.9425	-41.4057	-78.5612	9.4993
0.6	-0.1139	-8.3807	42.5773	7.0657	-41.9834	-16.5790	-41.2101	-50.3867	-18.0490
0.7	-0.1294	-8.9073	36.7009	6.0583	-45.3905	-17.9241	-41.0109	-15.8142	-47.6055
0.8	-0.1444	-9.5157	30.0034	5.3006	-45.2558	-17.8704	-40.8109	17.6468	-72.9744
1.0	-0.1727	-10.3454	20.4992	4.2343	-36.8762	-14.5596	-40.4173	55.8494	-91.9157
1.2	-0.1998	-10.1321	21.4749	3.5210	-26.2416	-10.3574	-40.0402	39.6641	-61.0517
1.4	-0.2261	-9.1669	30.0077	3.0153	-22.8895	-9.0304	-39.6752	-8.4433	-7.5471
1.6	-0.2518	-8.3519	37.0350	2.6419	-28.6871	-11.3158	-39.3091	-42.4515	24.9158
2.0	-0.3003	-8.9633	28.5858	2.1198	-40.5309	-15.9830	-38.5476	4.3817	-24.2022
2.5	-0.3570	-9.1242	24.1119	1.6843	-25.9871	-10.2232	-37.6133	17.0612	-27.2278
3.0	-0.4112	-7.9718	32.8632	1.4080	-35.2424	-13.8576	-36.7093	-28.7167	17.2271
3.5	-0.4621	-8.9437	20.3140	1.2022	-32.5321	-12.7629	-35.7866	31.1746	-40.2655
4.0	-0.5112	-7.7218	29.8481	1.0465	-28.2814	-11.0562	-34.9109	-22.8507	15.9355
5.0	-0.6036	-7.8959	22.7679	0.8291	-26.3578	-10.2305	-33.1702	5.9459	-11.1019

6.0	-0.6903	-7.8527	18.1028	0.6858	-29.9324	-11.5649	-31.5082	23.6048	-28.4842
7.0	-0.7725	-7.2943	18.8748	0.5827	-33.7803	-12.9988	-29.9389	13.5281	-18.2480
8.0	-0.8510	-6.5206	22.0921	0.5013	-33.1161	-12.6452	-28.4652	-9.3638	5.3150
10.0	-0.9991	-6.0125	18.9937	0.3784	-24.7530	-9.1540	-25.7982	-5.3162	2.8950
12.0	-1.1387	-5.9045	13.1167	0.2999	-27.9718	-10.2454	-23.5296	16.1892	-18.4692
14.0	-1.2726	-4.9048	17.3988	0.2398	-26.5722	-9.5373	-21.6664	-13.0654	11.2087
16.0	-1.4019	-4.8896	12.8941	0.1911	-21.0009	-7.2164	-20.1480	4.3047	-5.5888
20.0	-1.6520	-4.0437	14.8205	0.1306	-20.9145	-7.0582	-18.0179	-12.2601	11.2369
25.0	-1.9534	-3.6904	13.7959	0.0872	-19.8016	-6.6584	-16.5317	-10.0949	9.3198
30.0	-2.2455	-3.5544	12.9067	0.0638	-18.9897	-6.5141	-15.7982	-5.5325	4.9129
35.0	-2.5296	-3.5250	12.0811	0.0505	-18.1729	-6.4230	-15.4331	-0.0753	-0.4331
40.0	-2.8059	-3.5272	11.4345	0.0423	-17.1945	-6.2698	-15.2297	4.7358	-5.1568
50.0	-3.3365	-3.4643	11.2395	0.0322	-14.9772	-5.7725	-14.9607	8.1685	-8.4622
60.0	-3.8395	-3.2518	12.5464	0.0262	-13.6029	-5.4612	-14.6941	2.7549	-2.9775
70.0	-4.3177	-3.0073	14.0654	0.0229	-13.9783	-5.7205	-14.3923	-4.6469	4.4506
80.0	-4.7741	-2.8804	14.3310	0.0210	-15.3999	-6.3101	-14.0649	-6.2127	6.0235
100.0	-5.6311	-2.9117	11.9306	0.0171	-15.7804	-6.3810	-13.3843	4.6763	-4.8316
120.0	-6.4270	-2.6545	12.4755	0.0129	-14.0249	-5.5346	-12.7235	-0.1761	0.0607
140.0	-7.1738	-2.4359	12.7461	0.0120	-15.5946	-5.9880	-12.0989	-3.7448	3.6348
160.0	-7.8804	-2.4586	10.7233	0.0100	-14.9953	-5.5941	-11.5133	-4.4893	-4.5820
200.0	-9.1986	-2.0952	11.1758	0.0080	-15.1075	-5.3733	-10.4758	-1.7439	1.6689
250.0	-10.7136	-1.8097	10.7082	0.0058	-14.0435	-4.7072	-9.3924	-3.2869	3.2307
300.0	-12.1238	-1.5962	10.1419	0.0042	-12.9077	-4.0819	-8.5118	-3.2916	3.2481
400.0	-14.7375	-1.3210	8.9521	0.0023	-11.1503	-3.1625	-7.2265	-0.4258	0.3969
500.0	-17.1749	-1.1331	8.3207	0.0016	-10.3019	-2.7029	-6.4078	2.1612	-2.1831
600.0	-19.4980	-0.9603	8.5053	0.0014	-9.8691	-2.4641	-5.9044	2.3040	-2.3219
800.0	-23.8986	-0.6720	9.9646	0.0010	-9.0007	-2.0628	-5.4405	-0.1041	0.0908

