

## 多源异质监测量负荷形变场径向基函数逼近算法

ETideLoad4.5, 章传银

ETideLoad4.5 充分推导与完整实现了负荷 SRBF 谱域逼近 (表示) 与负荷效应 (负荷形变场) SRBF 综合算法, 以有效解决负荷格林函数的高阶振荡与不收敛, 格林积分的频谱泄漏与奇异性问题, 进而提出基于谱域 SRBF 表示的固体地球物理解析约束方法, 以解决 GNSS、重力、水准、地倾斜与地下水等多源异质监测量的深度融合问题, 并严格在动力学框架中实现了多种异构大地测量与地表环境负荷的协同监测。

### 8.7.1 地面负荷等效水高球面径向基函数表示

地面点  $\mathbf{x}$  处负荷等效水高变化  $\Delta h_w(\mathbf{x})$  可表示为规格化面球基函数的线性组合

$$\Delta h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \Delta \bar{F}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \quad (7.1)$$

式中:  $\mathbf{x} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = r(\sin\theta\cos\lambda, \sin\theta\sin\lambda, \cos\theta)$ ;  $\theta, \lambda, r$  分别是地球外部点  $\mathbf{x}$  的地心余纬、经度和地心距;  $\Delta \bar{F}_{nm}$  为完全规格化的 Stokes 系数 (位系数) 变化;  $a$  为地球长半轴, 表示规格化的面球基函数  $\bar{Y}_{nm}$  定义在半径等于  $a$  的球面上, 且

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) &= \bar{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda, \quad \bar{F}_{nm} = \delta \bar{C}_{nm}, \quad m \geq 0 \\ \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) &= \bar{P}_{n|m|}(\cos\theta)\sin|m|\lambda, \quad \bar{F}_{nm} = \bar{S}_{n|m|}, \quad m < 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

式中:  $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$  为完全规格化缔合 Legendre 函数;  $n$  为位系数的阶,  $m$  为位系数的次。

面球函数也可等价地定义在半径为  $\mathcal{R}$  的 Bjerhammar 球面上 (Bjerhammar 球仅是习惯说法, 与 Bjerhammar 边值问题无关)。地面等效水高变化  $\Delta h_w(\mathbf{x})$  也可用 Bjerhammar 球面上的面球函数表示为

$$\Delta h_w(\mathbf{x}) = \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \Delta \bar{E}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \quad (7.3)$$

式中:  $\mathcal{R} \in (a - \delta, a + \delta)$ ,  $\delta \ll a$ , 显然有  $a^n \Delta \bar{F}_{nm} = \mathcal{R}^n \Delta \bar{E}_{nm}$ 。式 (7.3) 和式 (7.1) 中的面球函数基  $\{\bar{Y}_{nm}(\mathbf{e})\}$  完全相同。

另一方面, 地面负荷等效水高变化  $\Delta h_w(\mathbf{x})$  也可表示为  $K$  个 Bjerhammar 球面上球面径向基函数 (Spherical Radial Basis Functions, SRBF) 的线性组合

$$\Delta h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{k=1}^K d_k \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) \quad (7.4)$$

式中:  $\mathbf{x}_k = \mathcal{R} \cdot \mathbf{e}_k$  是定义在 Bjerhammar 球面上的 SRBF 节点, 也称 SRBF 中心;  $\psi_k$  为球面径向基函数的自变量, 是球面 SRBF 节点  $\mathbf{x}_k$  到空间计算点  $\mathbf{x}$  的球面角距;  $d_k$  为 SRBF 系数,  $K$  为 SRBF 节点数, 也即 SRBF 系数个数, 代表空间分辨率 (作用类似于位系数个数);  $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_k(\mathbf{x}, \psi_k)$  为地面等效水高变化的球面径向基函数, 可简写为  $\Phi_k(\mathbf{x}) =$

$\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

球面径向基函数 $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 可进一步展开成 Legendre 级数形式

$$\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_k(\mathbf{x}, \psi_k) = \sum_{n=1}^N \phi_n P_n(\psi_k) = \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.5)$$

