高程系统及其相互之间重力场解析关系

7.11.1 高程系统与重力场的解析关系

设地面点 A 的重力位为W_A，Q 点与 A 点经纬度相同，其正常重力位U_Q等于 W_A，则 Q 位于 A 的似地形面上，QA 为 A 点的高程异常ζ_A（牵头向下表示$\zeta_A<0$），如图 1（大陆高海拔地区，地面高程异常$\zeta<0$，似地形面在地面上方）。

不失一般性，令高程基准零点重力位W_R、大地水准面重力位W_G（$=U_0$正常椭球面正常重力位）和全球大地位W_0（可理解为全球高程基准零点重力位）完全相等，即：

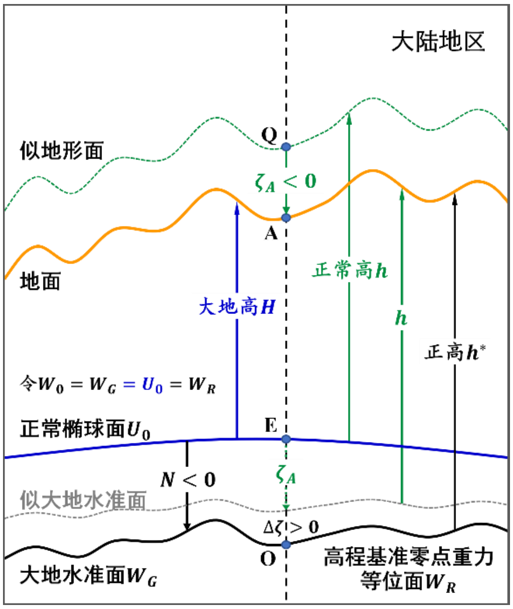
$$W_0=W_G=W_R \tag{11.1}$$

此时，大地水准面是重力位等于椭球面正常位的封闭曲面，高程基准位差等于零，即$\delta W_R=W_0-W_R=0$。高程基准零点重力位W_R与地面点 A 的重力位W_A之差，称为 A 点的重力位数$c_A=W_R-W_A=W_0-W_A$。

正高在地球重力场空间中定义，它是地面点 A 的重力位数c_A与地面点 A 到高程基准零点重力等位面 O 之间平均重力$\bar{g}_A$的比值：

$$h_A^*=\frac{c_A}{\bar{g}_A}=\frac{W_R-W_A}{\bar{g}_A}=\frac{W_0-W_A}{\bar{g}_A}=\frac{1}{\bar{g}_A}\int_O^A g dn \tag{11.2}$$

式中：dn为地面点 A 到高程基准零点重力等位面 O 之间的线元，g为线元处的重力。



正常高在正常重力场空间中定义，它是地面点 A 处似地形面 Q 的正常重力位数$(=U_0-U_Q)$与似地形面 Q 到正常椭球面 E 之间平均正常重力$\bar{\gamma}_Q$的比值：

$$h_A=\frac{U_0-U_Q}{\bar{\gamma}_Q}=\frac{1}{\bar{\gamma}_Q}\int_E^Q \gamma dN \tag{11.3}$$

式中：dN为似地形面 Q 到正常椭球面 E 之间的线元，γ为线元处的正常重力。

Molodensky 条件假设 A 点处似地形面 Q 的正常重力位数等于 A 点的重力位数，即$U_0-U_Q=c_A=W_0-W_A$，将其代入（11.3）式，就是 Molodensky 正常高：

$$h_A=\frac{U_0-U_Q}{\bar{\gamma}_Q}=\frac{W_0-W_A}{\bar{\gamma}_Q}=\frac{c_A}{\bar{\gamma}_Q}=\frac{1}{\bar{\gamma}_Q}\int_O^A g dn \tag{11.4}$$

式（11.4）即为中国高程系统采用的正常高定义式。

若 A 点的正高等于零$h_A^*=0$，由正高系统定义式（11.2）可得，A 点的重力位数等于零$c_A=0$，代入正常高系统定义式（11.4），可得正常高也等于零$h_A=0$。这种情况下，A 点的重力位等于大地水准面重力位$W_A=W_G$，即 A 点在大地水准面上。可见，零正高