8.3.3 勒让德函数及对 ψ 一、二阶导数

计算各种大地测量要素的负荷间接影响格林函数时, 需要计算勒让德函数 $P_n(\cos\psi)$ 及其对 ψ 一、二阶导数, 这里令 $t = \cos\psi$, $u = \sin\psi$, 直接给出其快速递推算法。

$$P_n(t) = \frac{2n-1}{n}tP_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(t) \quad (3.39)$$

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi} P_n(t) = \frac{2n-1}{n}t \frac{\partial}{\partial\psi} P_{n-1}(t) - \frac{2n-1}{n}uP_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n} \frac{\partial}{\partial\psi} P_{n-2}(t) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi} P_1(t) = -u, \quad \frac{\partial}{\partial\psi} P_2(t) = -3ut \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\psi^2} P_n(t) = \frac{2n-1}{n} \left(t \frac{\partial^2}{\partial\psi^2} P_{n-1} - 2u \frac{\partial}{\partial\psi} P_{n-1} - tP_{n-1} \right) - \frac{n-1}{n} \frac{\partial^2}{\partial\psi^2} P_{n-2} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\psi^2} P_1(t) = -t, \quad \frac{\partial^2}{\partial\psi^2} P_2(t) = 3(1 - 2t^2) \quad (3.44)$$

8.3.4 江河湖库水变化负荷形变场计算

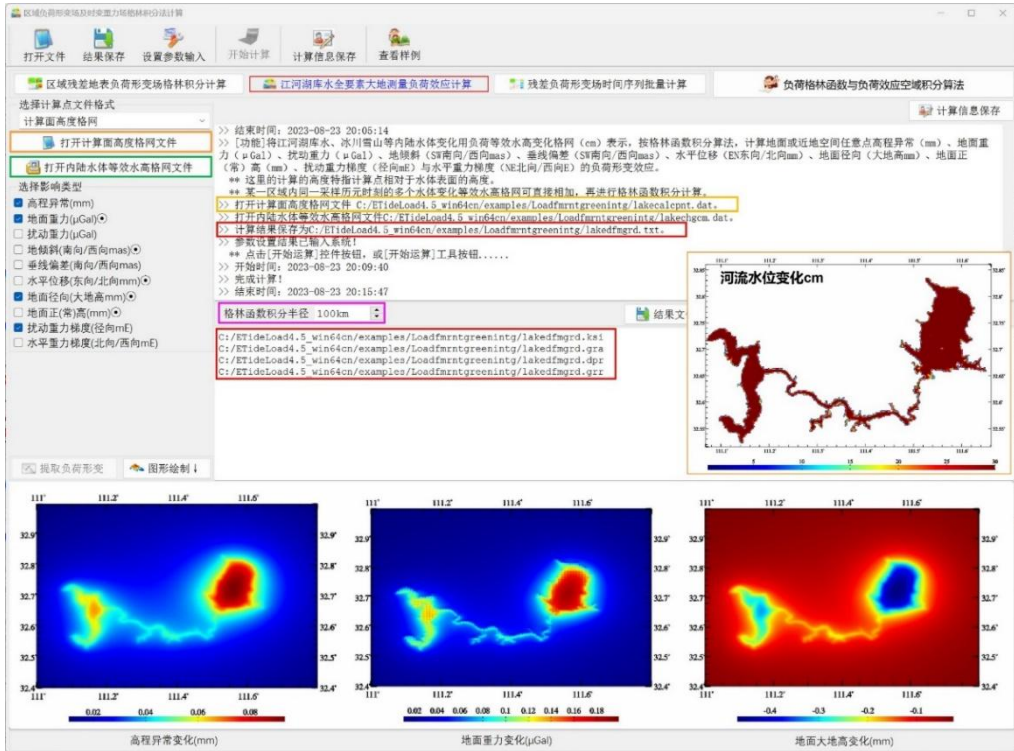


图 3.1 江河湖库水变化负荷形变场计算

将江河湖库水、冰川雪山等内陆水体变化用负荷等效水高变化格网表示, 按负荷格林

函数积分算法（负荷直接影响积分与负荷间接影响格林函数积分组合），计算地面或近地空间任意点处各种大地测量要素（观测量或参数）的负荷形变效应。某一区域内同一采样历元时刻的多个水体等效水高变化格网可直接相加，再进行负荷格林函数积分计算。

