

## 地表负荷 SRBF 逼近与负荷效应 SRBF 综合

ETideLoad4.5, 章传银

当负荷形变量为扰动位微分或其线性组合, 如扰动重力、垂线偏差、水平位移或重力梯度的负荷形变效应, 其负荷格林函数存在严重的高阶振荡与不收敛问题, 格林积分存在频谱泄漏与奇异性问题。负荷间接影响格林函数曲线如图 7.1 (横坐标为积分半径, 单位为 km)。

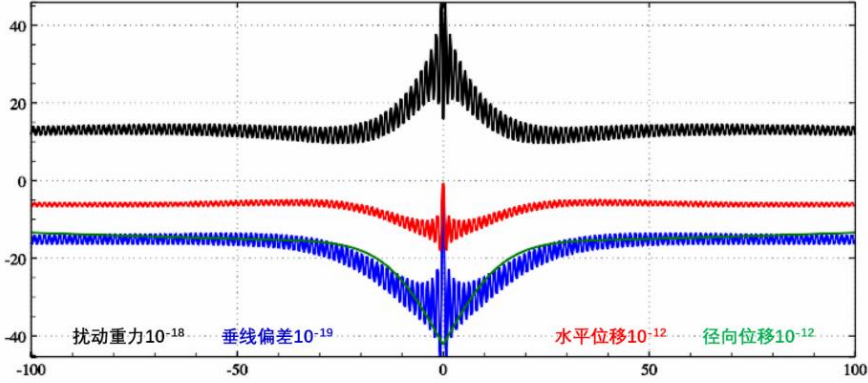


图 7.1 扰动位微分量负荷 Green 函数 (间接影响) 近区性质

不难发现, 采用负荷格林函数积分法计算扰动位微分量不占优的负荷形变量时, 如计算地面大地高、高程异常、正高或有明显垂直形变站点的地面重力、地倾斜负荷效应时, 能获得可接受的效果, 但在计算扰动重力、垂线偏差或水平位移负荷效应时, 积分结果很不稳定, 可靠性差。类似地, 在研究陆地水与地表环境负荷大地测量监测方法时, 当监测量是 GNSS 大地高变化时, 采用格林积分约束法估计, 可反演区域陆地水变化及其负荷形变场; 但若监测量中的扰动位微分量占优时, 如监测量为扰动重力、垂线偏差、水平位移或重力梯度变化时, 若采用负荷格林函数积分法约束, 由于格林函数的高阶振荡与不收敛, 法方程结构极不稳定, 因而难以获得稳定解。可见, 负荷格林函数积分法难以胜任多种大地测量监测数据融合与协同监测的需要。

### 8.7.1 地面负荷等效水高球面径向基函数表示

地面点  $\mathbf{x}$  处负荷等效水高变化  $\Delta h_w(\mathbf{x})$  可表示为规格化面球基函数的线性组合

$$\Delta h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \Delta \bar{F}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \quad (7.1)$$

式中:  $\mathbf{x} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = r(\sin\theta\cos\lambda, \sin\theta\sin\lambda, \cos\theta)$ ;  $\theta, \lambda, r$  分别是地球外部点  $\mathbf{x}$  的地心余纬、经度和地心距;  $\Delta \bar{F}_{nm}$  为完全规格化的 Stokes 系数 (位系数) 变化;  $a$  为地球长半轴, 表示规格化的面球基函数  $\bar{Y}_{nm}$  定义在半径等于  $a$  的球面上, 且

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) &= \bar{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda, \quad \bar{F}_{nm} = \delta\bar{C}_{nm}, \quad m \geq 0 \\ \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) &= \bar{P}_{n|m|}(\cos\theta)\sin|m|\lambda, \quad \bar{F}_{nm} = \bar{S}_{n|m|}, \quad m < 0\end{aligned}\quad (7.2)$$

式中： $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$ 为完全规格化缔合 Legendre 函数； $n$ 为位系数的阶， $m$ 为位系数的次。

面球函数也可等价地定义在半径为 $\mathcal{R}$ 的 Bjerhammar 球面上（Bjerhammar 球仅是习惯说法，与 Bjerhammar 边值问题无关）。地面等效水高变化 $\Delta h_w(\mathbf{x})$ 也可用 Bjerhammar 球面上的面球函数表示为

$$\Delta h_w(\mathbf{x}) = \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \Delta \bar{E}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \quad (7.3)$$

式中： $\mathcal{R} \in (a - \delta, a + \delta)$ ， $\delta \ll a$ ，显然有 $a^n \Delta \bar{F}_{nm} = \mathcal{R}^n \Delta \bar{E}_{nm}$ 。式 (7.3) 和式 (7.1) 中的面球函数基 $\{\bar{Y}_{nm}(\mathbf{e})\}$ 完全相同。

另一方面，地面负荷等效水高变化 $\Delta h_w(\mathbf{x})$ 也可表示为 $K$ 个 Bjerhammar 球面上球面径向基函数（Spherical Radial Basis Functions, SRBF）的线性组合

$$\Delta h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{k=1}^K d_k \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) \quad (7.4)$$