式中： $\phi_n$ 为 SRBF 的 $n$ 阶 Legendre 系数，它表征了 SRBF 形状，基本决定了 SRBF 的空域和谱域性质，也称形状因子；在不强调谱域阶数 $n$ 时，也称 $B_n$ 为 SRBF 的 Legendre 系数； $\mu = \mathcal{R}/r$ 因与径向基函数 $\Phi_k(x)$ 的谱域带宽有关，也称为宽度参数。

式 (7.5) 中的 $N$ 为 Legendre 函数最大阶数，虽然是地面等效水高变化面球函数展开式 (7.3) 中的最大阶数，但实际上与代表空间分辨率的 SRBF 系数个数 $K$ 并没有明确的函数关系。

将式 (7.5) 代入式 (7.4) 得

$$\begin{aligned} \Delta h_w(\mathbf{x}) &= \frac{GM}{4\pi r} \sum_{n=1}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{k=1}^K d_k P_n(\psi_k) \\ &= \frac{GM}{4\pi r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=1}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \end{aligned} \quad (7.6)$$

顾及球谐函数加法定理：

$$P_n(\psi_k) = P_n(\mathbf{e}, \mathbf{e}_k) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (7.7)$$

则式 (7.6) 可写为

$$\Delta h_w(\mathbf{x}) = \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^N B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \sum_{k=1}^K d_k \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (7.8)$$

比较式 (7.1)、式 (7.3) 与式 (7.8)，可得

$$\Delta \bar{F}_{nm} = \left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right)^n \Delta \bar{E}_{nm} = B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right)^n \sum_{k=1}^K d_k \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (7.9)$$

当 SRBF 自变量 $\psi_k$ 的作用域 (SRBF 中心的作用距离) 为全球 $\psi_k \in [0, \pi]$ 时，式 (7.9) 成立。利用式 (7.9)，就可由 SRBF 系数 $\{d_k\}$ 计算位系数变化 $\{\Delta \bar{F}_{nm}\}$ 或 $\{\Delta \bar{E}_{nm}\}$ ，进而按球谐综合算法计算各种要素的负荷形变效应。而用于局部负荷形变场逼近时，SRBF 自变量 $\psi_k$ 类似于积分边界面上用球面角距表示的负荷 Green 积分距离。

SRBF 中心 $\mathbf{x}_k$ 在 Bjerhammar 球面上的位置、分布和数量 $K$ ，是 SRBF 负荷形变场逼近的关键性指标，决定了表达负荷形变场的空间自由度 (空间分辨率) 和空域特征。

### 8.7.2 适合负荷形变场监测的球面径向基函数

用于负荷形变场逼近的径向基函数应满足 Laplace 方程。常见的点质量核函数，Poisson 核函数、径向多极子核函数和 Poisson 小波核函数都是具有调和性质的径向基核

函数。令  $\mathbf{x}$  为地球外部计算点,  $\mathbf{x}_k$  为 Bjerhammar 球面  $\Omega_R$  上的 SRBF 节点。

(1) 点质量核函数

点质量核函数是由 Hardy (1971) 提出的一种逆多面函数 (IMQ), 也是引力位积分公式  $V = G \iiint \frac{dm}{L}$  的核函数, 其解析表达式为

$$\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{L} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|} \quad (7.10)$$

式中:  $L$  为  $\mathbf{x}_k$  到  $\mathbf{x}$  的空间距离。点质量函数也即牛顿核函数[式 (1.3.38)]。由于  $\Delta(1/L) = 0$ , 因此点质量核函数  $\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$  满足 Laplace 方程。

(2) Poisson 核函数

Poisson 核函数源于扰动重力场量的 Poisson 积分公式, 其解析表达式为

$$\Phi_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = -2r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{L} \right) - \frac{1}{L} = \frac{r^2 - r_k^2}{L^3} \quad (7.11)$$