这里将河流水底地形与河流水位相结合，由河流水位监测数据，构建河流等效水高变化格网时间序列，进而按负荷格林函数积分算法，计算地面高程异常（mm）、地面重力（ μGal ）、和扰动重力梯度（径向 mE）负荷形变效应格网时间序列。图 3.1 为其中一个采样时刻的地面负荷形变效应计算过程。

8.3.5 区域负荷形变场移去恢复法逼近

由负荷等效水高变化格网，按负荷格林函数积分法计算地面或地球外部大地测量要素的负荷形变效应时，积分核函数自变量即球面角距 ψ 的定义域为 $[0, 2\pi]$ 或 $[-\pi, \pi]$ ，是全球的。直接应用这些积分公式意味着计算任一点处的负荷形变效应就需要全球连续分布的地面等效水高变化数据。这对一个国家或地区这样的局部区域，负荷形变效应计算及应用非常不便，也不便利用局部区域的地表环境负荷数据优势改善区域负荷形变场。类似于物理大地测量学的局部重力场逼近方法，我们可以借助全球负荷球谐系数模型，利用局部地区地表环境负荷数据来计算地面或地球外部各种大地测量要素的负荷形变效应，精化该地区的负荷形变场（这里的负荷形变场，一般用某种或多种地面大地测量要素的负荷形变效应格网表示，有时也用变重力场表示）。类似地，我们也将以全球负荷球谐系数模型为参考负荷形变场的区域负荷形变场精化过程称为局部负荷形变场逼近。

局部负荷形变场逼近同样可采用物理大地测量学中的移去-恢复方案。这种方法只需在已有负荷格林积分式中用区域残差负荷等效水高变化代替全球负荷等效水高变化，直接将积分域由全球变为局部区域，积分公式和核函数都不需要改化，其形式保持不变。

该方案基本流程（一个历元时刻）：（1）由负荷球谐系数模型，计算区域负荷等效水高变化参考模型值；（2）从区域高分辨率负荷等效水高变化格网中，移去负荷等效水高变化参考模型值，得到区域负荷等效水高变化残差值格网，这个步骤称为“移去”；（3）采用较小的积分半径，按负荷格林函数积分法计算高分辨率负荷形变场格网的残差值；（4）由负荷球谐系数模型，计算区域负荷形变场的分辨率参考模型值格网；（5）将区域高分辨率负荷形变场的参考模型值格网与残差值格网相加，就得到区域高分辨率负荷形变场的精化值，这个步骤称为“恢复”。整个流程可称为“移去-负荷格林函数积分-恢复”方案。

下面以中国南部某地区的地面大气压负荷形变场逼近为例，由 2018 年 1 月至 2020 年 12 月 $3.75' \times 3.75'$ 地面大气压周变化（hPa）格网时间序列（共 157 个采样历元，其中 12 个历元地面大气压变化格网如图 3.2，图中左上角为采样历元时刻，如 20180214 表示

2018年2月14日),按“移去-负荷格林函数积分-恢复”方案,精化地面大气压负荷形变场周变化格网时间序列。

参考负荷形变场模型时间序列,采用8.2.5节计算的2018年1月至2020年12月157个180阶全球地面大气压周变化负荷球谐系数模型时间序列。类似于区域大地水准面精化技术,一般要求负荷等效水高格网数据的区域范围(数据区域),应在负荷形变场精化区域(成果区域)基础上向四周扩展负荷格林函数积分半径,以抑制负荷格林函数积分的边缘效应。本例数据区域 $E96^{\circ}\sim 103^{\circ}$, $N22^{\circ}\sim 29^{\circ}$,成果区域 $E98^{\circ}\sim 101^{\circ}$, $N24^{\circ}\sim 27^{\circ}$ 。