式中： $\mathbf{x}_k = \mathcal{R} \cdot \mathbf{e}_k$ 是定义在 Bjerhammar 球面上的 SRBF 节点，也称 SRBF 中心； $\psi_k$ 为球面径向基函数的自变量，是球面 SRBF 节点 $\mathbf{x}_k$ 到空间计算点 $\mathbf{x}$ 的球面角距； $d_k$ 为 SRBF 系数， $K$ 为 SRBF 节点数，也即 SRBF 系数个数，代表空间分辨率（作用类似于位系数个数）； $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_k(\mathbf{x}, \psi_k)$ 为地面等效水高变化的球面径向基函数，可简写为 $\Phi_k(\mathbf{x}) = \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

球面径向基函数 $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 可进一步展开成 Legendre 级数形式

$$\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_k(\mathbf{x}, \psi_k) = \sum_{n=1}^N \phi_n P_n(\psi_k) = \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.5)$$

式中： $\phi_n$ 为 SRBF 的 $n$ 阶 Legendre 系数，它表征了 SRBF 形状，基本决定了 SRBF 的空域和谱域性质，也称形状因子；在不强调谱域阶数 $n$ 时，也称 $B_n$ 为 SRBF 的 Legendre 系数； $\mu = \mathcal{R}/r$ 因与径向基函数 $\Phi_k(\mathbf{x})$ 的谱域带宽有关，也称为宽度参数。

式 (7.5) 中的 $N$ 为 Legendre 函数最大阶数，虽然是地面等效水高变化面球函数展开式 (7.3) 中的最大阶数，但实际上与代表空间分辨率的 SRBF 系数个数 $K$ 并没有明确的函数关系。

将式 (7.5) 代入式 (7.4) 得

$$\begin{aligned}\Delta h_w(\mathbf{x}) &= \frac{GM}{4\pi r} \sum_{n=1}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{k=1}^K d_k P_n(\psi_k) \\ &= \frac{GM}{4\pi r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=1}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k)\end{aligned}\quad (7.6)$$

顾及球谐函数加法定理：

$$P_n(\psi_k) = P_n(\mathbf{e}, \mathbf{e}_k) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (7.7)$$

则式 (7.6) 可写为

$$\Delta h_w(\mathbf{x}) = \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^N B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \sum_{k=1}^K d_k \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (7.8)$$

比较式 (7.1)、式 (7.3) 与式 (7.8), 可得

$$\Delta \bar{F}_{nm} = \left(\frac{R}{a}\right)^n \Delta \bar{E}_{nm} = B_n \left(\frac{R}{a}\right)^n \sum_{k=1}^K d_k \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (7.9)$$

当 SRBF 自变量  $\psi_k$  的作用域 (SRBF 中心的作用距离) 为全球  $\psi_k \in [0, \pi]$  时, 式 (7.9) 成立。利用式 (7.9), 就可由 SRBF 系数  $\{d_k\}$  计算位系数变化  $\{\Delta \bar{F}_{nm}\}$  或  $\{\Delta \bar{E}_{nm}\}$ , 进而按球谐综合算法计算各种要素的负荷形变效应。而用于局部负荷形变场逼近时, SRBF 自变量  $\psi_k$  类似于积分边界面上用球面角距表示的负荷 Green 积分距离。

SRBF 中心  $\mathbf{x}_k$  在 Bjerhammar 球面上的位置、分布和数量  $K$ , 是 SRBF 负荷形变场逼近的关键性指标, 决定了表达负荷形变场的空间自由度 (空间分辨率) 和空域特征。

### 8.7.2 适合负荷形变场监测的球面径向基函数

用于负荷形变场逼近的径向基函数应满足 Laplace 方程。常见的点质量核函数, Poisson 核函数、径向多极子核函数和 Poisson 小波核函数都是具有调和性质的径向基核函数。令  $\mathbf{x}$  为地球外部计算点,  $\mathbf{x}_k$  为 Bjerhammar 球面  $\Omega_R$  上的 SRBF 节点。

#### (1) 点质量核函数

点质量核函数是由 Hardy (1971) 提出的一种逆多面函数 (IMQ), 也是引力位积分公式  $V = G \iiint \frac{dm}{L}$  的核函数, 其解析表达式为

$$\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{L} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|} \quad (7.10)$$

式中:  $L$  为  $\mathbf{x}_k$  到  $\mathbf{x}$  的空间距离。点质量函数也即牛顿核函数 [式 (1.3.38)]。由于  $\Delta(1/L) = 0$ , 因此点质量核函数  $\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$  满足 Laplace 方程。

#### (2) Poisson 核函数

Poisson 核函数源于扰动重力场量的 Poisson 积分公式, 其解析表达式为

$$\Phi_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = -2r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{L}\right) - \frac{1}{L} = \frac{r^2 - r_k^2}{L^3} \quad (7.11)$$

#### (3) 径向多极子核函数

径向多极子核函数的解析表达式为

$$\Phi_{RM}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L} \quad (7.12)$$

式中： $m$ 可称为径向多极子核函数的次（order），零次径向多极子核函数( $m = 0$ )就是点质量核函数 $\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_{RM}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

