

全球负荷球谐分析与负荷形变场球谐综合

8.3.1 地表负荷等效水高球谐函数表示

地球表层大气、土壤水、江河湖库水、冰川冰盖雪山、地下水和海平面变化，都是非潮汐的，这些地表非潮汐负荷变化可用地面等效水高变化 h_w 或地表单位点质量负荷 $q_w = \rho_w h_w$ （也称地表面密度， ρ_w 为水的密度）统一表示。

地表非潮汐负荷变化 h_w （地表物质迁移）直接引起地球外部重力位变化，对地面或地球外部点 (r, θ, λ) 重力位（或扰动位）产生直接影响 $T_t(r, \theta, \lambda)$ ，可由（1.1.69）式表示为：

$$T_t^d(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (3.1)$$

式中： r 为地表非潮汐负荷所在位置的地心向径（地心距）， $(\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm})$ 为地表非潮汐负荷变化（即地面等效水高变化 h_w ）直接引起的规格化球谐系数变化，即全球重力位模型 Stokes 系数的直接影响，可按面密度引力位定义计算：

$$\begin{cases} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{cases} = \frac{3}{4\pi a \rho_e (2n+1)} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_S \rho_w h_w \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases} \sin\theta d\theta d\lambda dr \quad (3.2)$$

式中： $\int_S \cdot ds$ 为全球地面积分， $ds = \sin\theta d\theta d\lambda dr$ ， ρ_e 为地球平均密度。

地面点 $(r_0 \approx a, \theta, \lambda)$ 的等效水高变化 h_w 也可表示为规格化负荷球谐级数：

$$h_w(r_0, \theta, \lambda) = r_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{C}_{nm}^w \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm}^w \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (3.3)$$

式中： $\Delta \bar{C}_{nm}^w, \Delta \bar{S}_{nm}^w$ 为 n 阶 m 次规格化负荷球谐系数。

考虑到全球地表非潮汐变化负荷一般情况下中长波占优， n 不会太大，而地面负荷的地心向径 $r_0 \approx a$ ，因此有 $\left(\frac{a}{r_0}\right)^n \approx 1$ ，则式（3.3）可简化为：

$$h_w = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{C}_{nm}^w \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm}^w \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (3.4)$$

比较（3.2）和（3.3）式，可得：

$$\begin{cases} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{cases} = \frac{3\rho_w}{\rho_e} \frac{1}{2n+1} \begin{cases} \Delta \bar{C}_{nm}^w \\ \Delta \bar{S}_{nm}^w \end{cases} \quad (3.5)$$

式（3.5）即为任意阶次 n, m 地面等效水高变化规格化球谐系数 $\{\Delta \bar{C}_{nm}^w, \Delta \bar{S}_{nm}^w\}$ 与地面扰动位规格化球谐系数直接影响 $\{\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm}\}$ 之间的关系式。

8.3.2 负荷形变场规格化球谐函数展开

由负荷形变理论可知，地面等效水高变化 h_w 还导致固体地球形变，致使地球质量进一步调整，产生附加引力位，间接引起地面重力位（地面扰动位）变化，称为地面等效水高变化的间接影响，用负荷勒夫数或负荷潮因子表征。

由任意阶次 n, m 地面等效水高变化规格化球谐系数 $\{\Delta\bar{C}_{nm}^w, \Delta\bar{S}_{nm}^w\}$, 导致地面扰动位规格化球谐系数 (全球重力位模型 Stokes 系数) 的总影响, 等于其直接影响和间接影响之和 (注意区分直接影响、间接影响与总影响), 即

$$\begin{cases} \Delta\bar{C}_{nm}^* \\ \Delta\bar{S}_{nm}^* \end{cases} = (1 + k'_n) \begin{cases} \Delta\bar{C}_{nm} \\ \Delta\bar{S}_{nm} \end{cases} = \frac{3\rho_w}{\rho_e} \frac{1+k'_n}{2n+1} \begin{cases} \Delta C_{nm}^w \\ \Delta S_{nm}^w \end{cases} \quad (3.6)$$

式中: k'_n 为 n 阶位负荷勒夫数。

由扰动重力场球谐展开式与负荷形变理论, 可得由地面等效水高变化规格化球谐系数 $\{\Delta\bar{C}_{nm}^w, \Delta\bar{S}_{nm}^w\}$ 计算地面或地球外部空间点 (r, θ, λ) 处重力位 (扰动位) 负荷效应 $T_t(r, \theta, \lambda)$ 的球谐综合式为:

$$T_t(r, \theta, \lambda) = \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \frac{1+k'_n}{2n+1} \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm}^w \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm}^w \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (3.7)$$

式中: $\kappa = \frac{GM}{r} \frac{3\rho_w}{\rho_e}$ 。由 Bruns 公式, 可得地面或地球外部空间点 (r, θ, λ) 处高程异常负荷效应 $\zeta_t(r, \theta, \lambda)$ 的球谐综合式:

$$\zeta_t = \frac{\kappa}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \frac{1+k'_n}{2n+1} \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm}^w \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm}^w \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (3.8)$$

式中: γ 为计算点的正常重力。同理, 可得地面重力负荷效应球谐综合计算式 \odot

$$g_t(r_0, \theta, \lambda) = \frac{\kappa}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left(1 + \frac{2}{n} h'_n - \frac{n+1}{n} k'_n\right) \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm}^w \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm}^w \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (3.9)$$

式中: h'_n 为 n 阶径向负荷勒夫数; (r_0, θ, λ) 为地面点的球坐标。

地面或地球外部空间点 (r, θ, λ) 处扰动重力负荷效应球谐综合计算式:

$$\delta g_t(r, \theta, \lambda) = \frac{\kappa}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} (1 + k'_n) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm}^w \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm}^w \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (3.10)$$

与 (3.9) 式相比, (3.10) 式不含地面径向位移影响, 因此, (3.9) 式仅适用于计算点位与地球固连的重力负荷效应, 而 (3.10) 式适用于计算地面及地面外部空间任意点 (如航空高度、卫星高度或海洋空间) 的扰动重力负荷效应。为严格区分这两种情况, 这里将仅适用于点位与地球固连情况下的计算式标注 \odot 。

地倾斜负荷效应球谐综合计算式 \odot

$$\begin{aligned} \text{南向: } \xi^s(r_0, \theta, \lambda) &= \frac{\kappa}{\gamma r_0} \sin\theta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+k'_n-h'_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \\ &\sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm}^w \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm}^w \sin m\lambda) \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \text{西向: } \eta^s(r_0, \theta, \lambda) &= \frac{\kappa}{\gamma r_0 \sin \theta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+k'_n-h'_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \\ &\quad \sum_{m=1}^n m(\Delta \bar{C}_{nm}^w \sin m \lambda - \Delta \bar{S}_{nm}^w \cos m \lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.12)$$

地面或地球外部空间点 (r, θ, λ) 处垂线偏差负荷效应球谐综合计算式

$$\begin{aligned} \text{南向: } \xi(r, \theta, \lambda) &= \frac{\kappa \sin \theta}{\gamma r} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+k'_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \\ &\quad \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^w \cos m \lambda + \Delta \bar{S}_{nm}^w \sin m \lambda) \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \text{西向: } \eta(r, \theta, \lambda) &= \frac{\kappa}{\gamma r \sin \theta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+k'_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \\ &\quad \sum_{m=1}^n m(\Delta \bar{C}_{nm}^w \sin m \lambda - \Delta \bar{S}_{nm}^w \cos m \lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.14)$$

地面站点 (r_0, θ, λ) 位移负荷效应球谐综合计算式 \odot

$$\begin{aligned} \text{东方向: } e(r_0, \theta, \lambda) &= -\frac{\kappa}{\gamma r \sin \theta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{l'_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \\ &\quad \sum_{m=1}^n m(\Delta \bar{C}_{nm}^w \sin m \lambda - \Delta \bar{S}_{nm}^w \cos m \lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \text{北方向: } n(r_0, \theta, \lambda) &= -\frac{\kappa \sin \theta}{\gamma r} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{l'_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \\ &\quad \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^w \cos m \lambda + \Delta \bar{S}_{nm}^w \sin m \lambda) \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \text{径向: } r(r_0, \theta, \lambda) &= \frac{\kappa}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h'_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \\ &\quad \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^w \cos m \lambda + \Delta \bar{S}_{nm}^w \sin m \lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.17)$$

地面或地球外部空间点 (r, θ, λ) 处扰动重力梯度负荷效应(径向)球谐综合计算式

$$\begin{aligned} T_{rr}(r, \theta, \lambda) &= \frac{\kappa}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2n+1} (1+k'_n) \left(\frac{a}{r}\right)^n \\ &\quad \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^w \cos m \lambda + \Delta \bar{S}_{nm}^w \sin m \lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.18)$$

地面或地球外部空间点 (r, θ, λ) 处水平重力梯度负荷效应球谐综合计算式

$$\begin{aligned} \text{北向: } T_{NN}(r, \theta, \lambda) &= -\frac{\kappa}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+k'_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \\ &\quad \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^w \cos m \lambda + \Delta \bar{S}_{nm}^w \sin m \lambda) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \text{西向: } T_{WW}(r, \theta, \lambda) &= -\frac{\kappa}{r^2 \sin^2 \theta} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+k'_n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \\ &\quad \sum_{m=1}^n m^2 (\Delta \bar{C}_{nm}^w \sin m \lambda + \Delta \bar{S}_{nm}^w \cos m \lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.20)$$

在(3.8)~(3.20)中, 凡标注 \odot 的大地测量要素(观测量或参数), 只有其点位与地球固连情况下有效。

依据 Farrell 地表负荷形变理论，采用球对称无旋转弹性地球模型 PREM 有关参数，计算地表单位点质量负荷（地表面密度， 1 kg/m^2 ）作用下的负荷勒夫数。 n 阶径向、水平和位负荷勒夫数 h'_n 、 l'_n 和 k'_n 计算结果如表 3.1。

表 3.1 负荷勒夫数取值

阶数 n	h'_n	l'_n	k'_n
1	-0.2871129880	0.1045044062	-1.0 (地球质心框架)
2	-0.9945870591	0.0241125159	-0.3057703360
3	-1.0546530210	0.0708549368	-0.1962722363
4	-1.0577838950	0.0595872318	-0.1337905897
5	-1.0911859150	0.0470262750	-0.1047617976
6	-1.1492536560	0.0394081176	-0.0903495805
7	-1.2183632010	0.0349940065	-0.0820573391
8	-1.2904736610	0.0322512320	-0.0765234897
9	-1.3618478650	0.0303856246	-0.0723928769
10	-1.4309817610	0.0290225900	-0.0690776844
12	-1.5609348550	0.0271636708	-0.0638847506
14	-1.6797703790	0.0259680057	-0.0598385602
16	-1.7880882500	0.0251266737	-0.0564748883
18	-1.8864404740	0.0244708343	-0.0535490132
20	-1.9754659020	0.0238986214	-0.0509272630
25	-2.1615247260	0.0225448633	-0.0452625739
30	-2.3044581340	0.0211578086	-0.0405033192
35	-2.4152406280	0.0197609745	-0.0364524519
40	-2.5028874800	0.0184188171	-0.0329970228
45	-2.5741299450	0.0171690959	-0.0300450548
50	-2.6337485520	0.0160264262	-0.0275153569
60	-2.7300189390	0.0140651027	-0.0234487653
70	-2.8076818590	0.0124702089	-0.0203629907
80	-2.8746338100	0.0111640070	-0.0179658948
90	-2.9350553590	0.0100800427	-0.0160636283
100	-2.9913054190	0.0091686192	-0.0145257169
120	-3.0965116190	0.0077267323	-0.0122109806
140	-3.1965444360	0.0066448758	-0.0105711243
150	-3.2455767690	0.0062018042	-0.0099238838
160	-3.2942117980	0.0058106942	-0.0093636844
180	-3.3907532400	0.0051551676	-0.0084470364
200	-3.4867370690	0.0046324760	-0.0077337989