(3) 径向多极子核函数

径向多极子核函数的解析表达式为

$$\Phi_{RM}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L} \quad (7.12)$$

式中:  $m$  可称为径向多极子核函数的次 (order), 零次径向多极子核函数 ( $m = 0$ ) 就是点质量核函数  $\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_{RM}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

(4) Poisson 小波核函数

Poisson 小波核函数的解析表达式为

$$\Phi_{PW}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = 2(\chi_{m+1} - \chi_m), \quad \chi_m = \left( r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L} \quad (7.13)$$

零次 Poisson 小波核函数 ( $m = 0$ ) 就是 Poisson 核函数  $\Phi_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_{PW}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

(5) 球面径向基函数计算

为突出负荷及其负荷形变场的谱域性质, 通常将球面径向基函数解析表达式 (7.10) ~ 式 (7.13) 表示成 Legendre 级数形[式 (7.5)]后, 按 Legendre 级数计算。

为简化数学表达, 可将球面径向基函数  $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$  的 Legendre 级数进行归一化处理, 计算归一化系数, 用归一化后的 Legendre 级数展开式计算球面径向基函数。在处理多种类型监测量时, 可将各种监测量的球面径向基函数统一除以扰动位球面径向基函数的归一化系数。归一化后, 各种 jic 监测函数关系不变。

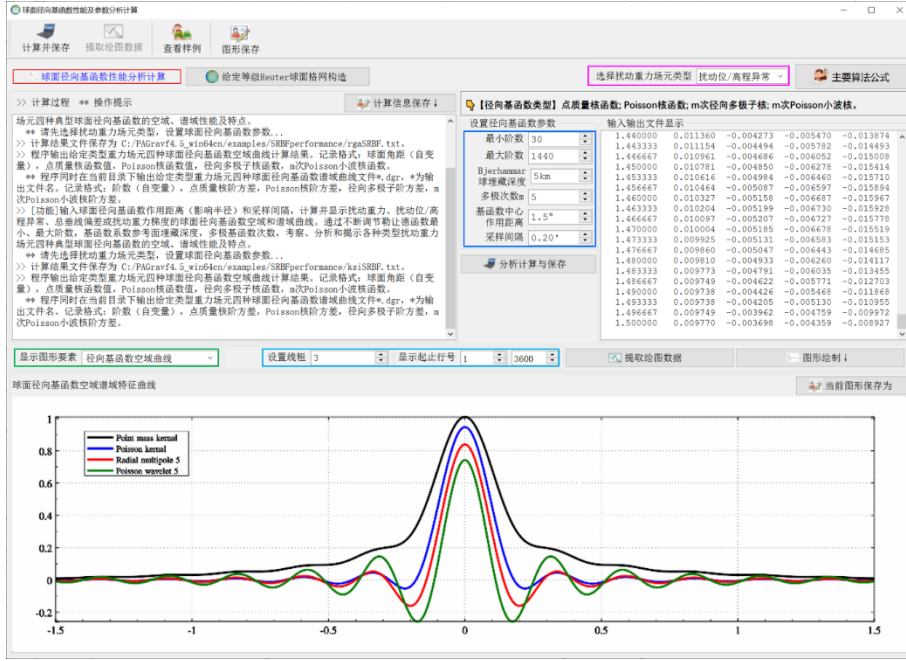
令  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_k$  的球面角距  $\psi_k = 0$ , 则  $\cos \psi_k = 1$ , 顾及  $P_n(\cos \psi_k) = P_n(1) = 1$ , 代入式 (7.5), 得扰动位球面径向基函数归一化系数的通用表达式为

$$\Phi^0 = \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n \quad (7.14)$$

归一化后的扰动位球面径向基函数 Legendre 级数为

$$\Phi_k(x, x_k) = \frac{1}{\Phi_0} \sum_{n=1}^N \phi_n P_n(\psi_k) = \frac{1}{\Phi_0} \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n P_n(\psi_k) \quad (7.15)$$