#### (4) Poisson 小波核函数

Poisson 小波核函数的解析表达式为

$$\Phi_{PW}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = 2(\chi_{m+1} - \chi_m), \quad \chi_m = \left( r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L} \quad (7.13)$$

零次 Poisson 小波核函数( $m = 0$ )就是 Poisson 核函数 $\Phi_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_{PW}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

#### (5) 球面径向基函数计算

为突出负荷及其负荷形变场的谱域性质，通常将球面径向基函数解析表达式 (7.10) ~ 式 (7.13) 表示成 Legendre 级数形式 [式 (7.5)] 后，按 Legendre 级数计算。

为简化数学表达，可将球面径向基函数 $\phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 的 Legendre 级数进行归一化处理，计算归一化系数，用归一化后的 Legendre 级数展开式计算球面径向基函数。在处理多种类型监测量时，可将各种监测量的球面径向基函数统一除以扰动位球面径向基函数的归一化系数。归一化后，各种 j/c 监测函数关系不变。

令 $\mathbf{x}, \mathbf{x}_k$ 的球面角距 $\psi_k = 0$ ，则 $\cos\psi_k = 1$ ，顾及 $P_n(\cos\psi_k) = P_n(1) = 1$ ，代入式 (7.5)，得扰动位球面径向基函数归一化系数的通用表达式为

$$\Phi^0 = \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n \quad (7.14)$$

归一化后的扰动位球面径向基函数 Legendre 级数为

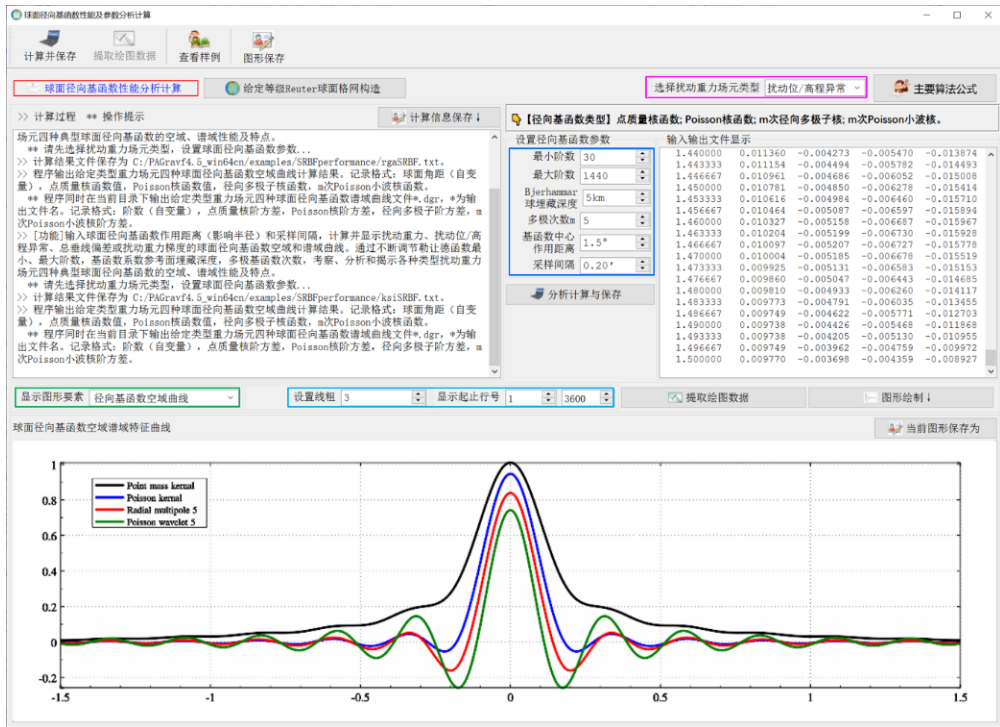
$$\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{\Phi^0} \sum_{n=1}^N \phi_n P_n(\psi_k) = \frac{1}{\Phi^0} \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n P_n(\psi_k) \quad (7.15)$$

ETideLoad4.5 采用式 (7.15) 计算归一化后的球面径向基函数，如图所示。上述四种形式的扰动位球面径向基函数及其对应的 Legendre 系数如表 7.1。

表 7.1 扰动位球面径向基函数及其 Legendre 系数

径向基函数	解析表达式 $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$	第 $n$ 阶形状因子 $\phi_n$	Legendre 系数 $B_n$
点质量核函数	$\frac{1}{L} = \frac{1}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}_k }$	$\mu^n$	$\frac{1}{2n+1}$
Poisson 核函数	$\frac{r^2 - r_k^2}{L^3}$	$(2n+1)\mu^n$	1
径向多极子核函数	$\frac{1}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L}$	$C_n^m \mu^{n-m} \quad (n \geq m)$	$\frac{C_n^m}{2n+1} \mu^{-m}$

Poisson 小波 核函数	$2(\chi_{m+1} - \chi_m)$ $\chi_m = \left(r_k \frac{\partial}{\partial r_k}\right)^m \frac{1}{L}$	$(-nl\ln\mu)^m (2n+1)\mu^n$	$(-nl\ln\mu)^m$
-------------------	---	-----------------------------	-----------------