250	-3.7248624300	0.0037212221	-0.0065109062
300	-3.9588101480	0.0031642726	-0.0057493979
350	-4.1853482260	0.0028105951	-0.0052320414
400	-4.4014325530	0.0025772705	-0.0048534799
450	-4.6045856190	0.0024162122	-0.0045579733
500	-4.7931516890	0.0022987082	-0.0043145187
600	-5.1234075730	0.0021315364	-0.0039191204
700	-5.3914177940	0.0020034613	-0.0035936423
800	-5.6025165630	0.0018887552	-0.0033104524
1000	-5.8875374130	0.0016743075	-0.0028324828
1500	-6.1543113080	0.0012327687	-0.0020071634
2000	-6.2038470670	0.0009427101	-0.0015226332
3000	-6.2137113920	0.0006307787	-0.0010176493
4000	-6.2144649520	0.0004731032	-0.0007634795
5000	-6.2148224370	0.0003784752	-0.0006108869
6000	-6.2150593160	0.0003153917	-0.0005091296
8000	-6.2153555850	0.0002365398	-0.0003819009
10000	-6.2155334610	0.0001892299	-0.0003055465
12000	-6.2156520860	0.0001576905	-0.0002546364
14000	-6.2157368460	0.0001351626	-0.0002182685
18000	-6.2158498910	0.0001051258	-0.0001697735
25000	-6.2159607070	0.0000756901	-0.0001222433
30000	-6.2160082030	0.0000630749	-0.0001018717
32000	-6.2160230550	0.0000591327	-0.0000955054
32768	-6.2160282710	0.0000577468	-0.0000932672
∞	-6.2091440000	0.0000000000	0.0000000000

8.3.3 规格化缔合勒让德函数及对 θ 导数

在使用 (3.8) ~ (3.20) 球谐综合式计算各种大地测量要素的负荷效应时, 需要计算规格化缔合勒让德函数 $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$ 及其对 θ 的一、二阶导数, 这里令 $t = \cos\theta$, 直接给出几种快速算法。

(1) $\bar{P}_{nm}(t)$ 标准前向列递推算法($n < 1900$)

$$\begin{cases} \bar{P}_{nm}(t) = a_{nm}t\bar{P}_{n-1,m}(t) - b_{nm}\bar{P}_{n-2,m}(t) & \forall n > 1, m < n \\ \bar{P}_{nn}(t) = u\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\bar{P}_{n-1,n-1} & n > 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

$$a_{nm} = \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n+m)(n-m)}}, \quad b_{nm} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-1)(n-m-1)}{(2n-3)(n+m)(n-m)}}$$

$$\bar{P}_{00}(t) = 1, \quad \bar{P}_{10}(t) = \sqrt{3}t, \quad \bar{P}_{11}(t) = \sqrt{3}u \quad (3.22)$$

(2) $\bar{P}_{nm}(t)$ 改进 Belikov 递推算法($n < 64800$)

当 $n = 0, 1$ 时, 采用 (3.22) 式; 当 $n \geq 2$ 时:

$$\bar{P}_{n0}(t) = a_n t \bar{P}_{n-1,0}(t) - b_n \frac{u}{2} \bar{P}_{n-1,1}(t), \quad m = 0 \quad (3.23)$$

$$\bar{P}_{nm}(t) = c_{nm} t \bar{P}_{n-1,m}(t) - d_{nm} u \bar{P}_{n-1,m+1}(t) + e_{nm} u \bar{P}_{n-1,m-1}(t), \quad m > 0 \quad (3.24)$$

$$a_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}}, \quad b_n = \sqrt{\frac{2(n-1)(2n+1)}{n(2n-1)}} \quad (3.25)$$

$$c_{nm} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{(n+m)(n-m)(2n+1)}{2n-1}}, \quad d_{nm} = \frac{1}{2n} \sqrt{\frac{(n-m)(n-m-1)(2n+1)}{2n-1}} \quad (3.26)$$

当 $m > 0$ 时, 有:

$$e_{nm} = \frac{1}{2n} \sqrt{\frac{2}{2-\delta_0^{m-1}}} \sqrt{\frac{(n+m)(n+m-1)(2n+1)}{2n-1}} \quad (3.27)$$

(3) $\bar{P}_{nm}(t)$ 函数跨阶次递推算法($n < 20000$)

当 $n = 0, 1$ 时, 采用 (3.22) 式; 当 $n \geq 2$ 时:

$$\bar{P}_{nm}(t) = \alpha_{nm} \bar{P}_{n-2,m}(t) + \beta_{nm} \bar{P}_{n-2,m-2}(t) - \gamma_{nm} \bar{P}_{n,m-2}(t) \quad (3.28)$$

$$\alpha_{nm} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)(n-m-1)}{(2n-3)(n+m)(n+m-1)}}$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{1 + \delta_0^{m-2}} \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-2)(n+m-3)}{(2n-3)(n+m)(n+m-1)}} \quad (3.29)$$

$$\gamma_{nm} = \sqrt{1 + \delta_0^{m-2}} \sqrt{\frac{(n-m+1)(n+m-3)}{(n+m)(n+m-1)}}$$

(4) $\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ 的非奇异递推算法

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial t} \bar{P}_{nm}(t) \quad (3.30)$$

为 $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ 对 θ 的一阶微分, \bar{P}'_{nm} 为 $\bar{P}_{nm}(t)$ 对 t 的一阶导数。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{n0} = -\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{P}_{n1}, & \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{n1} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{P}_{n0} - \frac{\sqrt{(n-1)(n+2)}}{2} \bar{P}_{n2} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{nm} = \frac{\sqrt{(n+m)(n-m+1)}}{2} \bar{P}_{n,m-1} - \frac{\sqrt{(n-m)(n+m+1)}}{2} \bar{P}_{n,m+1}, & m > 2 \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{00}(t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{10}(t) = -\sqrt{3}u, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{11}(t) = \sqrt{3}t \quad (3.32)$$

(5) $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{nm}$ 的非奇异递推算法

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{n0} = -\frac{n(n+1)}{2} \bar{P}_{n0} + \sqrt{\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{8}} \bar{P}_{n2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{n1} = -\frac{2n(n+1)+(n-1)(n+2)}{4} \bar{P}_{n1} + \frac{\sqrt{(n-2)(n-1)(n+2)(n+3)}}{4} \bar{P}_{n3} \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{nm} &= \frac{\sqrt{(n-m+1)(n-m+2)(n+m-1)(n+m)}}{4} \bar{P}_{n,m-2} - \frac{(n+m)(n-m+1)+(n-m)(n+m+1)}{4} \bar{P}_{nm} \\ &+ \frac{\sqrt{(n-m-1)(n-m)(n+m+1)(n+m+2)}}{4} \bar{P}_{n,m+2}, \quad m > 2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{00}(t) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{10}(t) = -\sqrt{3}t, \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{11}(t) = -\sqrt{3}u \quad (3.35)$$

8.3.4 海平面变化球谐分析与负荷形变场球谐综合

海水质量变化通常由海平面高度变化、海水温度效应、海水密度变化和密度流质量运输等因素构成，其中海水温度变化、密度变化和密度流质量运输（以下统称温盐分布变化）导致海水质量变化所占比例不到 1%，且这种随时间的变化量一般难以准确测定，而海平面变化能采用验潮站和多种海洋测高卫星精准高效监测。一方面，当前的大地测量技术还没有足够的灵敏度捕获到温盐分布变化效应，另一方面，海水温盐变化难以准确监测，意味着这种效应也无法从大地测量监测数据中有效分离出去，因此，就大地测量目的来说，在当前的技术水平下可以忽略海水温盐分布变化及其大地测量效应。

8.3.4.1 海平面变化球谐分析与负荷球谐模型构建

全球海平面变化球谐分析可采用 (3.4) 式，按快速 Fourier 算法计算。此时，先综合各种海面高观测数据，构造球坐标系下海平面变化格网时间序列（统一移去某一参考历元时刻的海面高格网，或某段时期内平均海面高格网），再分别对每一采样历元时刻的海平面变化格网按 (3.4) 式进行球谐分析，生成海平面变化负荷球谐系数模型时间序列。海平面变化格网的空间分辨率决定了其负荷球谐模型的最大阶数，负荷球谐系数模型时间序列的采样历元时刻与海平面变化格网时间序列一一对应。

式 (3.4) 将海平面高度变化直接表示为半径等于地球长半轴 a 球面上面谐函数的线性组合，地球重力场的球谐表达式也是线性的，可见，采用累积迭代球谐分析法，可有效提高海平面变化负荷球谐系数模型的逼近水平。

图 3.1 为 ETideLoad4.5 全球海平面变化球谐分析程序计算结果，程序输入 $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ 全球海平面变化球坐标格网时间序列（其中，第一个历元时刻海平面变化格网如右中图，陆地区域置零），按 (3.4) 式，采用迭代累积逼近方法（迭代残差变化如右下图），构造 360 阶海平面变化负荷球谐系数模型时间序列（其中，第一个历元时刻海平面变化负荷球谐系数模型如左下图）。