ETideLoad4.5 采用式 (7.15) 计算归一化后的球面径向基函数, 如图所示。上述四种形式的扰动位球面径向基函数及其对应的 Legendre 系数如表 7.1。



归一化后四种球面径向基函数曲线计算

表 7.1 扰动位球面径向基函数及其 Legendre 系数

径向基函数	解析表达式 $\Phi_k(x, x_k)$	第n阶形状因子 $\phi_n$	Legendre 系数 $B_n$
点质量核函数	$\frac{1}{L} = \frac{1}{ x-x_k }$	$\mu^n$	$\frac{1}{2n+1}$
Poisson 核函数	$\frac{r^2 - r_k^2}{L^3}$	$(2n+1)\mu^n$	1
径向多极子核函数	$\frac{1}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L}$	$C_n^m \mu^{n-m} \quad (n \geq m)$	$\frac{C_n^m}{2n+1} \mu^{-m}$
Poisson 小波核函数	$2(\chi_{m+1} - \chi_m)$ $\chi_m = \left( r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L}$	$(-n \ln \mu)^m (2n+1)\mu^n$	$(-n \ln \mu)^m$

## (7) Reuter 格网构造与 SRBF 节点设计

可以采用全球和区域一致的球面等面积 Reuter 格网, 根据给定的格网等级 $Q$ , 构造球面径向基函数 SRBF 节点 (中心), 再通过自适应算法, 对比监测量的空间分布情况, 使监测点空间分布与 SRBF 节点空间分布处处一致。Reuter 格网等级 $Q$ 用于表示球面等面积格网的空间分辨率, 其作用相当于全球重力位系数模型的最大阶数 $N_{maxn}$ 。

### ①单位球面 Reuter 格网及有关参数算法

给定 Reuter 格网等级 $Q$  (偶数), 则球坐标系中单位球面 Reuter 格网的地心纬度间隔 $d\varphi$ 和单元格网 $i$ 中心的地心纬度 $\varphi_i$ 算法公式为

$$d\varphi = \frac{\pi}{Q}, \quad \varphi_i = -\frac{\pi}{2} + \left(i - \frac{1}{2}\right) d\varphi, \quad 1 \leq i < Q \quad (7.16)$$

纬度 $\varphi_i$ 处的平行圈方向单元格网数 $J_i$ 、经度间隔 $d\lambda_i$ 与边长 $dl_i$ 算法为

$$J_i = \left\lceil \frac{2\pi \cos \varphi_i}{d\varphi} \right\rceil = \lceil 2Q \cos \varphi_i \rceil, \quad d\lambda_i = \frac{2\pi}{J_i}, \quad dl_i = d\lambda_i \cos \varphi_i \quad (7.17)$$

式中:  $\lceil \cdot \rceil$ 表示取整运算。不难发现,  $dl_i \approx d\varphi$ 。记

$$\varepsilon_i = \frac{ds_i - ds}{ds} = \frac{dl_i - d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\lambda_i}{d\varphi} \cos \varphi_i - 1 \quad (7.18)$$

式中:  $ds$ 为赤道附近单元格网面积;  $ds_i$ 为平行圈 $\varphi_i$ 处单元格网面积;  $\varepsilon_i$ 表示平行圈单元格网面积相对赤道附近单元格网面积的相对偏差。 $\varepsilon_i$ 一般很小, 约万分之几, 具体数值与 Reuter 格网等级 $Q$ 有关。赤道附近单元格网面积 $ds = d\varphi \cdot d\varphi$ , 单元格网面积相对偏差 $\varepsilon_{Q/2} = 0$ 。

对于局部区域, 给定目标区域经纬度范围, 可直接按式 (7.16) 确定 $i$ 的最小最大值, 再按式 (7.17) 计算每个平行圈处的最大 $J_i$ , 从而确定格网等级为 $Q$ 的区域 Reuter 格网, 无需计算全球 Reuter 格网。