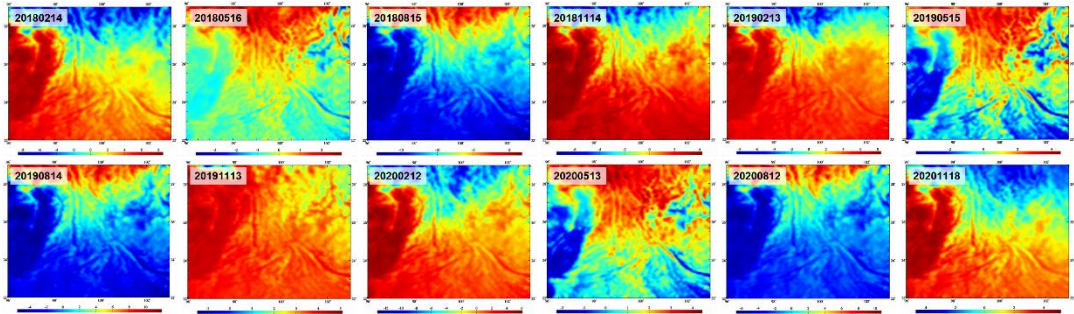


图 3.2 区域 $3.75' \times 3.75'$ 地面大气压周变化 (hPa) 格网时间序列

第一步:输入计算区域 $3.75' \times 3.75'$ 零值格网(零值表示相对地面的高度等于零),由全球地面大气压负荷球谐系数模型时间序列,选择最大计算阶数 180,计算区域地面大气压变化参考模型值格网时间序列。

第二步:将 $3.75' \times 3.75'$ 地面大气压周变化格网时间序列,减去地面大气压变化参考模型值格网时间序列,生成 $3.75' \times 3.75'$ 地面大气压周变化残差值格网时间序列。其中 12 个历元地面大气压残差变化格网如图 3.3。

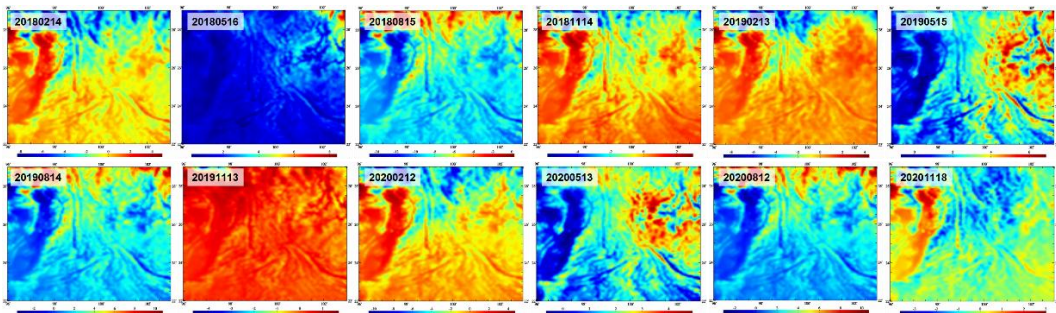


图 3.3 区域 $3.75' \times 3.75'$ 地面大气压周变化 (hPa) 残差值格网时间序列

第三步:输入成果区域 $3.75' \times 3.75'$ 零值格网(零值表示相对地面的高度等于零),选择积分半径 200km,由 $3.75' \times 3.75'$ 地面大气压周变化残差值格网时间序列,按负荷格林函数积分法,计算成果区域 $3.75' \times 3.75'$ 负荷形变场残差值格网时间序列。

第四步：输入成果区域 $3.75' \times 3.75'$ 零值格网（零值表示相对地面的高度等于零），由全球地面大气压负荷球谐系数模型时间序列，选择最大计算阶数 180，计算成果区域地面大气压变化负荷形变场参考模型值格网时间序列。

第五步：将成果区域 $3.75' \times 3.75'$ 负荷形变场残差值格网时间序列，与地面大气压变化负荷形变场参考模型值格网时间序列相加，获得成果区域 $3.75' \times 3.75'$ 地面大气压变化负荷形变场格网时间序列成果。其中 12 个历元地面高程异常、地面重力、地倾斜、地面大地高和扰动重力梯度的地面大气压变化负荷效应格网分别如图 3.4~图 3.8。