归一化后四种球面径向基函数曲线计算

### (7) Reuter 格网构造与 SRBF 节点设计

可以采用全球和区域一致的球面等面积 Reuter 格网，根据给定的格网等级  $Q$ ，构造球面径向基函数 SRBF 节点（中心），再通过自适应算法，对比监测量的空间分布情况，使监测点空间分布与 SRBF 节点空间分布处处一致。Reuter 格网等级  $Q$  用于表示球面等面积格网的空间分辨率，其作用相当于全球重力位系数模型的最大阶数  $N_{maxn}$ 。

#### ① 单位球面 Reuter 格网及有关参数算法

给定 Reuter 格网等级  $Q$ （偶数），则球坐标系中单位球面 Reuter 格网的地心纬度间隔  $d\varphi$  和单元格网  $i$  中心的地心纬度  $\varphi_i$  算法公式为

$$d\varphi = \frac{\pi}{Q}, \quad \varphi_i = -\frac{\pi}{2} + \left(i - \frac{1}{2}\right) d\varphi, \quad 1 \leq i < Q \quad (7.16)$$

纬度  $\varphi_i$  处的平行圈方向单元格网数  $J_i$ 、经度间隔  $d\lambda_i$  与边长  $dl_i$  算法为

$$J_i = \left\lfloor \frac{2\pi \cos \varphi_i}{d\varphi} \right\rfloor = \lfloor 2Q \cos \varphi_i \rfloor, \quad d\lambda_i = \frac{2\pi}{J_i}, \quad dl_i = d\lambda_i \cos \varphi_i \quad (7.17)$$

式中： $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示取整运算。不难发现， $dl_i \approx d\varphi$ 。记

$$\varepsilon_i = \frac{ds_i - ds}{ds} = \frac{dl_i - d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\lambda_i}{d\varphi} \cos \varphi_i - 1 \quad (7.18)$$

式中： $ds$ 为赤道附近单元网格面积； $ds_i$ 为平行圈 $\varphi_i$ 处单元网格面积； $\varepsilon_i$ 表示平行圈单元网格面积相对赤道附近单元网格面积的相对偏差。 $\varepsilon_i$ 一般很小，约万分之几，具体数值与 Reuter 网格等级 $Q$ 有关。赤道附近单元网格面积 $ds = d\varphi \cdot d\varphi$ ，单元网格面积相对偏差 $\varepsilon_{Q/2} = 0$ 。

对于局部区域，给定目标区域经纬度范围，可直接按式 (7.16) 确定 $i$ 的最小最大值，再按式 (7.17) 计算每个平行圈处的最大 $J_i$ ，从而确定网格等级为 $Q$ 的区域 Reuter 网格，无需计算全球 Reuter 网格。

### ②自适应观测点分布的 SRBF 中心点设计

ETideLoad4.5 推荐一种简易的 Reuter 网格套合算法，以设计自适应监测点空间分布的 SRBF 中心点，其计算方案为：先由给定 Reuter 网格等级 $Q$ ，构造区域等面积 Reuter 网格，然后统计每个 SRBF 中心点（节点）所在单元 Reuter 网格内的有效监测点数 $j$ ，当 $j$ 小于设计最少监测点数时（将最少监测点数作为输入参数），剔除该 SRBF 中心点，遍历所有单元 Reuter 网格后，就可得到适应观测点空间分布的 SRBF 网络（SRBF 中心点集）。

显然，当监测点为规则网格时，SRBF 节点也呈现规则分布；当监测点分布不规则时，SRBF 节点分布也不规则，监测点分布密度大的地方，SRBF 节点分布密度也大。可见，SRBF 中心点空间分布与监测点空间分布处处一致。

令全球重力位系数模型最大阶数为 $N_{maxn}$ ，让 Reuter 网格等级 $Q = N_{maxn}$ 。对于全球性球面均匀 Reuter 网格，SRBF 中心点数量 $K$ 与 Reuter 网格等级 $Q$ 之间存在关系

$$K = \sum_{i=1}^Q J_i = \sum_{i=1}^Q \lfloor 2Q \cos \varphi_i \rfloor > N_{maxn} (N_{maxn} + 2) \quad (7.19)$$

式 (7.19) 表明，对于全球时变重力场监测目的，全球性球面 SRBF 系数个数 $K$ （即 SRBF 中心点数量）略大于位系数个数 $N_{maxn} (N_{maxn} + 2)$ 。