### ②自适应观测点分布的 SRBF 中心点设计

ETideLoad4.5 推荐一种简易的 Reuter 格网套合算法, 以设计自适应监测点空间分布的 SRBF 中心点, 其计算方案为: 先由给定 Reuter 格网等级 $Q$ , 构造区域等面积 Reuter 格网, 然后统计每个 SRBF 中心点 (节点) 所在单元 Reuter 格网内的有效监测点数 $j$ , 当 $j$ 小于设计最少监测点数时 (将最少监测点数作为输入参数), 剔除该 SRBF 中心点, 遍历所有单元 Reuter 格网后, 就可得到适应观测点空间分布的 SRBF 网络 (SRBF 中心点集)。

显然, 当监测点为规则格网时, SRBF 节点也呈现规则分布; 当监测点分布不规则时, SRBF 节点分布也不规则, 监测点分布密度大的地方, SRBF 节点分布密度也大。可见, SRBF 中心点空间分布与监测点空间分布处处一致。

令全球重力位系数模型最大阶数为 $N_{maxn}$ ，让 Reuter 格网等级 $Q = N_{maxn}$ 。对于全球性球面均匀 Reuter 格网，SRBF 中心点数量 $K$ 与 Reuter 格网等级 $Q$ 之间存在关系

$$K = \sum_{i=1}^Q J_i = \sum_{i=1}^Q \lceil 2Q \cos \varphi_i \rceil > N_{maxn}(N_{maxn} + 2) \quad (7.19)$$

式 (7.19) 表明，对于全球时变重力场监测目的，全球性球面 SRBF 系数个数 $K$ （即 SRBF 中心点数量）略大于位系数个数 $N_{maxn}(N_{maxn} + 2)$ 。

### 8.7.3 负荷及形变效应径向基函数参数形式

依据负荷形变球谐级数展开式 (2.8) ~ 式 (2.20)，可由式 (7.3.3) 地面负荷球面径向基函数展开式，导出各种大地测量要素负荷形变效应的 SRBF 系数参数化形式如下

$$\Delta h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N (2n+1) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.20)$$

$$\Delta \zeta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n (1+k'_n) \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.21)$$

$$\Delta g^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1) \left(1 + \frac{2}{n} h'_n - \frac{n+1}{n} k'_n\right) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (7.22)$$

$$\Delta g^\delta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1) (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (7.23)$$

$$\Delta \xi^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n (1+k'_n - h'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.24)$$

$$\Delta \eta^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n (1+k'_n - h'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.25)$$

$$\Delta \xi = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.26)$$

$$\Delta \eta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.27)$$

$$\text{水平东向} \Delta e = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n l'_n B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.28)$$

$$\text{水平北向} \Delta n = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n l'_n B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.29)$$

$$\text{径向位移} \Delta r = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n h'_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.30)$$

$$\text{正(常)高变化} \Delta h = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n (h'_n - k'_n - 1) \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.31)$$

$$\Delta T_{rr} = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^3} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1)(n+2)(1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (7.32)$$

$$\Delta T_{nn} = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^3} \sum_{k=1}^K d_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \varphi_k^2} \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial^2 P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k^2} \quad (7.33)$$

$$\Delta T_{ww} = -\frac{3\rho_w}{\rho_e} \frac{GM}{r^3 \cos^2 \varphi} \sum_{k=1}^K d_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \lambda_k^2} \sum_n (1 + k'_n) B_n \left(\frac{r}{r'}\right)^n \frac{\partial^2 P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k^2} \quad (7.34)$$

若已知地表负荷等效水高变化 $\Delta h_w$ ，可按式 (7.20) 对负荷等效水高变化 $\Delta h_w$ 进行最小二乘 SRBF 谱域分析，求解 SRBF 系数 $\{d_k\}$ ，这个过程可称为负荷 SRBF 逼近或 SRBF 分析；进而按 SRBF 系数与负荷数之积的 SRBF 综合算法，由 SRBF 系数 $\{d_k\}$ ，按式 (7.21) ~ 式 (7.34) 计算大地测量全要素负荷形变效应，这个过程可称为负荷效应 SRBF 综合。