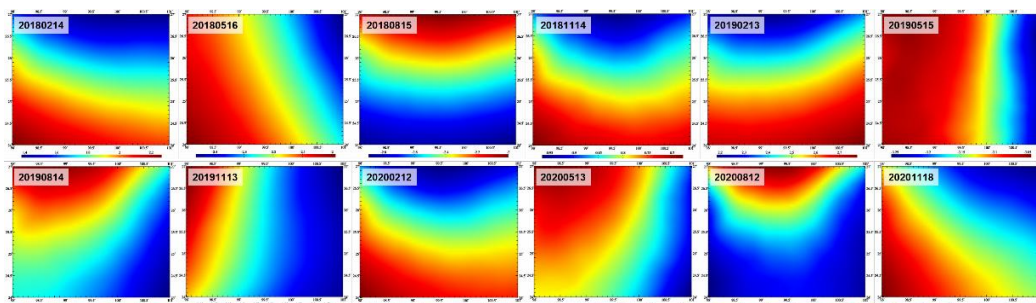


图 3.4 区域 $3.75' \times 3.75'$ 地面高程异常大气压变化负荷效应 (mm) 格网时间序列

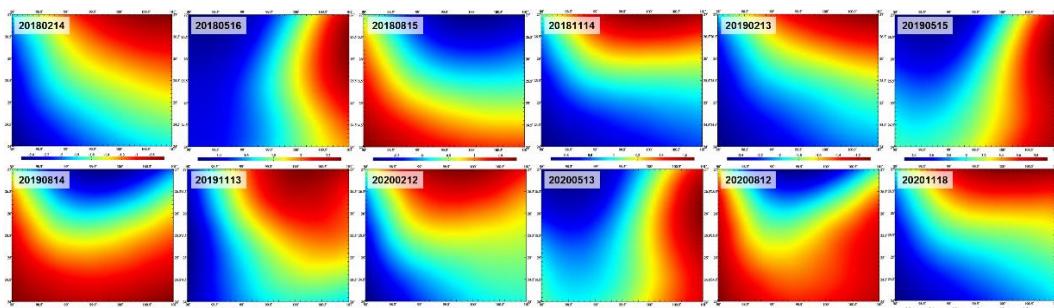


图 3.5 区域 $3.75' \times 3.75'$ 地面重力大气压变化负荷效应 (mGal) 格网时间序列

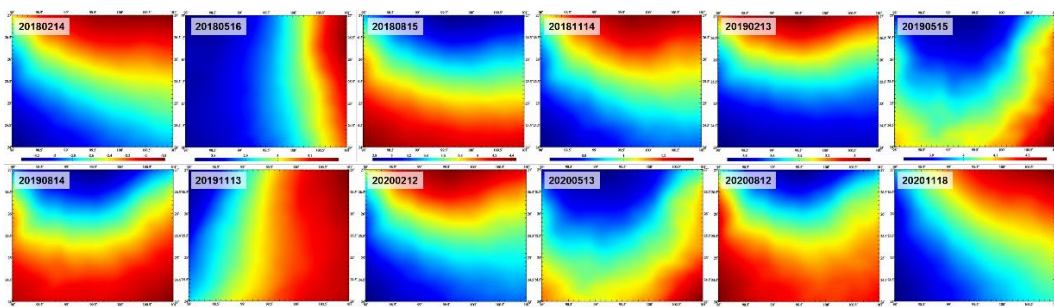


图 3.6 区域 $3.75' \times 3.75'$ 地面大地高大气压变化负荷效应 (mm) 格网时间序列

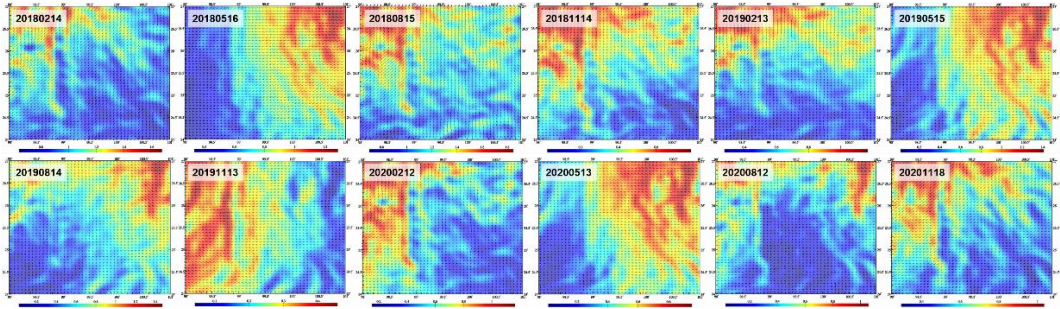


图 3.7 区域 3.75'×3.75'地倾斜大气压变化负荷效应 (mas) 格网时间序列

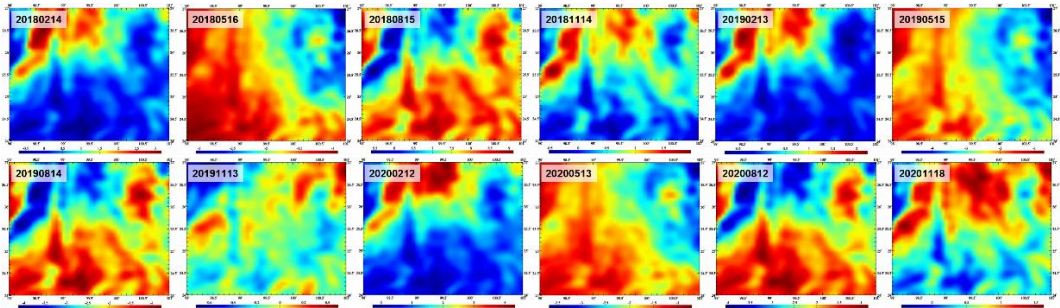


图 3.8 区域 3.75'×3.75'径向重力梯度大气压变化负荷效应 (mE) 格网时间序列

为直观显示该地区各种地面要素大气压变化负荷效应随时间变化规律, 以及不同类型要素大气压变化负荷效应之间的定量关系, 下面按上述移去恢复方法, 计算区域中心地面点处 2018 年 1 月至 2020 年 12 月地面高程异常周变化(mm)、地面重力周变化(μGal)、地面大地高周变化 (mm) 和扰动重力梯度周变化 (mE) 大气压负荷效应时间序列, 如图 3.9。

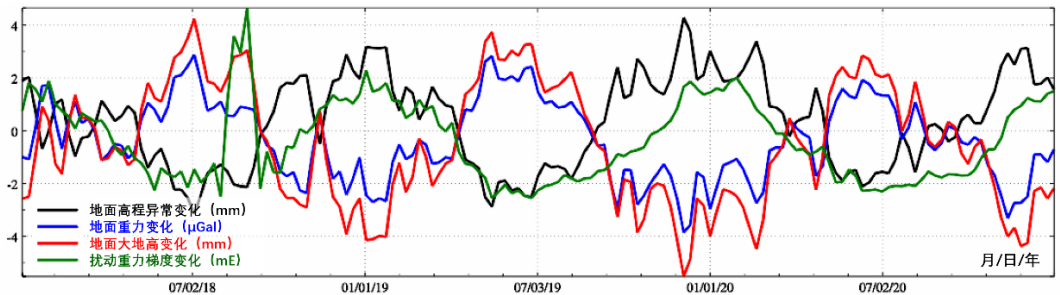


图 3.9 区域中心点处地面大地测量要素周变化大气压负荷效应时间序列