### 8.7.3 负荷及形变效应径向基函数参数形式

依据负荷形变球谐级数展开式 (2.8) ~ 式 (2.20)，可由式 (7.3.3) 地面负荷球面径向基函数展开式，导出各种大地测量要素负荷形变效应的 SRBF 系数参数化形式如下

$$\Delta h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N (2n+1) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.20)$$

$$\Delta \zeta = \frac{3\rho_w}{\rho_e} \frac{GM}{\gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n (1+k'_n) \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.21)$$

$$\Delta g^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1) \left(1 + \frac{2}{n} h'_n - \frac{n+1}{n} k'_n\right) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (7.22)$$

$$\Delta g^\delta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1) (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (7.23)$$

$$\Delta \xi^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n (1+k'_n - h'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.24)$$

$$\Delta \eta^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n (1+k'_n - h'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.25)$$

$$\Delta \xi = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.26)$$

$$\Delta \eta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.27)$$

$$\text{水平东向} \Delta e = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n l'_n B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.28)$$

$$\text{水平北向} \Delta n = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n l'_n B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.29)$$

$$\text{径向位移} \Delta r = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n h'_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.30)$$

$$\text{正(常)高变化} \Delta h = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n (h'_n - k'_n - 1) \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.31)$$

$$\Delta T_{rr} = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^3} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1)(n+2)(1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (7.32)$$

$$\Delta T_{nn} = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^3} \sum_{k=1}^K d_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \varphi_k^2} \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial^2 P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k^2} \quad (7.33)$$

$$\Delta T_{ww} = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^3 \cos^2 \varphi} \sum_{k=1}^K d_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \lambda_k^2} \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial^2 P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k^2} \quad (7.34)$$

若已知地表负荷等效水高变化 $\Delta h_w$ ，可按式(7.20)对负荷等效水高变化 $\Delta h_w$ 进行最小二乘SRBF谱域分析，求解SRBF系数 $\{d_k\}$ ，这个过程可称为负荷SRBF逼近或SRBF分析；进而按SRBF系数与负荷数之积的SRBF综合算法，由SRBF系数 $\{d_k\}$ ，按式(7.21)~式(7.34)计算大地测量全要素负荷形变效应，这个过程可称为负荷效应SRBF综合。

为考察球面径向基函数的近区性质，选择点质量函数为球面径向基函数，最小阶数和最大阶数分别为90和1800阶，令Bjerhammar球埋藏深度5km，SRBF中心最大作用距离150km，计算与图7.1类型相同的重力、垂线偏差、地面水平位移和径向位移负荷效应的SRBF空域曲线，如图7.3。

比较图7.1和图7.2可以看出，即使是地面大地高负荷效应，近区SRBF函数的收敛性质也明显优于负荷格林函数。扰动重力、垂线偏差、水平位移负荷效应的SRBF函数在

20km 内的近区都是单调收敛的。采用负荷 SRBF 逼近及负荷形变场 SRBF 综合法代替，能有效解决负荷格林函数在近区的高阶振荡与不收敛问题。

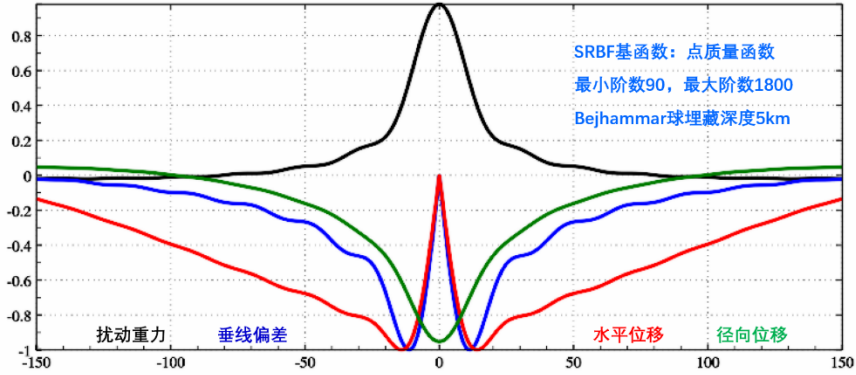


图 7.2 扰动位微分量负荷效应 SRBF 近区性质

地面负荷形变效应径向基函数的算法公式，需要球面角距 $\psi$ 的水平一、二阶偏导数，下面给出球坐标系中的推导过程。

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos \alpha, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos \varphi \sin \alpha \quad (7.35)$$

式中： $\alpha$ 是球面角距 $\psi$ 的大地方位角，由球面三角公式可得：

$$\sin \psi \cos \alpha = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (7.36)$$

$$\sin \psi \sin \alpha = \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) \quad (7.37)$$

将 (7.36) 式两边对 $\varphi$ 求偏导，顾及 (7.34) 式，有

$$-\cos \psi \cos^2 \alpha + \sin \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\sin \varphi \sin \varphi' - \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (7.38)$$

从而可得：

$$\sin \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\sin \varphi \sin \varphi' - \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) + \cos \psi \cos^2 \alpha \quad (7.39)$$

同理，将 (7.37) 式两边对 $\lambda$ 求偏导，有

$$-\cos \psi \cos \varphi \sin^2 \alpha + \sin \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} = -\cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) \quad (7.40)$$

$$\sin \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} = -\cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) + \cos \psi \cos \varphi \sin^2 \alpha \quad (7.41)$$

#### 8.7.4 区域高分负荷形变场 SRBF 逼近与综合

类似于负荷球谐系数模型参考场与残差负荷格林积分组合的局部负荷形变场逼近方法，区域高分负荷形变场 SRBF 逼近也可采用负荷球谐系数模型参考场与残差负荷 SRBF 谱域逼近的组合方案，即用残差负荷 SRBF 谱域逼近代替残差负荷格林积分。