为考察球面径向基函数的近区性质，选择点质量函数为球面径向基函数，最小阶数和最大阶数分别为 90 和 1800 阶，令 Bjerhammar 球埋藏深度 5km，SRBF 中心最大作用距离 150km，计算与图 7.1 类型相同的重力、垂线偏差、地面水平位移和径向位移负荷效应的 SRBF 空域曲线，如图 7.2。

比较图 7.1 和图 7.2 可以看出，即使是地面大地高负荷效应，近区 SRBF 函数的收敛性质也明显优于负荷格林函数。扰动重力、垂线偏差、水平位移负荷效应的 SRBF 函数在 20km 内的近区都是单调收敛的。采用负荷 SRBF 逼近及负荷形变场 SRBF 综合法代替，能有效解决负荷格林函数在近区的高阶振荡与不收敛问题。

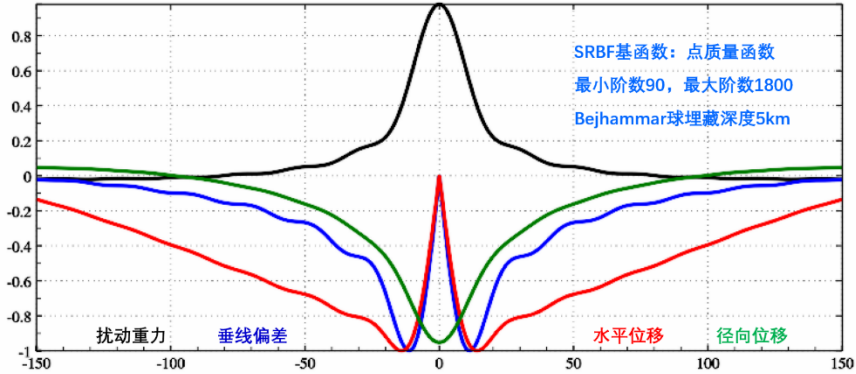


图 7.2 扰动位微分量负荷效应 SRBF 近区性质

地面负荷形变效应径向基函数的算法公式，需要球面角距 $\psi$ 的水平一、二阶偏导数，下面给出球坐标系中的推导过程。

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos \alpha, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos \varphi \sin \alpha \quad (7.35)$$

式中： $\alpha$ 是球面角距 $\psi$ 的大地方位角，由球面三角公式可得：

$$\sin \psi \cos \alpha = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (7.36)$$

$$\sin \psi \sin \alpha = \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) \quad (7.37)$$

将 (7.36) 式两边对 $\varphi$ 求偏导，顾及 (7.34) 式，有

$$-\cos\psi\cos^2\alpha + \sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = -\sin\varphi\sin\varphi' - \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda' - \lambda) \quad (7.38)$$

$$\text{从而可得: } \sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = -\sin\varphi\sin\varphi' - \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda' - \lambda) + \cos\psi\cos^2\alpha \quad (7.39)$$

同理, 将 (7.37) 式两边对  $\lambda$  求偏导, 有

$$-\cos\psi\cos\varphi\sin^2\alpha + \sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} = -\cos\varphi'\sin(\lambda' - \lambda) \quad (7.40)$$

$$\sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} = -\cos\varphi'\sin(\lambda' - \lambda) + \cos\psi\cos\varphi\sin^2\alpha \quad (7.41)$$

#### 8.7.4 远区外边界 SRBF 系数零约束方法

将表 7.1 中负荷等效水高径向基函数对应的球面径向基函数勒让德系数  $B_n$  代入 (7.19) 式, 就是以残差地面等效水高变化  $\Delta\tilde{h}_w(\mathbf{x}_i)$  为观测量, 球面径向基函数系数  $d_k$  为未知数的地面负荷 SRBF 逼近基本观测方程

$$\mathbf{L} = \{\Delta\tilde{h}_w(\mathbf{x}_i)\}^T = \mathbf{A}\{d_k\}^T + \boldsymbol{\epsilon} \quad (i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, K) \quad (7.42)$$