采用较大积分半径, 如 500~800km, 直接由地面负荷等效水高变化格网, 按负荷格林函数积分计算地面大地测量要素的负荷形变效应, 是目前大地测量和地球物理领域普遍方案 (以下简称负荷格林函数直接积分法)。这里以中国大陆地面大气压变化负荷效应

为例，分别采用移去恢复法和负荷格林函数直接积分法，计算地面大地测量要素的大气压变化负荷效应时间序列，分析负荷格林函数直接积分法的近似误差。

这里利用欧洲中尺度天气预测中心（ECMWF）全球再分析数据 ERA-40/ERA-Interim 中的 $0.5^{\circ} \times 0.5^{\circ}$ 地面/海面大气压日变化模型，扣除 2018 年平均值后，构造 2018 年 1 月至 2020 年 12 月中国大陆及周边 $0.5^{\circ} \times 0.5^{\circ}$ 地面/海面大气压周变化（hPa）格网时间序列（共 157 个采样历元）。

参考负荷形变场模型时间序列，采用 8.2.5 节计算的 2018 年 1 月至 2020 年 12 月 157 个 180 阶全球地面大气压周变化负荷球谐系数模型时间序列。先按移去恢复算法，残差负荷格林函数积分半径 200km，计算中国大陆 6 座 CORS 站处地面高程异常、地面重力、地面大地高和扰动重力周变化大气压负荷效应时间序列；再按负荷格林函数积分法，直接由中国大陆及周边 $0.5^{\circ} \times 0.5^{\circ}$ 地面/海面大气压周变化（hPa）格网时间序列，积分半径选择 800km，计算中国大陆 6 座 CORS 站处地面高程异常、地面重力、地面大地高和扰动重力周变化大气压负荷效应时间序列。