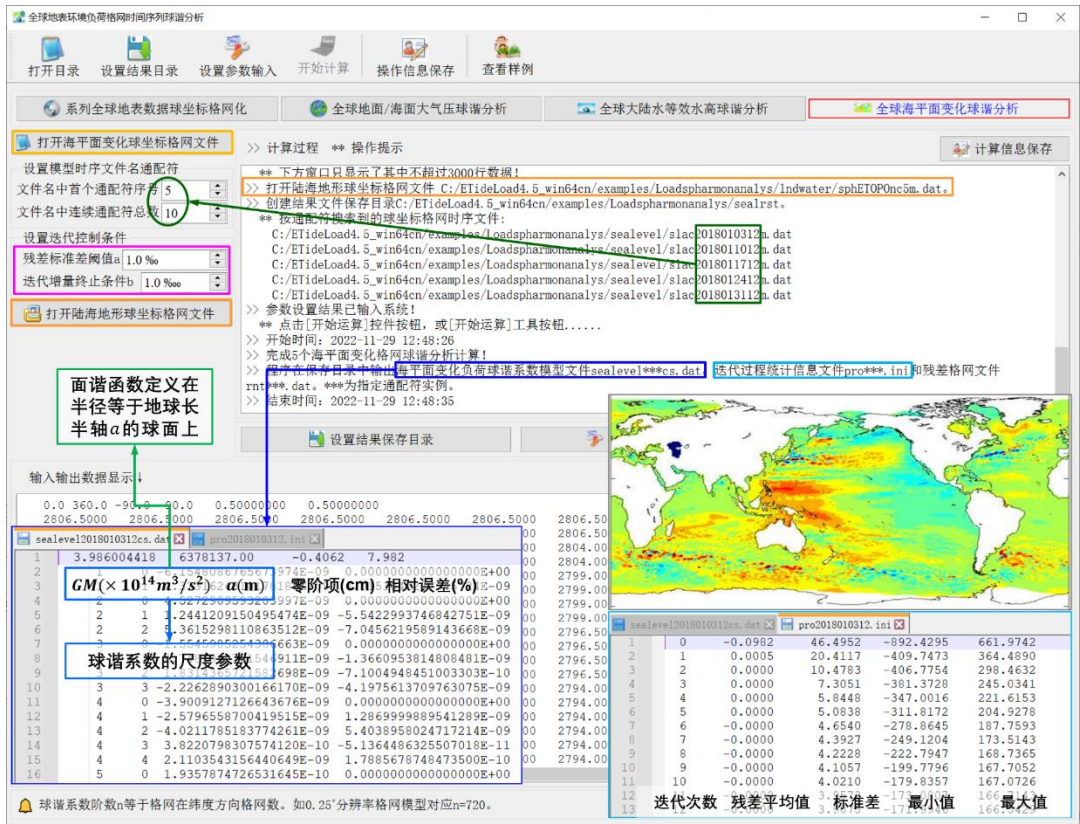


图 3.1 全球海平面变化球谱分析与负荷球谱模型构建

海平面变化负荷球谐系数模型（左下图）的头文件分别是地心引力常数 GM ($\times 10^{14} \text{m}^3/\text{s}^2$), 地球长半轴 a (m), 零阶项 $a\Delta C_{00}$ (cm), 相对误差 θ (%)。 θ 为最终迭代残差标准差与输入原格网标准差的百分比。球谐系数最大阶数 n 等于全球地表负荷格网在纬度方向格网数, 本例输入 $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ 分辨率格网模型, 对应最大阶数 $n = 360$ 。

GM, a 也称为负荷球谐系数模型的尺度参数, 表示球谐系数的面谱基函数定义在半径等于地球长半轴 a 的球面上。零阶项 $a\Delta C_{00}$ 代表海平面变化导致的全球海洋总质量的变化, 在地球质量守恒条件下无意义, 实际计算一般忽略零阶项。3个一阶项球谐系数($\Delta \bar{C}_{10}^{sea}, \Delta \bar{C}_{11}^{sea}, \Delta \bar{S}_{11}^{sea}$)代表海平面变化引起的地球质心变化。

对于高精度大地测量, 全球海平面变化短波成分不可忽略, 需要一定分辨率的格网模型才能满足精度要求, 相应地, 需要较大阶数球谐系数模型表示。负荷球谐系数模型最大阶数基本由负荷的全球频谱结构与负荷效应的精度要求决定。表 3.2 给出某一历元时刻全球海平面变化负荷球谱分析结果随格网分辨率(最大阶数)变化情况。

表 3.2 显示, 该历元时刻全球海平面变化的中短波成分明显, 兼顾精度与计算效率, 该历元时刻的海平面变化负荷球谐系数模型的适宜最大阶数可选择 360 阶。

表 3.2 海平面变化负荷球谐分析残差随格网分辨率变化情况

输入格网分辨率	最大阶数	零阶项 cm	一阶项 $\times 10^{-10}$			残差相对误差%
			ΔC_{10}^{sea}	ΔC_{11}^{sea}	ΔS_{11}^{sea}	
1°×1°	180	0.1278	-7.14017	-0.74191	6.93210	6.519
30'×30'	360	0.1419	-7.29329	-0.81169	7.57094	5.075
15'×15'	720	0.1273	-7.19655	-0.71797	6.86062	3.566

8.3.4.2 海平面变化负荷效应球谐综合计算

已知海平面变化负荷球谐系数模型，就可按 (3.8) ~ (3.20) 式的球谐综合算法，计算全球地面或地球外部任意空间点的高程异常、地面重力、扰动重力、地倾斜 (SW 南向/西向)、垂线偏差 (SW 南向/西向)、水平位移 (EN 东向/北向)、地面径向 (大地高)、地面正 (常) 高、扰动重力梯度或水平重力梯度的 (非潮汐) 海平面变化负荷 (形变) 效应，计算固体地球外部空间 (包括海洋、航空或卫星高度) 的海平面变化负荷重力位、引力 (加速度) 或扰动重力梯度摄动。

图 3.2 为 ETideLoad4.5 海平面变化负荷形变效应球谐综合程序计算结果，程序输入计算区域数字高程模型格网 (用于指定计算点位置和范围)，由海平面变化负荷球谐系数模型时间序列，选择最大计算阶数 360，按 (3.8) ~ (3.20) 式，计算地面大地测量全要素海平面变化负荷形变效应格网时间序列。

也可以直接将 (3.3) 式用作观测方程，以全球海平面变化为观测量，严格按最小二乘法估计海平面变化负荷球谐系数，从而直接在谱域中构建海平面变化负荷球谐系数模型，则由该负荷球谐系数模型计算的海平面变化负荷也会严格位于海平面上，这样，计算点与负荷流动面元的空间坐标都在同一地球坐标系中，计算点的高度，与海平面变化负荷所在位置的高度完全统一。但是，若用批量的全球海平面变化时间序列，按最小二乘法估计负荷球谐系数模型时间序列，由于待估负荷球谐系数的数量 $(N + 1)^2$ 随最大阶数 N 快速递增，计算量因此迅速增大，计算效率快速降低，实际计算时很少采用。

由 (3.4) 式按快速 Fourier 算法构建的海平面变化负荷球谐系数模型时，已假设海平面变化负荷位于半径等于地球长半轴 a 的球面上，因此，用该负荷球谐系数模型计算的海平面变化负荷也位于该球面上。当计算点位于海岸带、海域的地面或近地空间，可将负荷形变效应的计算点高度取计算点相对于平均海面的高度，即正 (常) 高，以保证计算点与海平面上负荷流动面元之间准确的空间位置关系。与按计算点大地高和严密最小二乘估计的球谐系数模型的计算结果相比，近距离负荷效应最大近似误差为二阶近似 $O^2((a - b + \zeta)/R) < 1.25 \times 10^{-6}$ ， ζ 为计算点处的高程异常， a ， b ， R 为分别为地球的长半轴、短

半轴和平均半径), 即小于总负荷效应的 10^{-6} , 完全可以忽略不计。当计算点远离海岸带的大陆地区、10 千米以上的高空或卫星高度时, 可用大地高直接代替正常高。

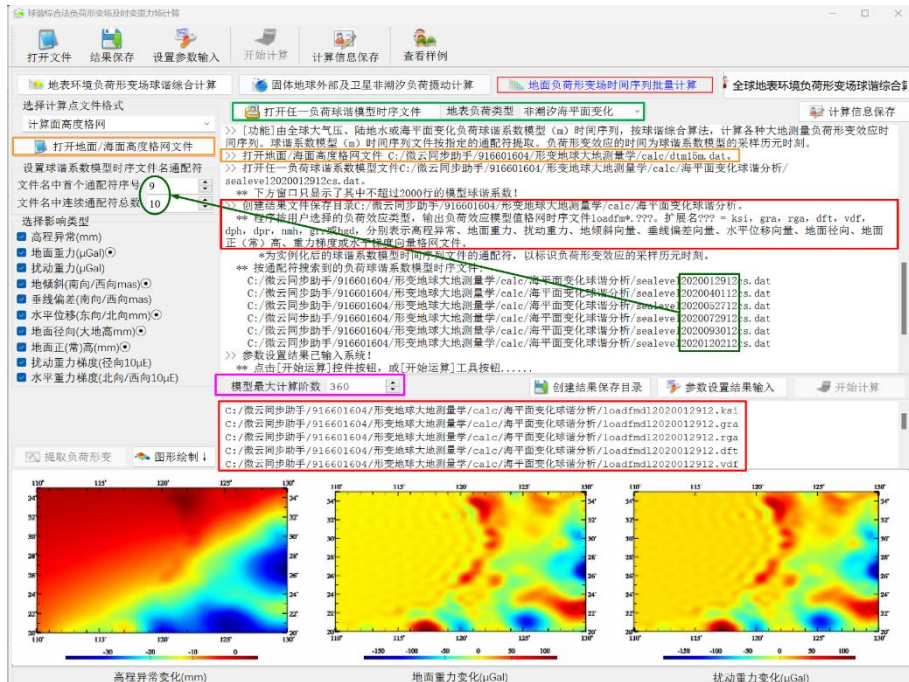


图 3.2 海平面变化负荷效应格网时间序列计算

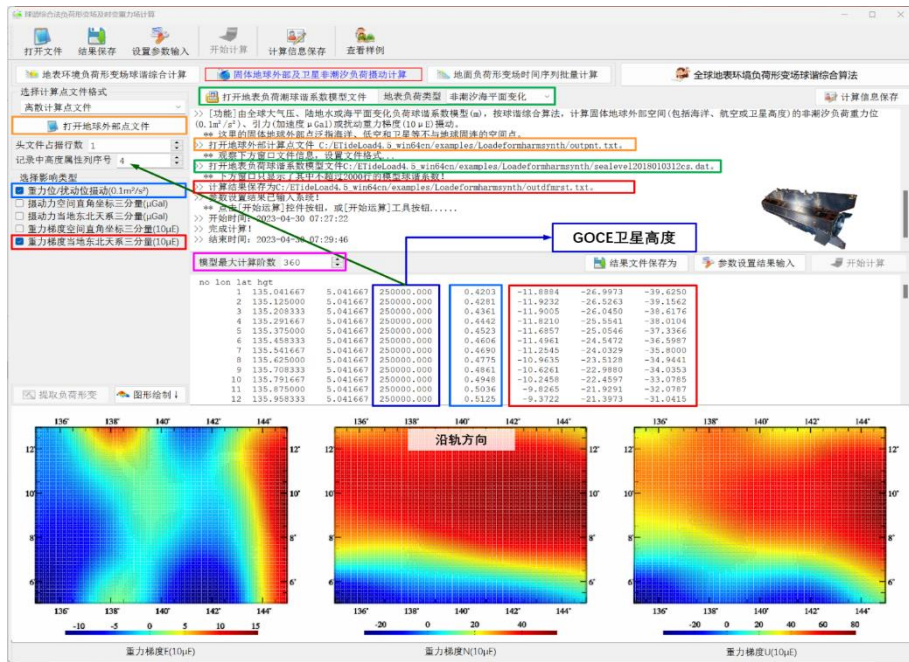


图 3.3 地球卫星海平面变化负荷摄动计算

图 3.3 为地球卫星海平面变化负荷的扰动位与重力梯度摄动计算结果。

下面直接利用 Aviso 多种海洋测高卫星联合的 $15^{\circ} \times 15^{\circ}$ 全球海平面月/周变化（海平面距平），扣除 2018 年平均值后，构造 2018 年 1 月至 2020 年 12 月 $0.5^{\circ} \times 0.5^{\circ}$ 全球海平面周变化（cm）球坐标格网时间序列（共 157 个采样历元），之后采用 (3.4) 式，按快速 Fourier 算法，构建 360 阶海平面变化负荷球谐系数周变化模型（m）时间序列，最后，再按 (3.8) ~ (3.20) 式的负荷效应球谐综合算法，计算中国沿海 12 座验潮站处（纬度 $18^{\circ} \text{N} \sim 40^{\circ} \text{N}$ ）地面全要素海平面变化负荷效应。