面、零正常高、零重力位数面与大地水准面重合，因此，无论是正高系统、正常高系统，还是重力位数系统，高程基准面唯一，都是大地水准面（或高程基准零点等位面）。

7.11.2 高程系统之间的严密解析关系

Stokes 边值问题解是大地水准面及其外部整个地球空间的扰动位，即 Stokes 边值问题同时确定了大地水准面和大地水准面外部空间的高程异常（广义 Stokes 公式）。可见，地面高程异常也是 Stokes 边值问题解。特别地，Stoke 边值问题解约束了地面高程异常ζ与大地水准面高N之间的严密解析关系：

$$\zeta = N + \Delta\zeta = N + \int_0^{h^*} \frac{\partial \zeta}{\partial h} dh = N - \int_0^{h^*} \frac{\delta g}{\gamma} dh \tag{11.5}$$

式中：dh为地面到大地水准面之间的线元，δg、γ分别为线元处的扰动重力（解析扰动重力）和正常重力。

式（11.5）中的$\Delta\zeta$为高程异常与大地水准面高之差，也即正高与正常高之差。正高与正常高差别计算程序 5.1，可用于此项计算。

依据 Stokes 边值问题解基本条件，地面到大地水准面之间的重力，应等价于地面及其外部重力解析延拓到该点处的重力（简称解析重力g^*），而不是被地形质量包围的实际重力g。解析重力g^*与 Stokes 边值问题解具有严密解析关系。Stokes 边值问题解条件要求，在地面及其外部，实际重力与解析重力处处相等。

Stokes 边值问题解还指出，大地水准面上的高程异常ζ_o即为大地水准面高N。由此可得，零正常高面与零正高面处处重合，统一于大地水准面（严格地说，统一于重力位等于高程基准零点重力位的等位面）。

在困难山区，通过联测地面点的重力，或利用区域重力场数据精化积分线元上解析扰动重力，可有效提高（11.5）式中$\Delta\zeta = \zeta - N$的确定精度。

将正高定义式（11.2）中的平均重力和积分线元重力用解析重力替换，就得到满足 Stokes 边值问题解要求（上述“解析相容”的含义）的严密正高定义：

$$h_A^* = \frac{1}{\bar{g}_A^*} \int_O^A g^* dn \tag{11.6}$$

零正高面与零正常高面重合，都是大地水准面。显然，有也仅有解析重力g^*，才能保证正高、正常高、高程异常、大地水准面及其相互关系，在 Stokes 边值理论中解析相容。PAGravf4.5 将这种类型的严密正高称为解析正高。

7.11.3 似大地水准面为基准面的问题

大地水准面（或高程基准零点重力等位面），能通过其重力位值唯一确定或持续精化，将其作为高程基准面，符合大地测量基准唯一性要求。但是，将似大地水准面视为正常高起算（基准）面，理论上不严密：

（1）零正常高面是大地水准面（重力位等于高程基准零点重力位的等位面），并不是所谓的似大地水准面。

（2）经纬度相同、高度不等的两个点，高程异常不相等，因此，若认为正常高由似大地水准面起算，在垂直方向就存在两个不同的起算点。

（3）似大地水准面可看成大地高等于地面高程异常的曲面，但地面永远无法用格网数字模型唯一表达，似大地水准面存在不确定性。

通常情况下，实际测点不会正好落在似大地水准面精化（或确定）时所选择的特定地面高程数字模型面上，在厘米级高程基准应用中，需要对似大地水准面模型，增加一项高程异常梯度（或扰动重力）改正（计算程序见 5.1）。

可见，虽然正常高系统定义严密，但将似大地水准面作为高程基准起算面是不严密的。PAGravf4.5 淡化似大地水准面概念，也不将似大地水准面看作正常高的基准面，PAGravf4.5 中的高程异常与其所在空间位置严格一一对应。