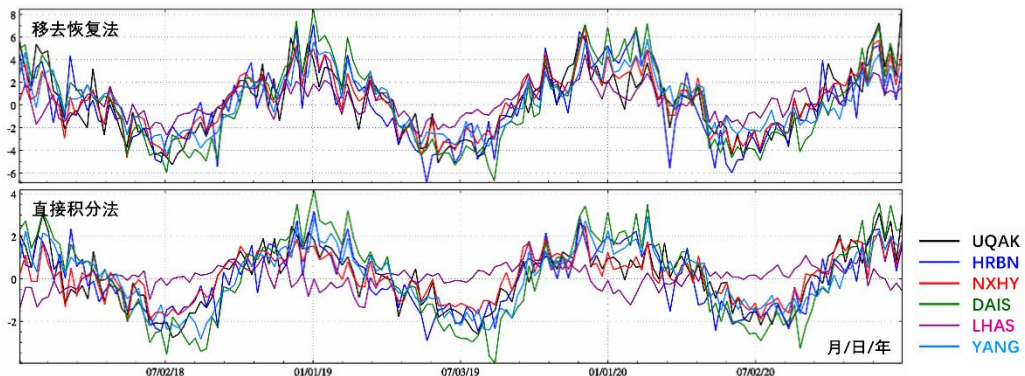


图 3.10 两种方法计算 CORS 站地面高程异常周变化大气压负荷效应（mm）时间序列

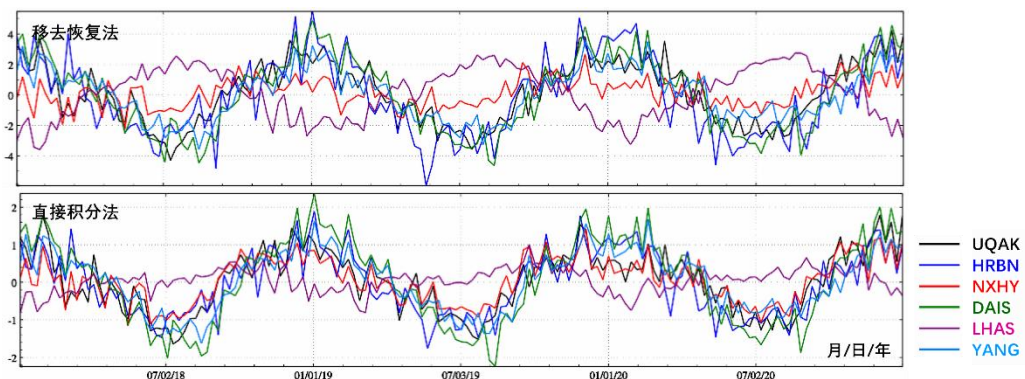


图 3.11 两种方法计算 CORS 站地面重力周变化大气压负荷效应（mGal）时间序列

两种方法计算的中国大陆 6 座 CORS 站处负荷效应周变化时间序列曲线如图 3.10~图

3.13, 每个图的上图为移去恢复法计算结果, 下图为负荷格林函数积分法计算结果。表 3.2 给出用两种方案计算中国大陆 6 个 CORS 站处地面大地测量要素大气压变化负荷效应时间序列及其差异的统计情况。表中 ksi、gra、hgt 和 grr 分别代表地面高程异常周变化、地面重力周变化、地面大地高周变化和扰动重力周变化大气压负荷效应时间序列。