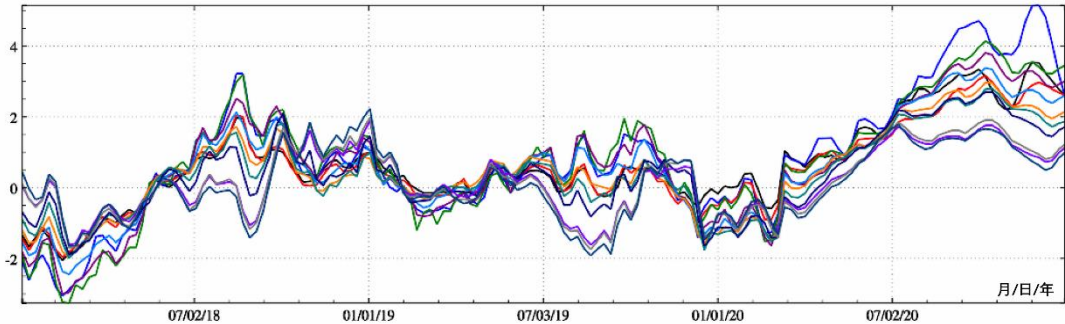


图 3.4 中国沿海 12 座验潮站处海平面变化负荷效应-大地水准面周变化 mm

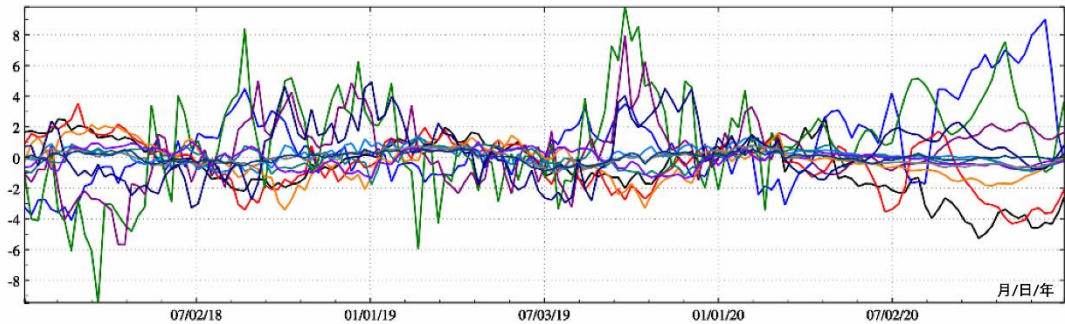


图 3.5 中国沿海 12 座验潮站处海平面变化负荷效应-地面重力周变化 μGal

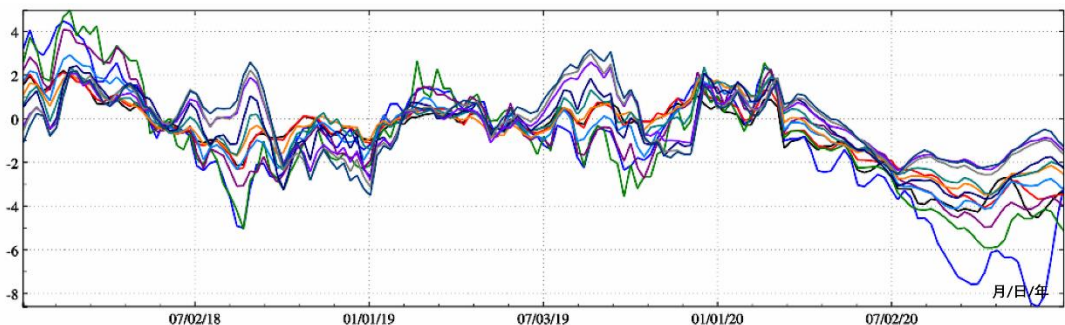


图 3.6 中国沿海 12 座验潮站处海平面变化负荷效应-地面大地高周变化 mm

图 3.4~图 3.7 分别为 12 座验潮站处 2018 年 1 月至 2020 年 12 月全球海平面周变化

负荷引起的大地水准面周变化时间序列 mm、地面重力周变化时间序列 μGal 、地面大地高周变化时间序列 mm 和扰动重力梯度周变化时间序列 $10\mu\text{E}$ 曲线。

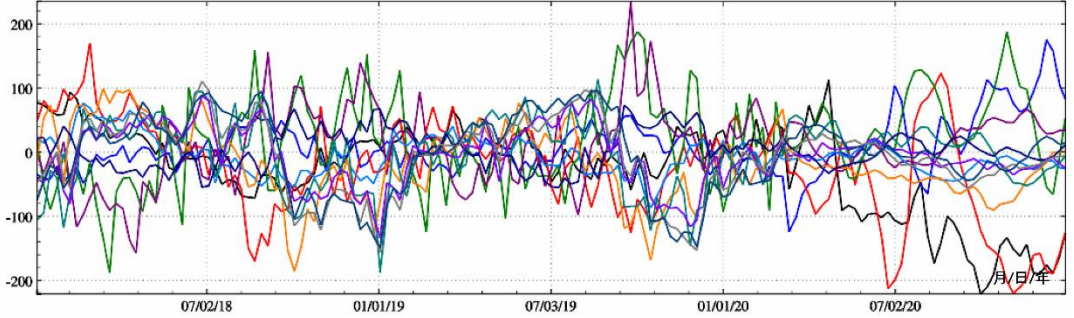


图 3.7 中国沿海 12 座验潮站处海平面变化负荷效应-扰动重力梯度周变化 $10\mu\text{E}$

8.3.4.3 非潮汐海平面变化引起的极移形变

地球极移(m_1, m_2)引起地面/海面点(R, θ, λ)的离心力位变化 $\Delta\Phi$ ，可表示为：

$$\Delta\Phi = -\frac{\omega^2 R^2}{2}(m_1 \cos\lambda + m_2 \sin\lambda)\sin 2\theta \quad (3.36)$$

地球重力场的 2 阶 1 次重力位系数代表地球自转轴（形状轴）的位置，($\Delta\bar{C}_{21}^*, \Delta\bar{S}_{21}^*$)引起地面点(r, θ, λ)的重力位变化 $\Delta\phi$ ，可由 (3.1) 式计算：

$$\Delta\phi = \frac{GM}{R^2}(\Delta\bar{C}_{21}^* \cos\lambda + \Delta\bar{S}_{21}^* \sin\lambda)\bar{P}_{21}(\cos\theta) \quad (3.37)$$

$$\text{注意到 } \bar{P}_{21}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{5}{3}}P_{21}(\cos\theta) = \sqrt{15}\cos\theta\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{2}\sin 2\theta \quad (3.38)$$

代入 (3.37) 式得

$$\Delta\phi = \frac{\sqrt{15}}{2} \frac{GM}{R^2}(\Delta\bar{C}_{21}^* \cos\lambda + \Delta\bar{S}_{21}^* \sin\lambda)\sin 2\theta \quad (3.39)$$

若 2 阶 1 次重力位系数变化($\Delta\bar{C}_{21}^*, \Delta\bar{S}_{21}^*$)仅为海平面变化负荷效应，则有：

$$\begin{cases} \Delta\bar{C}_{21}^* \\ \Delta\bar{S}_{21}^* \end{cases} = \frac{3\rho_w}{5\rho_e}(1 + k_2') \begin{cases} \Delta C_{21}^{sea} \\ \Delta S_{21}^{sea} \end{cases} \quad (3.40)$$

代入 (3.39) 式得：

$$\Delta\phi = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \frac{GM}{R^2} \frac{\rho_w}{\rho_e}(1 + k_2')(\Delta C_{21}^{sea} \cos\lambda + \Delta S_{21}^{sea} \sin\lambda)\sin 2\theta \quad (3.41)$$

由于式 (3.41) 和式 (3.36) 都适合全球任意地面/海面点，因此当 $\Delta\Phi = \Delta\phi$ 时，可得极移(m_1, m_2)的海平面变化负荷效应为：

$$m_1 = \mathcal{K}\Delta C_{21}^{sea} = \frac{1}{R}\Delta x_p, \quad m_2 = \mathcal{K}\Delta S_{21}^{sea} = -\frac{1}{R}\Delta y_p \quad (3.42)$$

式中(m_1, m_2)以弧度为单位，($\Delta x_p, \Delta y_p$)的单位 m，

$$\mathcal{K} = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{GM}{\omega^2 R^4} \frac{\rho_w}{\rho_e} (1 + k'_2) = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{g_0}{\omega^2 R^2} \frac{\rho_w}{\rho_e} (1 + k'_2) \quad (3.43)$$

其中， $g_0 = GM/R^2$ 为地面平均重力，可取 $g_0 = 9.81\text{m/s}^2$ 。

图 3.8 为由上述 2018 年 1 月至 2020 年 12 月海平面周变化负荷球谐系数模型中的 2 阶 1 次球谐系数($\Delta\bar{C}_{21}^{sea}, \Delta\bar{S}_{21}^{sea}$)时间序列计算的极移($\Delta x_p, \Delta y_p$)时间序列 (单位 μm , 相对于 2018 年平均位置)。