#### 8.7.4.1 负荷 SRBF 逼近与负荷形变场 SRBF 综合

与全球负荷球谐分析与负荷形变场球谐综合计算流程一样，残差负荷 SRBF 谱域逼近方案也由两个大步骤构成。第一步，依据区域地表负荷 SRBF 谱域展开式 (7.19)，由区域残差负荷等效水高变化，按照最小二乘法，估计球面径向基函数系数 $\{d_k\}$ ，我们称此步骤为区域负荷 SRBF 分析及逼近；第二步，依据区域负荷形变场 SRBF 综合算法公式 (7.20) ~ (7.33)，由球面径向基函数系数 $\{d_k\}$ ，计算各种大地测量要素的残差负荷形变效应。我们称此步骤为区域负荷形变场 SRBF 综合。

类似于球谐分析法估计全球负荷球谐系数方案，可以采用迭代累积 SRBF 分析法，提高地面负荷的 SRBF 逼近水平。

#### 8.7.4.2 移去恢复法区域高分负荷形变场 SRBF 逼近计算

区域高分负荷形变场 SRBF 逼近，也可采用移去恢复法，即将“移去-负荷格林函数积分-恢复”方案中的“负荷格林函数积分”替换成“负荷 SRBF 谱域逼近”。其中，“负荷 SRBF 谱域逼近”，采用较小的 SRBF 中心作用距离（作用类似于格林函数积分半径），通过区域负荷 SRBF 分析及逼近，与区域负荷形变场 SRBF 综合，获取高分辨率负荷形变场格网的残差值。该移去恢复方案可称为“移去-负荷 SRBF 谱域逼近-恢复”方案。

下面以中国南部某区域 2018 年 5 月 30 日一个采样历元的  $1' \times 1'$  陆地水等效水高变化格网 (cm)（以该区域陆地水变化 2018 年平均值为监测基准）为例，说明移去恢复法区域高分负荷形变场 SRBF 逼近计算步骤和要点。这里的陆地水，仍然只包括了 4m 以浅土壤水、湿地及植被水含量，但不包括河流水和地下水。参考负荷形变场采用 8.2.6 节构造的 2018 年 5 月 30 日 360 阶全球陆地水变化球谐系数模型。

与移去-负荷格林函数积分-移去恢复方案一样，要求负荷等效水高格网数据的区域范围（数据区域），应在负荷形变场精化区域（成果区域）基础上向四周扩展 SRBF 中心作用距离，以抑制负荷 SRBF 逼近的边缘效应。本例数据区域  $E97^\circ \sim 103^\circ$ ， $N24^\circ \sim 29^\circ$ ，成果区域  $E98.5^\circ \sim 101.5^\circ$ ， $N25.5^\circ \sim 27.5^\circ$ 。

第一步：输入计算区域  $1' \times 1'$  零值格网（零值表示相对地面的高度等于零），由全球陆地水负荷球谐系数模型，选择最大计算阶数 360 阶，计算区域  $1' \times 1'$  陆地水负荷等效水高变化参考模型值格网，如图 7.3 中。

第二步：将  $1' \times 1'$  陆地水等效水高变化观测量格网（如图 7.3 左），减去其参考模型值格网（图 7.3 中），生成  $1' \times 1'$  陆地水负荷等效水高变化残差值格网（图 7.3 右）。

第三步：依据区域地表负荷 SRBF 谱域展开式 (7.19)，由  $1' \times 1'$  陆地水负荷等效水高变化残差格网，按迭代最小二乘法，估计 SRBF 系数，以累积逼近陆地水负荷等效水高变

化残差格网, 进而由 SRBF 系数, 依据区域负荷形变场 SRBF 综合算法公式(7.20)~(7.33), 计算  $1' \times 1'$  陆地水变化负荷形变场残差值格网, 如图 7.4。