式中:  $\mathbf{A}$  为  $M \times K$  设计矩阵,  $\boldsymbol{\epsilon}$  为  $M \times 1$  观测量误差向量;  $M$  为观测量个数,  $K$  为 SRBF 极点数即未知数  $d_k$  个数;  $\mathbf{x}_i$  为观测量所在地面点的大地坐标。

当 SRBF 节点  $v \in (1, \dots, K)$  位于计算区域边缘时, 令其对应的 SRBF 系数等于零即  $d_v=0$ , 将其作为观测方程, 可抑制边缘效应, 从而提升 SRBF 系数  $\{d_k\}$  参数估计的稳定性和可靠性。采用附加抑制边缘效应约束的法方程变为:

$$[\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} + Q\boldsymbol{\varepsilon}]\{d_k\}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{L} \quad (7.43)$$

式中:  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为对角线矩阵, 当且仅当其下标对应的 SRBF 中心位于区域边缘时等于 1, 其余为零;  $Q$  为法方程系数阵  $\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$  对角线非零元素均方根。

为保持负荷形变场逼近性能的空间一致性, 在构建观测方程 (7.41) 过程中, 通常要求所有 SRBF 中心的作用距离  $dr$  相等。 $dr$  相应于 SRBF 自变量的定义域, 即任一观测量仅用半径  $dr$  范围内 SRBF 节点球面径向基函数的线性组合表示。SRBF 中心作用距离  $dr$  等效于负荷格林函数的积分半径。

引入边缘效应抑制方法后, 法方程不再需要正则化和迭代计算, 从而避免负荷形变场 (时变重力场) 的解析结构受监测测量误差影响, 可有效提高算法的普适性和可靠性。

残差负荷每次逼近等价于以上次累积的负荷为参考场, 按移去恢复法计算剩余残差负荷。通常一般累积 1~2 次可达到稳定解。残差负荷累积逼近有效性一般性原则: (1) 负荷形变场空间连续可微, (2) 负荷等效水高的残差标准差明显减小, 残差统计平均值趋于零。

实际计算时，可先让累积逼近次数等于零，优化调整首次逼近的合适参数，再固定首次逼近参数，优化调整累积逼近参数。

### 8.7.5 多种异构观测系统协同的参数估计

一般情况，不同类型、不同空间分布的几何物理监测量（径向位移、重力变化、地倾斜变化等），对不同 SRBF 系数的敏感性存在明显差异，表现为各自观测方程中 SRBF 系数参数向量的设计矩阵（敏感矩阵）基本不具备可比性。若直接由每种监测量观测方程按最小二乘法组成各自法方程，再按方差分量估计法配权后对这些法方程进行加权组合，一般难以获得 SRBF 系数的稳定解。

然而，我们总能将所有类型监测量的观测方程按其对于 SRBF 系数灵敏度差异分成若干组，各组观测扰动场量之间统计独立，组内观测方程的设计矩阵差异较小，每组观测方程构成一个观测系统。之后，先由每组监测量方程按最小二乘原理组成各自法方程，并对法方程进行规范化处理，再按不同组的观测质量对各观测系统配权，将规范后的法方程进行加权求和，生成组合后的法方程，解算未知 SRBF 系数估值。协同组合后的法方程可表示为

$$\sum_k \left( \frac{w_k}{Q_k} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k \right) \{d_k\}^T = \sum_k \left( \frac{w_k}{Q_k} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{L}_k \right) \quad (7.44)$$

式中： $k = 1, \dots, K$ ， $K$ 为观测系统的分组数； $\{d_k\}$ 为待估 SRBF 系数参数向量； $\mathbf{A}_k, \mathbf{L}_k, \mathbf{P}_k$ 分别为第 $k$ 组观测方程的参数设计矩阵、监测向量与观测量权阵； $\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{L}_k$ 分别为第 $k$ 组观测系统法方程的系数矩阵和常数矩阵。