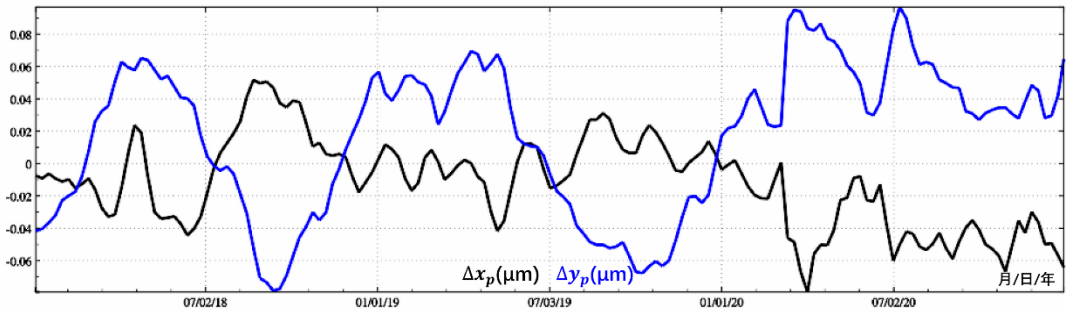


图 3.8 地球极移的海平面变化负荷效应-相对于 2018 年平均位置

8.3.5 大气压球谐分析与负荷形变场球谐综合计算

8.3.5.1 大气层密度变化负荷效应与地面大气压负荷效应

大气负荷效应原则上要对整个大气层空间密度变化进行三维积分, 分别计算大气层密度变化对地面及地球外部各种大地测量参数或观测量的直接影响和间接影响。实际计算时, 通常利用地面大气压变化负荷效应与大气层空间密度变化负荷效应的某种近似等效关系, 由地面大气压变化, 计算地面或地面外部各种大地测量参数或观测量的大气负荷效应。

这里推荐一种满足大地测量精度要求的简化计算方案。计算大气负荷间接影响时, 假设大气压负荷集中于地面, 且 1hPa (mbar) 与 1cm 等效水高负荷的贡献相当, 即 1hPa = 1cm EWH, 计算点高度 h 取点位相对于地面的高度。在计算重力、扰动重力、扰动重力梯度大气压潮负荷直接影响时, 假设地面高度 h 处的大气压 P_h 与地面大气压 P_0 存在比例关系 $(1 - h/44330)^{5225}$, 即

$$P_h = P_0(1 - h/44330)^{5225} \dots\dots\dots (3.44)$$

大气变化负荷效应实际计算时, 不必非要确定当前计算历元时刻计算点处 P_h , 只需确定计算历元时刻 P_h 大气压相对于参考大气压 P_h^* 的差异 $\Delta P_h = P_h - P_h^*$ 。已知参考历元时刻地面大气压 P_0^* 和计算历元时刻地面大气压 P_0 , 即地面大气压变化 $\Delta P_0 = P_0 - P_0^*$, 由(3.44)式, 可得计算点处的大气压变化 ΔP_h :

$$\Delta P_h = P_h - P_h^* = P_0 \left(1 - \frac{h}{44330}\right)^{5225} - P_0^* \left(1 - \frac{h}{44330}\right)^{5225} \approx \Delta P_0 \left(1 - \frac{h}{44330}\right)^{5225} \quad (3.45)$$

利用 (3.45) 式, 可直接由地面大气压变化 ΔP_0 计算地面高度 h 处的大气压变化 ΔP_h , 而无需直接利用地面点在参考历元时刻的大气压值 P_0^* 。

8.3.5.2 地面大气压变化球谐分析与负荷球谐模型构建

全球地面大气压变化球谐分析流程, 与海平面变化球谐分析完全相同, 也可采用 (3.4) 式, 按快速 Fourier 算法计算。先综合各种地面大气压观测数据, 构建球坐标系下全球地面大气压变化格网时间序列 (统一移去某一参考历元时刻的地面大气压格网, 或某段时期内地面大气压平均值格网), 再分别对每一采样历元时刻地面大气压变化格网按 (3.4) 式进行球谐分析, 生成全球地面大气压变化负荷球谐系数模型时间序列。地面大气压变化格网的空间分辨率决定了其负荷球谐模型的最大阶数, 负荷球谐系数模型时间序列的采样历元时刻与地面大气压变化格网时间序列一一对应。

同理, 采用累积迭代球谐分析法, 可有效提高全球地面大气压变化负荷球谐系数模型的逼近水平。

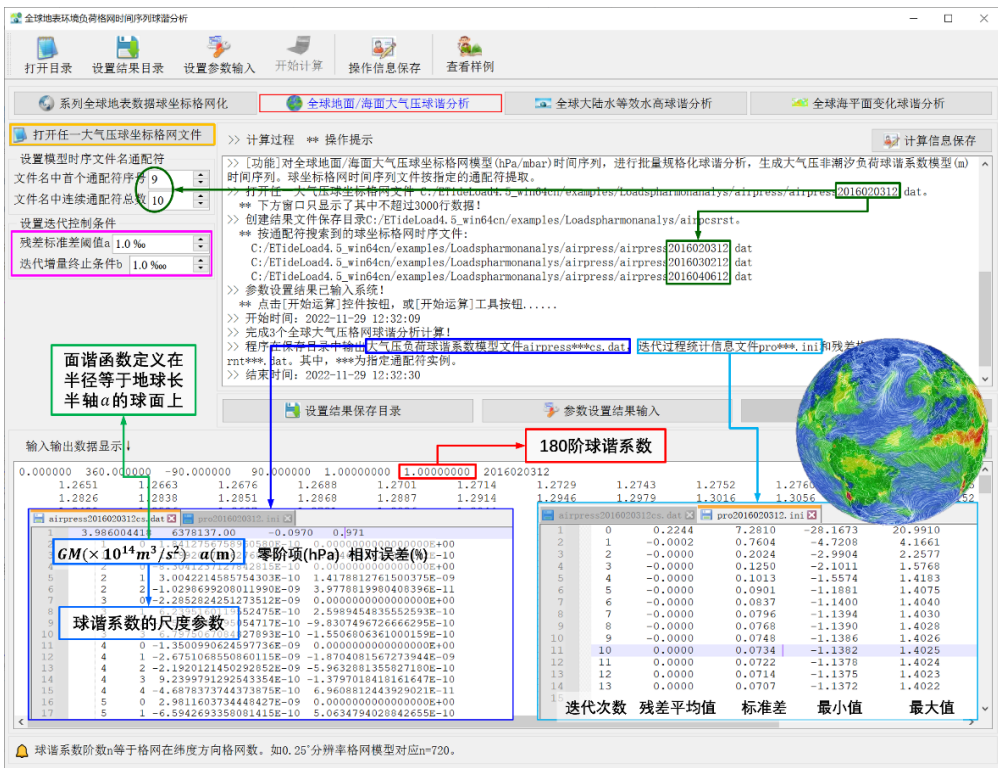


图 3.9 全球地面大气压变化球谐分析与负荷球谐模型构建

图 3.9 为 ETideLoad4.5 全球地面大气压变化球谐分析程序计算结果, 程序输入 $1^\circ \times 1^\circ$

全球地面大气压变化球坐标格网时间序列，按 (3.4) 式，采用迭代累积逼近方法（迭代残差变化如右下图），构造 180 阶全球地面大气压变化负荷球谐系数模型时间序列（其中，第一个历元时刻全球地面大气压变化负荷球谐系数模型如左下图）。

全球地面大气压变化负荷球谐系数模型（左下图）的头文件分别是地心引力常数 GM ($\times 10^{14} \text{m}^3/\text{s}^2$)，地球长半轴 a (m)，零阶项 $a\Delta C_{00}$ (hPa)，相对误差 θ (%)。 θ 为最终迭代残差标准差与输入原格网标准差的百分比。

零阶项 $a\Delta C_{00}$ 代表地面大气压变化导致的全球大气总质量的变化，在地球大气质量守恒条件下无意义，实际计算一般忽略零阶项。3 个一阶项球谐系数 ($\Delta \bar{C}_{10}^{air}, \Delta \bar{C}_{11}^{air}, \Delta \bar{S}_{11}^{air}$) 代表全球地面大气压变化引起的地球质心变化。

类似于海平面变化球谐分析，地面大气压变化负荷球谐系数模型的最大阶数与地面大气压变化的实际频谱分布有关，表 3.3 给出某一历元时刻全球地面大气压变化负荷球谐分析结果随格网分辨率（最大阶数）变化情况。

表 3.3 地面大气压变化负荷球谐分析残差随格网分辨率变化情况

输入格网分辨率	最大阶数	零阶项 hPa	一阶项 $\times 10^{-10}$			残差相对误差 %
			$\Delta \bar{C}_{10}^{air}$	$\Delta \bar{C}_{11}^{air}$	$\Delta \bar{S}_{11}^{air}$	
$2^\circ \times 2^\circ$	90	-1.7539	0.55043	3.60270	-6.35702	2.707
$1^\circ \times 1^\circ$	180	-1.7614	0.54424	3.60695	-8.36343	1.215
$0.5^\circ \times 0.5^\circ$	360	-1.7620	0.54251	3.60748	-8.36912	2.043

表 3.3 指出，该历元时刻的全球地面大气压变化中长波占优，采用最大阶数不低于 180 阶的负荷球谐系数模型表示，基本够用。

8.3.5.3 地面大气压负荷效应球谐综合计算

已知全球地面大气压变化负荷球谐系数模型，就可按 (3.8) ~ (3.20) 式的负荷形变球谐综合算法，计算全球地面或地球外部任意空间点的高程异常、地面重力、扰动重力、地倾斜 (SW 南向/西向)、垂线偏差 (SW 南向/西向)、水平位移 (EN 东向/北向)、地面径向 (大地高)、地面正 (常) 高、扰动重力梯度或水平重力梯度的地面大气压变化负荷 (形变) 效应，计算固体地球外部空间 (包括海洋、航空或卫星高度) 的大气压变化负荷重力位、引力 (加速度) 或扰动重力梯度摄动。

图 3.10 为 ETideLoad4.5 地面大气压变化负荷形变效应球谐综合程序计算结果，程序输入计算区域零值格网 (用于指定计算点位置和范围，零值表示计算点位于地面)，由全球地面大气压变化负荷球谐系数模型时间序列，选择最大计算阶数 180，按 (3.8) ~ (3.20) 式，计算地面大地测量全要素大气压变化负荷形变效应格网时间序列。