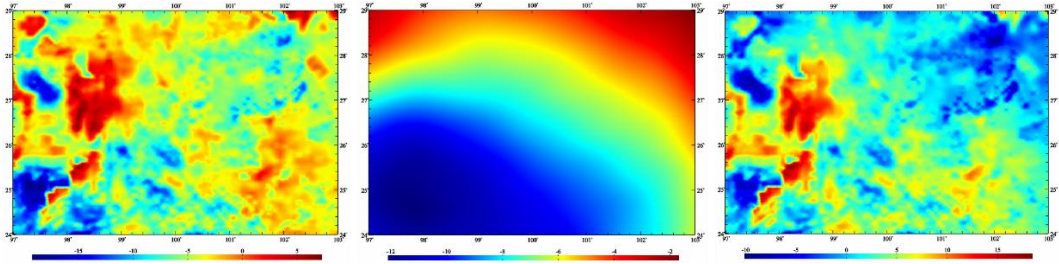


图 7.3 计算区域  $1' \times 1'$  陆地水等效水高变化观测值、参考值与残差值 (cm) 格网

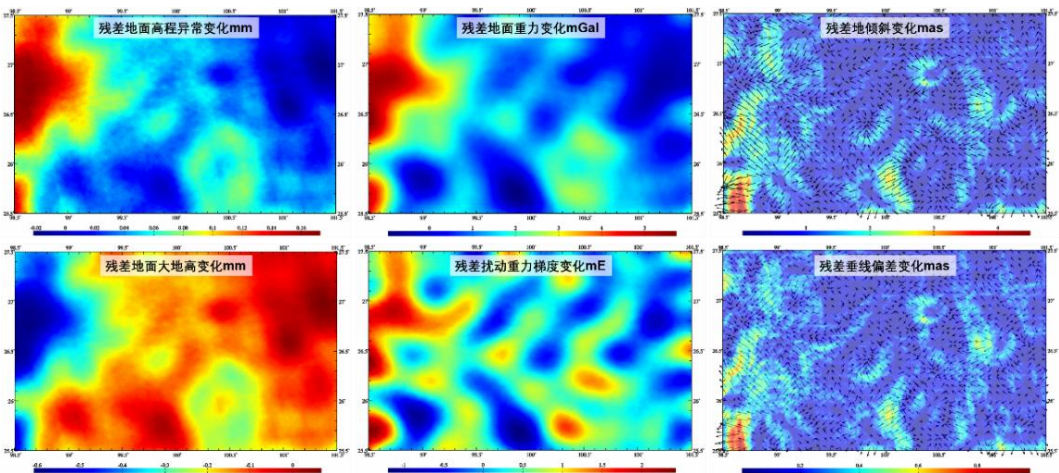


图 7.4 负荷 SRBF 谱域逼近的  $1' \times 1'$  残差陆地水变化负荷形变场格网

第四步: 输入成果区域  $1' \times 1'$  零值格网 (零值表示相对地面的高度等于零), 全球陆地水负荷球谐系数模型, 选择最大计算阶数 360 阶, 计算成果区域  $1' \times 1'$  陆地水变化负荷形变场参考模型值格网。

第五步: 将成果区域  $1' \times 1'$  负荷形变场残差值格网, 与陆地水变化负荷形变场参考模型值格网相加, 获得成果区域  $1' \times 1'$  陆地水变化负荷形变场格网成果, 如图 7.5。

与 8.5.5 节“移去-负荷格林函数积分-恢复”流程比较, 不难发现, “移去-负荷 SRBF 谱域逼近-恢复”方案与“移去-负荷格林函数积分-恢复”方案, 除第三步不同外, 其余的第一、二、四、五步完全一样。

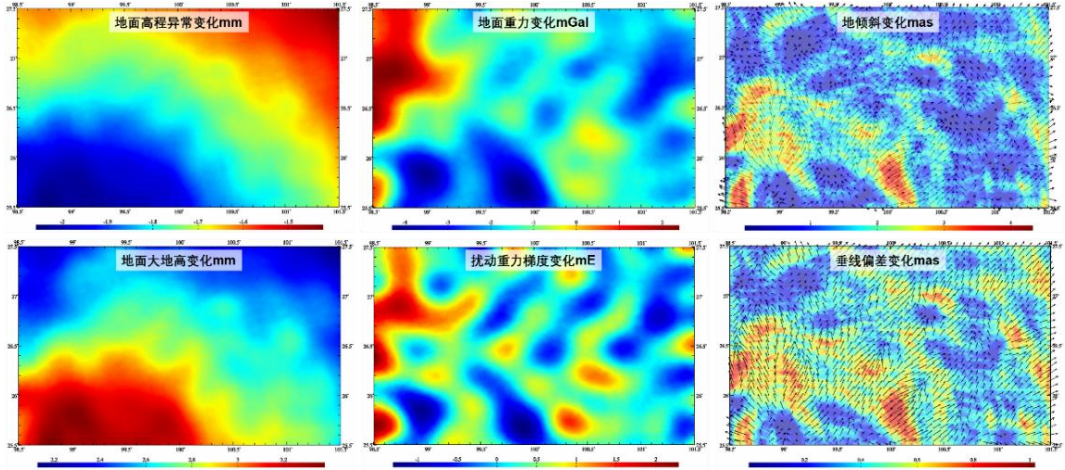


图 7.5 移去-负荷 SRBF 谱域逼近-恢复法计算的 1'×1'陆地水变化负荷形变场格网

### 8.7.4.3 远区外边界 SRBF 系数零约束方法

将表 7.1 中负荷等效水高径向基函数对应的球面径向基函数勒让德系数  $B_n$  代入 (7.19) 式, 就是以残差地面等效水高变化  $\Delta\tilde{h}_w(\mathbf{x}_i)$  为观测量, 球面径向基函数系数  $d_k$  为未知数的地面负荷 SRBF 逼近基本观测方程

$$\mathbf{L} = \{\Delta\tilde{h}_w(\mathbf{x}_i)\}^T = \mathbf{A}\{d_k\}^T + \boldsymbol{\epsilon} \quad (i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, K) \quad (7.42)$$