特别地，第 $k$ 组监测量的观测权 $\mathbf{P}_k$ 仅用于区别第 $k$ 组系统内观测量之间的精度差异，与其他组监测量误差或观测质量完全无关； $Q_k$ 为第 $k$ 组系统法方程规范化参数，取第 $k$ 组观测系统法方程系数阵 $\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k$ 对角线元素的均方根； $w_k$ 为第 $k$ 组观测系统的系统权值，仅用于区别不同观测系统的质量。

不难发现，第 $k$ 组系统监测量的权 $\{P_{ki}\}$ ，在法方程规范化后，只对第 $k$ 组观测系统内部的监测量起作用，而与其他组系统的监测量误差完全无关。各组系统监测点空间分布的差异性，也会在法方程规范化后，而变得不太突出。例如，若某一组观测系统的监测点空间分布密度远大于待估 SRBF 系数应有的空间分辨率，而另一组观测系统只有数个监测量，则经法方程规范化后，只有数个监测点的观测系统，一般也不会因为组合了监测点分布稠密的其他组观测系统，而失去该组监测量对 SRBF 系数的敏感性。

组内监测量的观测权 $P_{ki}$ ，各组观测系统之间的系统权 $w_k$ ，以及各组系统监测量敏感待估 SRBF 系数的作用范围，可用于研究和控制负荷形变场反演的性能和质量。每组法方

程规范化参数 $Q_k$ 主要取决于其对应观测系统的设计矩阵 $A_k$ 结构, 至多随其内部观测权 $P_{ki}$ 的差异发生微小变化, 因而规范化参数 $Q_k$ 自身的可调节性小, 例如, 若组内监测量等权, 则第 $k$ 组规范化参数 $Q_k$ 仅由第 $k$ 组观测系统的设计矩阵 $A_k$ 唯一确定。

不同组观测系统的系统权 $w_k$ 主要用于体现不同观测系统质量的差异, 而与各组之间的监测量类型无关, 因而可按高度简化的方差分量估计法概略计算, 即先由每组系统的观测误差, 估计其对未知数的影响, 再对比分析各种观测系统观测误差对未知数的影响差异, 配置系统权值。其一般方法为: 先取 $w_k \equiv 1$ , 规范化并组合法方程, 获得 SRBF 系数初步估值, 将 SRBF 系数初步估值作为已知量, 分别代入各组系统的观测方程, 评估每组系统的观测质量, 更新各组观测系统的系统权 $\{w_k\}$ 。 $\{w_k\}$ 能快速收敛, 一般情况下, 一次估计就能稳定不变, 至多迭代估计一次,  $\{w_k\}$ 就不再有进一步优化的潜力。

设将 SRBF 系数初步估值代入第 $k$ 组系统观测方程后, 经统计获得该组监测量的方差为 $\sigma_k^2$ , 则由该组观测系统数学模型, 按误差传播定律并近似化后, 得

$$\tilde{\sigma}_{k,s}^2 = \frac{1}{(A_k^T A_k)_s} \sigma_k^2, \quad w_k = (\sum_s \tilde{\sigma}_{k,s}^2)^{-1} \quad (7.45)$$

式中:  $s$ 为待估 SRBF 系数的序号;  $\tilde{\sigma}_{k,s}^2$ 为第 $k$ 组系统相对第 $s$ 个 SRBF 系数的粗估方差。

由式 (7.45) 估算的系统权 $w_k$ , 仅是一个待估 SRBF 系数向量全局性统计指标, 难以体现不同观测系统对不同 SRBF 系数的敏感性差异, 通常需对比各种观测系统的方差 $\tilde{\sigma}_{k,s}^2$ 函数 (以 SRBF 系数序号 $s$ 为自变量) 曲线, 再根据实际情况分析优化系统权 $w_k$ 。这也意味着, 没有必要刻意强调由式 (7.45) 估算系统权 $w_k$ 的准确性问题。