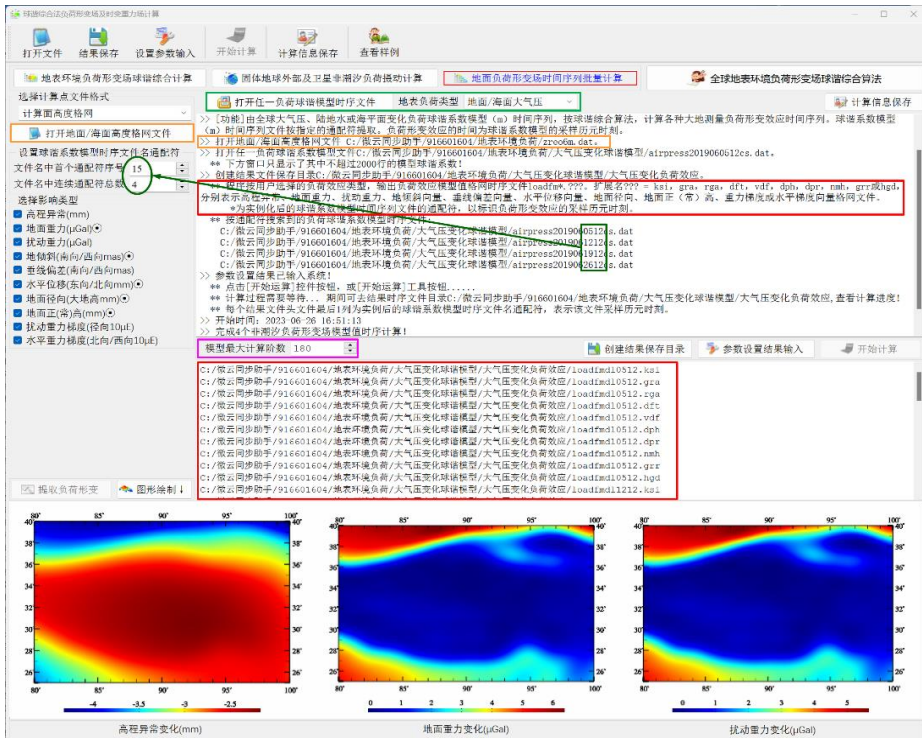


图 3.10 地面全要素大气压变化负荷效应格网时间序列计算

由 (3.4) 式按快速 Fourier 算法构建地面大气压变化负荷球谐系数模型时, 已假设地面大气压负荷位于半径等于 a 的球面上, 用该负荷球谐系数模型计算的大气压变化负荷也位于该球面上。对于地面或近地空间计算点, 为严格保证计算点与地面上负荷流动点的三维空间位置关系, 计算点高度应为计算点相对于地面的高度。

图 3.11 为地球卫星海平面变化负荷的扰动位与重力梯度扰动计算结果。

下面利用欧洲中尺度天气预测中心 (ECMWF) 全球再分析数据 ERA-40/ERA-Interim 中的 $0.5^{\circ} \times 0.5^{\circ}$ 地面/海面大气压日变化模型, 扣除 2018 年平均值后, 构造 2018 年 1 月至 2020 年 12 月 $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ 全球地面/海面大气压周变化 (hPa) 球坐标格网时间序列 (共 157 个采样历元), 采用 (3.4) 式, 按快速 Fourier 算法, 构建 180 阶全球大气压变化负荷球谐系数周变化 (m) 模型时间序列, 再按 (3.8) ~ (3.20) 式的负荷形变球谐综合算法, 计算中国大陆地区 14 座 CORS 站处地面全要素大气压变化负荷效应。

图 3.12~图 3.15 分别为中国大陆地区 14 座 CORS 站处 2018 年 1 月至 2020 年 12 月全球地面大气压周变化负荷引起的大地水准面周变化时间序列 mm、地面重力周变化时间序列 μGal 、地面大地高周变化时间序列 mm 和扰动重力梯度周变化时间序列 $10\mu\text{E}$ 曲线。

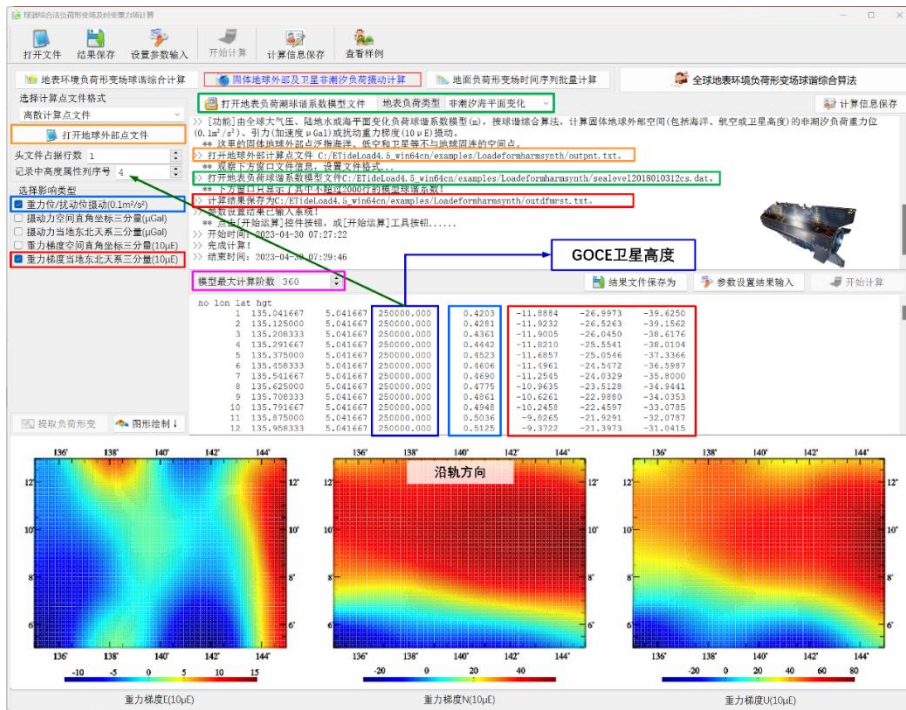


图 3.11 地球卫星地面大气压变化负荷摄动计算

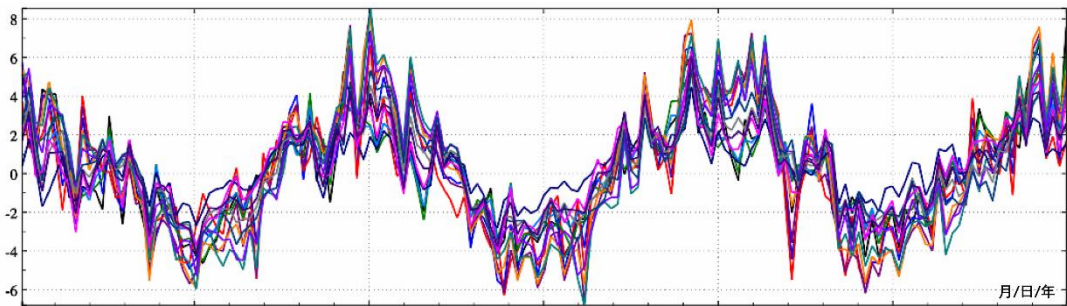


图 3.12 中国大陆地面大气压变化负荷形变 (180 阶) -大地水准面变化 mm

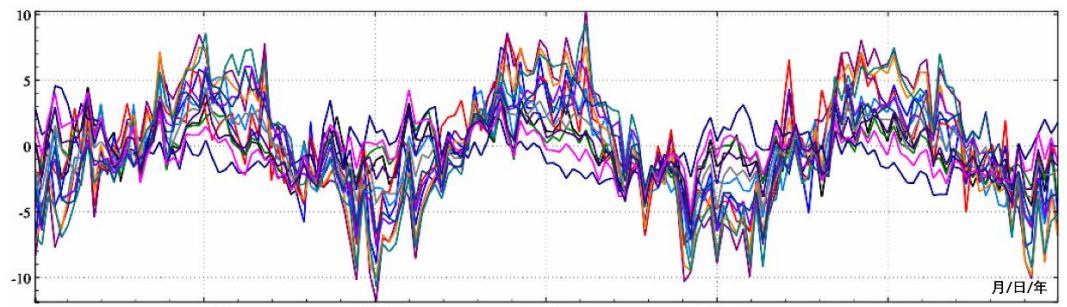


图 3.13 中国大陆地面大气压变化负荷形变 (180 阶) -地面重力变化 μGal

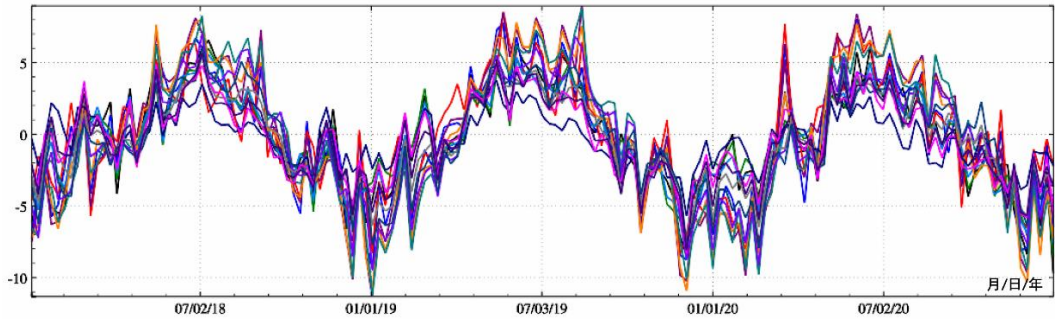


图 3.14 中国大陆地面大气压变化负荷形变 (180 阶) -地面大地高变化 mm

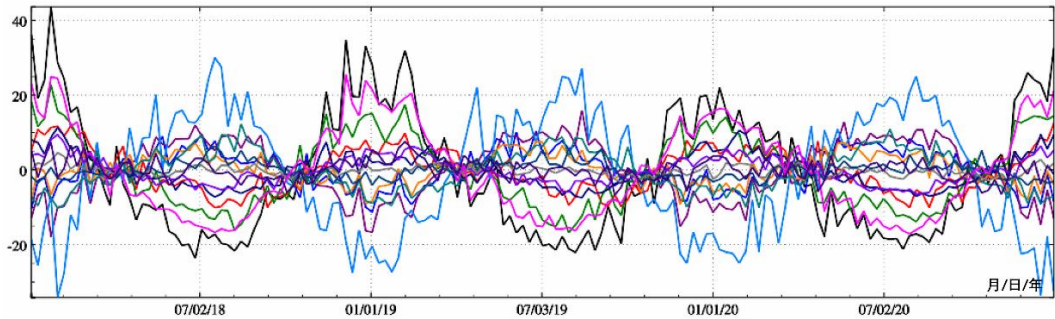


图 3.15 中国大陆地面大气压变化负荷形变 (180 阶) -扰动重力梯度变化 10 μ E

图 3.16 为由 2 阶 1 次负荷球谐系数($\Delta\bar{C}_{21}^{air}, \Delta\bar{S}_{21}^{air}$)时间序列计算的极移($\Delta x_p, \Delta y_p$)时间序列 (单位 μ m, 相对于 2018 年平均位置)。

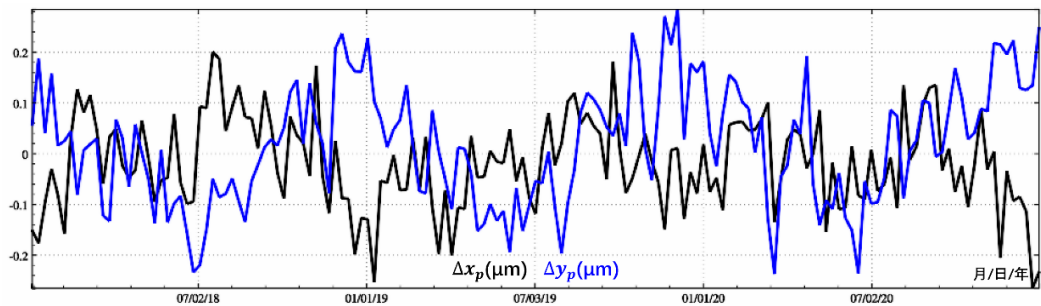


图 3.16 地球极移的海平面变化负荷效应-相对于 2018 年平均位置

8.3.6 陆地水球谐分析与负荷形变场球谐综合计算

8.3.6.1 陆地水变化球谐分析与负荷球谐模型构建

全球陆地水变化球谐分析与全球海平面变化球谐分析方法完全相同。图 3.17 为 ETideLoad4.5 全球陆地水变化球谐分析程序计算结果, 程序输入 $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ 全球陆地水变化球坐标格网时间序列 (其中, 第一个历元时刻陆地水变化格网如右中图, 海洋置