式中:  $\mathbf{A}$  为  $M \times K$  设计矩阵,  $\boldsymbol{\epsilon}$  为  $M \times 1$  观测量误差向量;  $M$  为观测量个数,  $K$  为 SRBF 极点数即未知数  $d_k$  个数;  $\mathbf{x}_i$  为观测量所在地面点的大地坐标。

当 SRBF 节点  $v \in (1, \dots, K)$  位于计算区域边缘时, 令其对应的 SRBF 系数等于零即  $d_v = 0$ , 将其作为观测方程, 可抑制边缘效应, 从而提升 SRBF 系数  $\{d_k\}$  参数估计的稳定性和可靠性。采用附加抑制边缘效应约束的法方程变为:

$$[\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} \boldsymbol{\epsilon}]\{d_k\}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (7.43)$$

式中:  $\boldsymbol{\epsilon}$  为对角线矩阵, 当且仅当其下标对应的 SRBF 中心位于区域边缘时等于 1, 其余为零;  $\mathbf{Q}$  为法方程系数阵  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$  对角线非零元素均方根。

为保持负荷形变场逼近性能的空间一致性, 在构建观测方程 (7.41) 过程中, 通常要求所有 SRBF 中心的作用距离  $dr$  相等。  $dr$  相应于 SRBF 自变量的定义域, 即任一观测量仅用半径  $dr$  范围内 SRBF 节点球面径向基函数的线性组合表示。SRBF 中心作用距离  $dr$  等效于负荷格林函数的积分半径。

引入边缘效应抑制方法后, 法方程不再需要正则化和迭代计算, 从而避免负荷形变场 (时变重力场) 的解析结构受监测量误差影响, 可有效提高算法的普适性和可靠性。残差负荷每次逼近等价于以上次累积的负荷为参考场, 按移去恢复法计算剩余残差负荷。通

常一般累积 1~2 次可达到稳定解。残差负荷累积逼近有效性一般性原则：(1) 负荷形变场空间连续可微，(2) 负荷等效水高的残差标准差明显减小，残差统计平均值趋于零。

实际计算时，可先让累积逼近次数等于零，优化调整首次逼近的合适参数，再固定首次逼近参数，优化调整累积逼近参数。

#### 8.7.6.4 与“移去-负荷格林函数积分-恢复”法对比分析

将 8.7.6.2 节移去-负荷 SRBF 谱域逼近-恢复法计算流程的第三步，换成负荷格林函数积分，就变成“移去-负荷格林函数积分-恢复”流程。

第三步时，输入成果区域 1'×1' 零值格网（零值表示相对地面的高度等于零），选择积分半径 150km（约等于上述 SRBF 中心作用距离），由计算区域 1'×1' 陆地水负荷等效水高变化残差格网，按负荷格林函数积分法，直接计算成果区域 1'×1' 负荷形变场残差值格网时间序列。结果如图 7.6。

比较图 7.4 和图 7.6 可以看出，负荷格林函数积分与负荷 SRBF 谱域逼近计算的负荷形变场残差值格网，各种要素变化的空间分布特征都相似，在数值上负荷格林函数积分结果要大些，而负荷谱域逼近结果的空间短波结构丰富。

同样，将负荷格林函数积分成果区域 1'×1' 负荷形变场残差值格网，与陆地水变化负荷形变场参考模型值格网相加，获得“移去-负荷格林函数积分-恢复”法成果区域 1'×1' 陆地水变化负荷形变场格网成果。

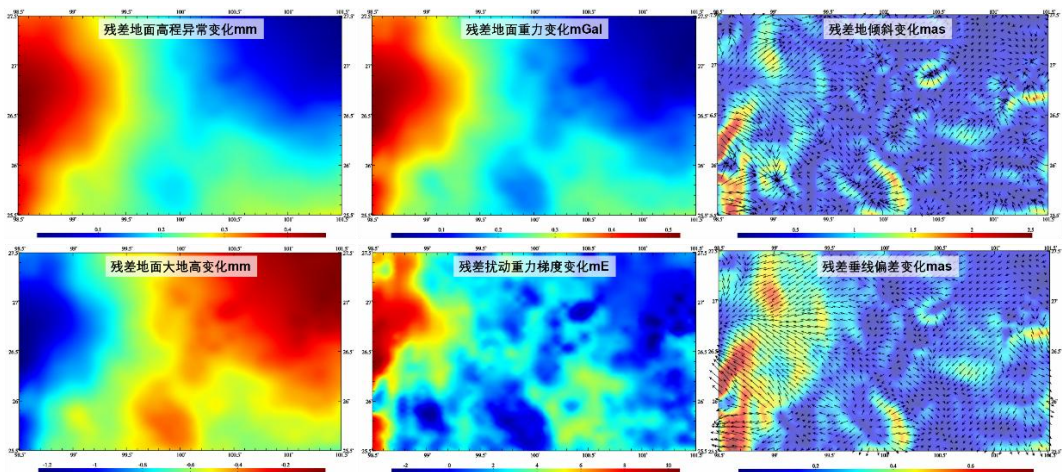


图 7.6 负荷格林函数积分计算的 1'×1' 残差陆地水变化负荷形变场格网