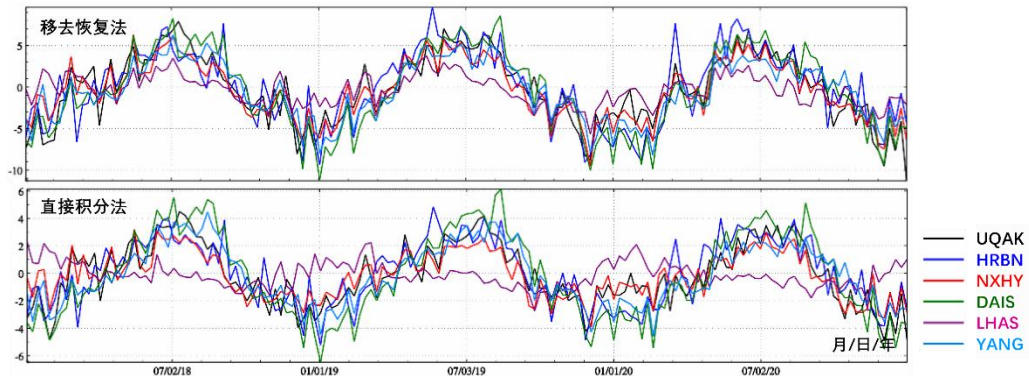


图 3.12 两种方法计算 CORS 站地面大地高周变化大气压负荷效应 (mm) 时间序列

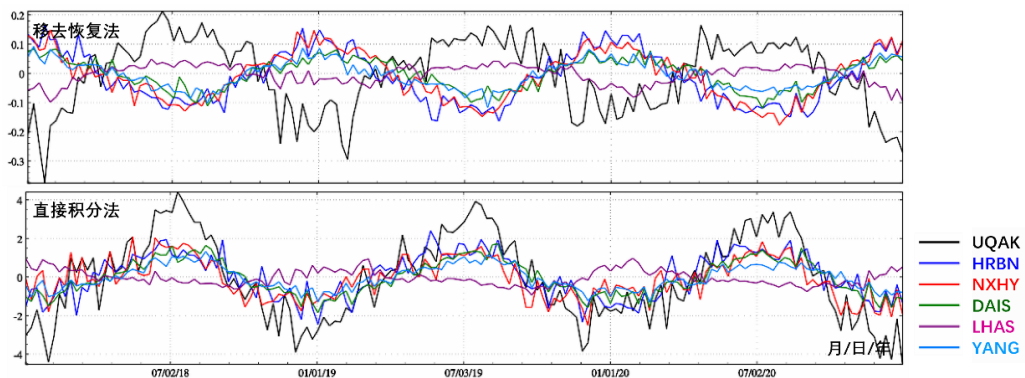


图 3.13 两种方法计算 CORS 站扰动重力梯度周变化大气压负荷效应 (mE) 时间序列

表 3.2 两种方案计算的大气压变化负荷效应时间序列及其差异统计

站名 (经度 纬度)	负荷效应对象	单位	移去恢复法		直接积分法		两者之差	
			平均值	标准差	平均值	标准差	平均值	标准差
UQAK E87.97° N47.10°	ksi	mm	0.1618	2.9040	0.0669	1.3829	0.0949	1.6514
	gra	mGal	0.1363	2.0060	0.0382	0.8115	0.0982	1.2499
	hgt	mm	-0.2201	4.0837	-0.1053	2.2224	-0.1148	2.0922
	grr	mE	-0.0029	0.1224	-0.0582	2.1550	0.0553	2.0549
HRBN E126.62°	ksi	mm	0.0335	3.1523	-0.0208	1.4114	0.0542	1.8525
	gra	mGal	-0.0628	2.5363	-0.0148	0.8494	-0.0479	1.7076

N45.70°	hgt	mm	0.0053	4.3568	0.0411	2.3354	-0.0357	2.2104
	grr	mE	-0.0111	0.0883	0.0308	1.1439	-0.0419	1.2281
NXHY E105.63° N36.55°	ksi	mm	0.3069	2.6001	0.0994	1.0561	0.2075	1.6745
	gra	mGal	0.1592	0.9325	0.0576	0.6012	0.1016	0.4970
	hgt	mm	-0.3920	3.4507	-0.1589	1.6570	-0.2331	2.0348
	grr	mE	-0.0073	0.0818	-0.1068	1.0503	0.0995	1.1172
DAIS E122.20° N30.23°	ksi	mm	0.2630	3.5502	0.0907	1.9842	0.1722	1.6910
	gra	mGal	0.1284	2.4349	0.0522	1.1244	0.0763	1.3303
	hgt	mm	0.3564	4.7804	-0.1429	3.0833	-0.2135	1.9432
	grr	mE	-0.0026	0.0517	-0.0441	0.8954	0.0415	0.9444
LHAS E91.10° N29.65°	ksi	mm	0.3231	1.3847	0.0826	0.5451	0.2405	1.2880
	gra	mGal	0.1167	1.6451	0.0464	0.3234	0.0703	1.4307
	hgt	mm	-0.4104	1.8119	-0.1262	0.8929	-0.2842	1.6980
	grr	mE	-0.0043	0.0325	-0.0425	0.3946	0.0383	0.4219
YANG E109.22° N19.77°	ksi	mm	0.3055	2.4528	0.0904	1.3640	0.2151	1.2191
	gra	mGal	0.0748	1.6494	0.0499	0.7787	0.0249	0.8961
	hgt	mm	-0.4103	3.4732	-0.1365	2.1386	-0.2738	1.5685
	grr	mE	-0.0041	0.0461	-0.0344	0.6216	0.0303	0.6665

图 3.10~图 3.13 显示，两种方案计算的负荷形变效应，其时间序列曲线的几何形态基本一致，但数值大小存在明显差异。表 3.2 显示，当积分半径达到 800km，负荷格林函数直接积分法的误差（用两种方法负荷效应时间序列差异的标准差代表）还会超过计算信号本身（用直接积分法负荷效应时间序列的标准差代表），这是因为，只要积分半径小于 $\sqrt{2}R$ (R 为地球平均半径)，负荷格林函数直接积分都未能实现全球地面积分，所计算的负荷形变效应信号不充分。多数情况下，负荷格林函数直接积分法难以满足高精度大地测量的技术要求，建议采用理论上较为严密的移去-负荷格林函数积分-恢复法。