零)，按 (3.4) 式，采用迭代累积逼近方法（迭代残差变化如右下图），构造 720 阶全球陆地水变化负荷球谐系数模型时间序列（其中，最后一个历元时刻陆地水变化负荷球谐系数模型如左下图）。

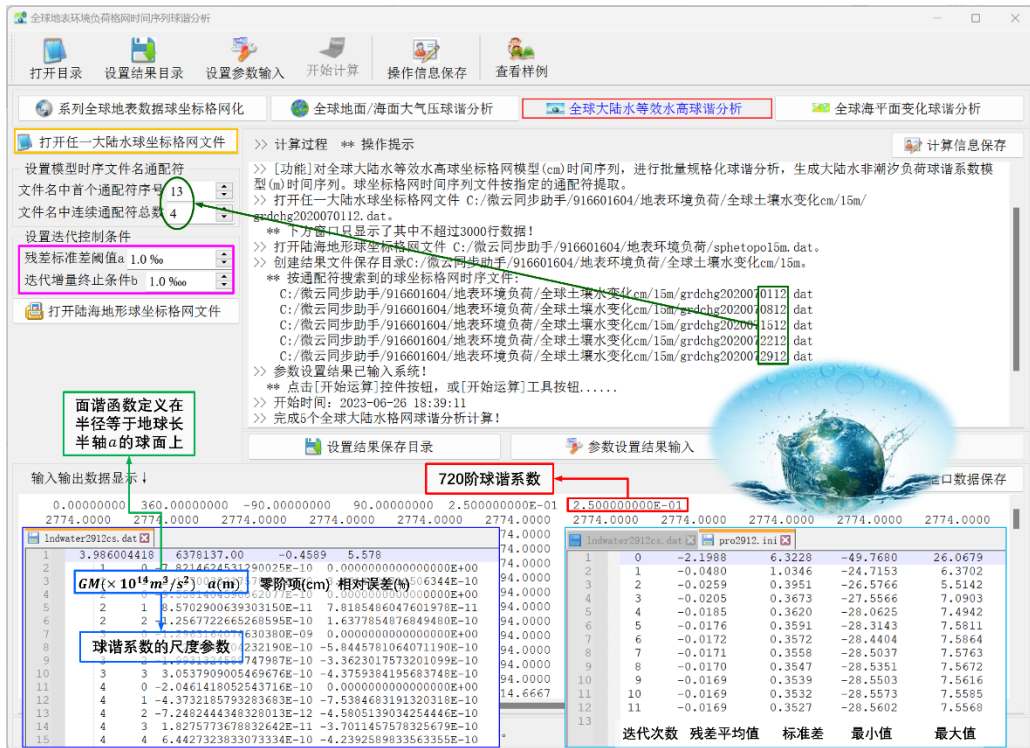


图 3.17 全球陆地水变化球谐分析与负荷球谐模型构建

陆地水变化负荷球谐系数模型（左下图）的头文件分别是地心引力常数 GM ($\times 10^{14} \text{m}^3/\text{s}^2$)，地球长半轴 a (m)，零阶项 $a\Delta C_{00}$ (cm)，相对误差 θ (%)。 θ 为最终迭代残差标准差与输入原格网标准差的百分比。球谐系数最大阶数 n 等于全球地表负荷格网在纬度方向格网数，本例输入 $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ 分辨率格网模型，对应最大阶数 $n = 720$ 。

零阶项 $a\Delta C_{00}$ 代表全球陆地水变化导致的地球总质量的变化，在地球质量守恒条件下无意义，实际计算一般忽略零阶项。3 个一阶项球谐系数 ($\Delta C_{10}, \Delta C_{11}, \Delta S_{11}$) 代表全球陆地水变化引起的地球质心变化。

表 3.4 给出某一历元时刻全球陆地水变化负荷球谐分析结果随格网分辨率（最大阶数）变化情况。

表 3.4 陆地水变化负荷球谐分析残差随格网分辨率变化情况

输入格网分辨率	最大阶数	零阶项 cm	一阶项 $\times 10^{-10}$			残差相对误差 %
			$\Delta \bar{C}_{10}^{lnd}$	$\Delta \bar{C}_{11}^{lnd}$	$\Delta \bar{S}_{11}^{lnd}$	

30'×30'	360	0.3242	5.46047	1.49947	0.52091	5.851
15'×15'	720	0.3207	5.32556	1.51216	0.50261	4.291
9'×9'	1200	0.3236	5.43533	1.50154	0.51493	3.094

表 3.4 指出，该历元时刻的全球陆地水变化短波成分较为明显，其负荷球谐系数模型的适宜最大阶数可选择 720 阶。

8.3.6.2 陆地水变化负荷效应球谐综合计算

已知全球陆地水变化负荷球谐系数模型，可按 (3.8) ~ (3.20) 式的负荷形变球谐综合算法，计算全球地面或地球外部任意空间点的高程异常、地面重力、扰动重力、地倾斜 (SW 南向/西向)、垂线偏差 (SW 南向/西向)、水平位移 (EN 东向/北向)、地面径向 (大地高)、地面正 (常) 高、扰动重力梯度或水平重力梯度的陆地水变化负荷形变) 效应。

图 3.18 为 ETideLoad4.5 陆地水变化负荷形变效应球谐综合程序计算结果，程序输入计算区域零值格网 (用于指定计算点位置和范围，零值表示计算点位于地面)，由全球陆地水变化负荷球谐系数模型，选择最大计算阶数 360，按 (3.8) ~ (3.20) 式，计算地面高程异常、地面重力和地面大地高陆地水变化负荷形变效应。

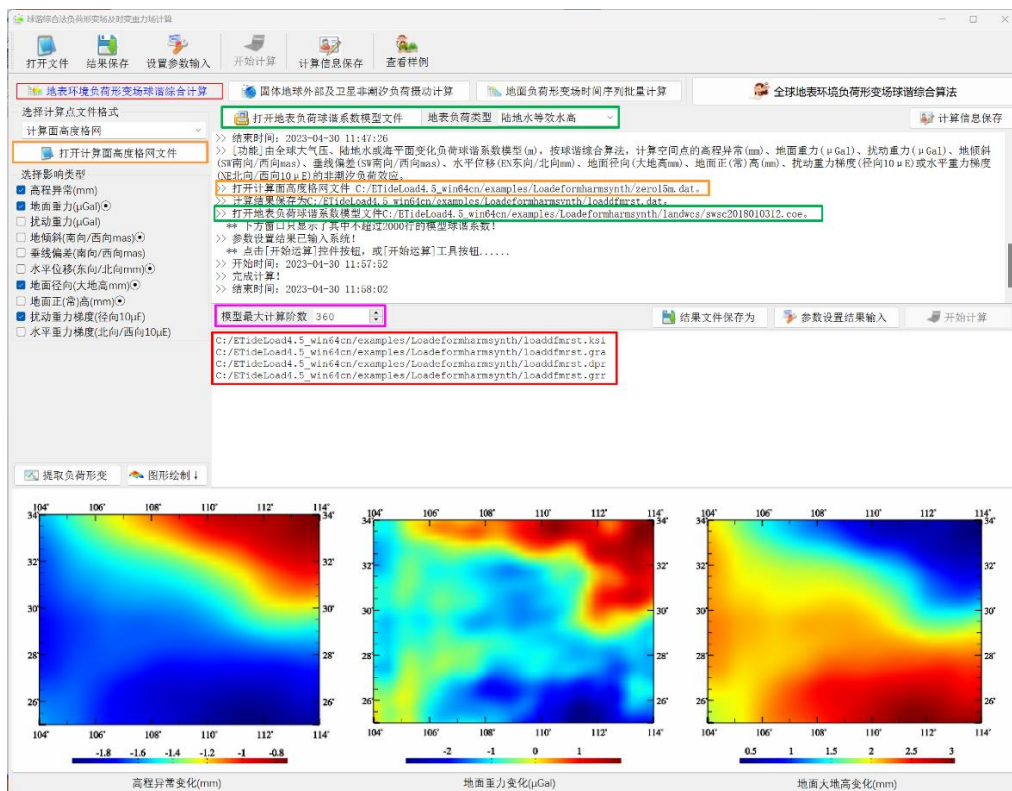


图 3.18 陆地水变化负荷效应球谐综合计算

由 (3.4) 式按快速 Fourier 算法构建陆地水变化负荷球谐系数模型时, 已假设陆地水负荷位于半径等于 a 的球面上, 用该负荷球谐系数模型计算的陆地水变化负荷也位于该球面上。对于地面或近地空间计算点, 为严格保证计算点与地面上负荷流动点的三维空间位置关系, 计算点高度应为计算点相对于地面的高度。

这里利用美国宇航局哥达航空中心 (NASA) 和国家环境预报中心 (NCEP) 的全球水文模式 GLDAS 数据, 扣除 2018 年平均值后, 构造 2018 年 1 月至 2020 年 9 月 $15' \times 15'$ 全球陆地水周变化 (cm) 球坐标格网时间序列 (共 43 个采样历元), 采用 (3.4) 式, 构建 720 阶陆地水变化负荷球谐系数周变化 (m) 模型时间序列, 再按 (3.8) ~ (3.20) 式的球谐综合算法, 计算中国大陆地区 14 座 CORS 站处地面全要素陆地水变化负荷效应。

这里的陆地水, 包括了 4m 以浅土壤水与湿地、植被、冰川雪山水含量, 但不包括河流水和地下水。

图 3.19~图 3.22 分别为中国大陆地区 14 座 CORS 站处 2018 年 1 月至 2020 年 9 月全球陆地水周变化负荷引起的大地水准面周变化时间序列 mm、地面重力周变化时间序列 μGal 、地面大地高周变化时间序列 mm 和扰动重力梯度周变化时间序列 $10\mu\text{E}$ 曲线。

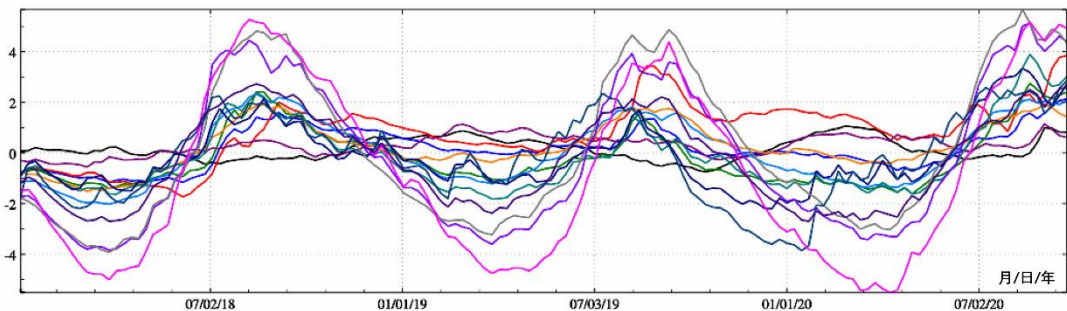


图 3.19 中国大陆陆地水变化负荷形变 (720 阶) -大地水准面变化 mm

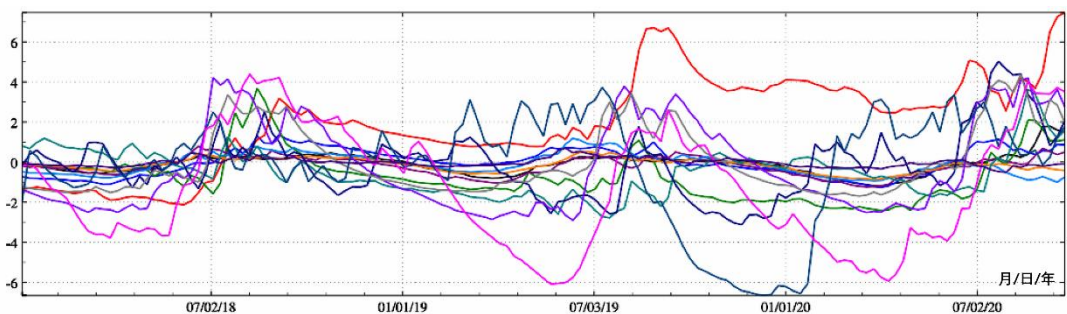


图 3.20 中国大陆土壤水变化负荷形变 (720 阶) -地面重力变化 μGal

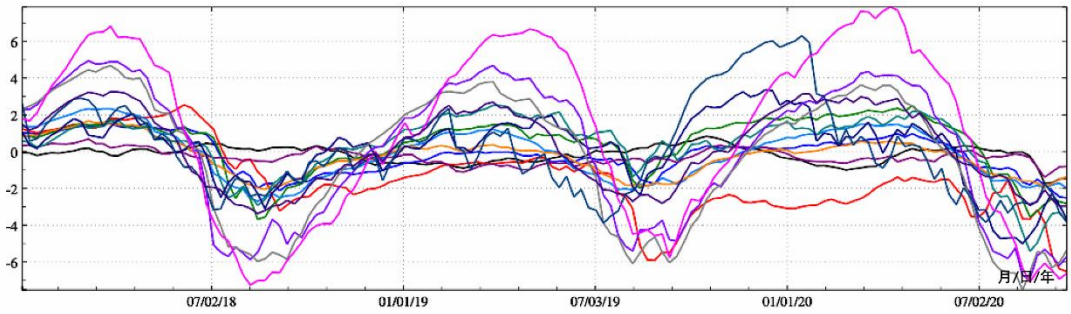


图 3.21 中国大陆陆地水变化负荷形变 (720 阶) -地面大地高变化 mm

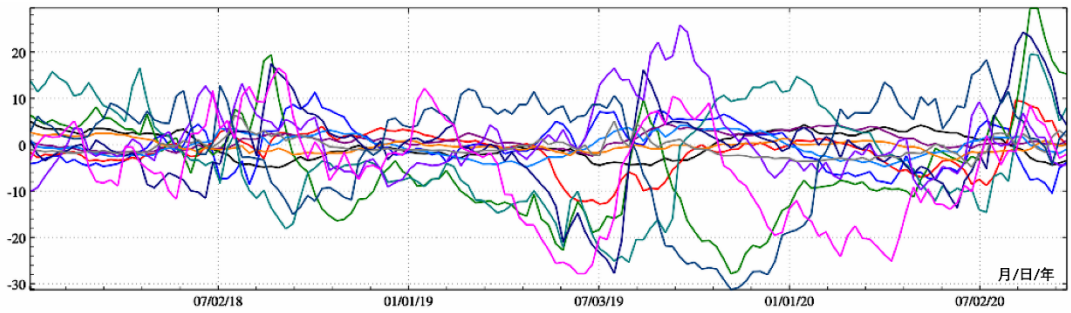


图 3.22 中国大陆陆地水变化负荷形变 (720 阶) -扰动重力梯度变化 $10\mu E$

图 3.23 为由 2 阶 1 次球谐系数($\Delta\bar{C}_{21}^{lnd}$, $\Delta\bar{S}_{21}^{lnd}$)时间序列计算的极移($\Delta x_p, \Delta y_p$)时间序列 (单位 μm , 相对于 2018 年平均位置)。

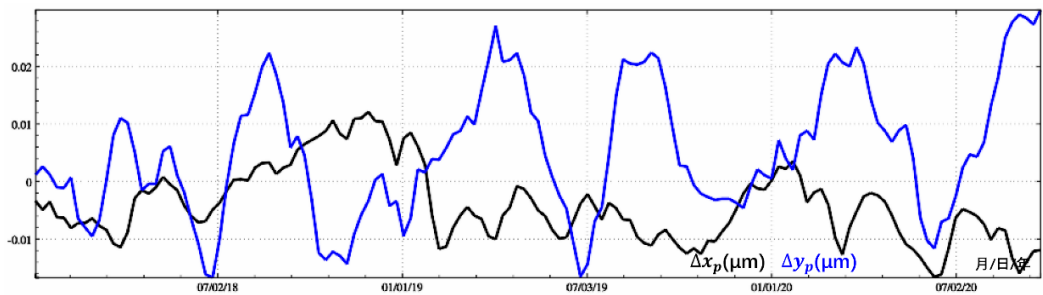


图 3.23 地球极移的陆地水变化负荷效应-相对于 2018 年平均位置

8.3.4~8.3.6 节的计算案例显示, 全球海平面、大气压或陆地水非潮汐负荷变化引起的地球质心形变可达 1cm 以上, 高精度大地测量需要考虑, 而极移的非潮汐负荷效应最大不到 $1\mu m$, 完全可以忽略。

由于等效水高球谐展开及其负荷效应球谐展开都是线性的, 因此, 可以直接将海平面变化与陆地水变化格网相加后, 再进行球谐分析, 并按球谐综合方法计算地面或地球外部总负荷形变效应; 也可以将海平面变化负荷球谐系数模型与陆地水变化负荷球谐系数

模型直接相加, 零阶项也相加, 再按球谐综合方法计算地面或地球外部总负荷形变效应; 分别按 8.3.5、8.3.4 节流程计算海平面变化和陆地水变化负荷形变效应后, 再相加得到地面或地球外部总负荷形变效应。上述三种情况下计算的总负荷形变效应相等。

利用全球海平面、地面大气压、陆地水变化监测数据, 确定地表环境负荷引起的(非潮汐)时变地球重力场, 包括重力位系数和地面及地球外部全要素扰动重力场元的非潮汐负荷效应, 可标定重力卫星关键测量载荷的多种参数, 有效提升和检核卫星重力场时变监测的质量、可靠性、精度与时变重力场监测水平。

8.3.7 地球质心变化的非潮汐地表负荷效应

地球质心变化可用地球重力场的 1 阶位系数变化表示。设参考历元 t_0 到当前历元 t 的这段时间里, 海平面变化 1 阶负荷球谐系数变化 $[\bar{C}_{10}^{sea}(t-t_0), \bar{C}_{11}^{sea}(t-t_0), \bar{S}_{11}^{sea}(t-t_0)]$, 对于非地球质心框架, $k'_1 = 0$, 则由海平面变化此引起的地球质心变化可表示为:

$$\begin{cases} X_{CM}(t-t_0) = \sqrt{3}R \frac{\rho_w}{\rho_e} \bar{C}_{11}^{sea}(t-t_0) \\ Y_{CM}(t-t_0) = \sqrt{3}R \frac{\rho_w}{\rho_e} \bar{S}_{11}^{sea}(t-t_0) \\ Z_{CM}(t-t_0) = \sqrt{3}R \frac{\rho_w}{\rho_e} \bar{C}_{10}^{sea}(t-t_0) \end{cases} \quad (3.46)$$

图 3.24 为由 8.2.4 节 2018 年 1 月至 2020 年 12 月海平面周变化负荷球谐系数模型中的一阶球谐系数 $[\bar{C}_{10}^{sea}(t-t_0), \bar{C}_{11}^{sea}(t-t_0), \bar{S}_{11}^{sea}(t-t_0)]$ 时间序列, 按 (3.46) 式计算的地球质心周变化时间序列 (单位 mm, 相对于 2018 年平均位置)。

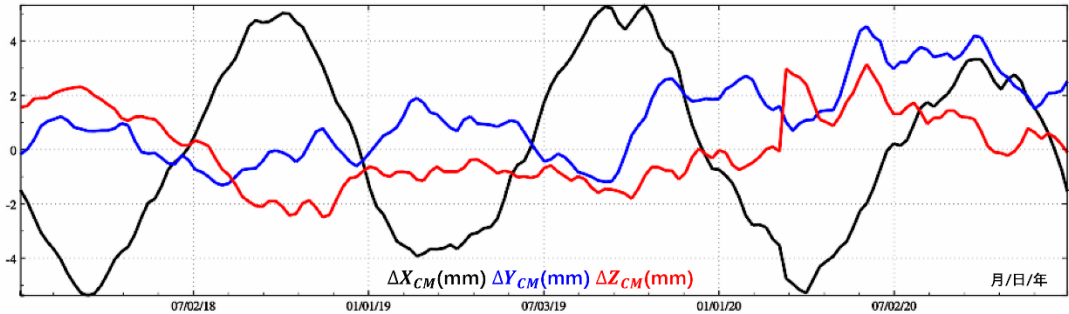


图 3.24 地球质心变化的海平面变化负荷效应-相对于 2018 年平均位置

同理, 可计算非潮汐地面大气压变化和陆地水变化引起地球质心变化。图 3.25 为由 8.2.5 节 2018 年 1 月至 2020 年 12 月大气压周变化负荷球谐系数模型中的一阶项 $[\bar{C}_{10}^{air}(t-t_0), \bar{C}_{11}^{air}(t-t_0), \bar{S}_{11}^{air}(t-t_0)]$ 时间序列, 按 (3.46) 式计算的地球质心周变化时间序列 (单位 mm, 相对于 2018 年平均位置)。

图 3.26 为由 2018 年 1 月至 2020 年 9 月全球陆地水周变化负荷球谐系数模型中的一阶项 $[\bar{C}_{10}^{lnd}(t-t_0), \bar{C}_{11}^{lnd}(t-t_0), \bar{S}_{11}^{lnd}(t-t_0)]$ 时间序列, 按 (3.46) 式计算的地球质心周

变化时间序列（单位 mm，相对于 2018 年平均位置）。

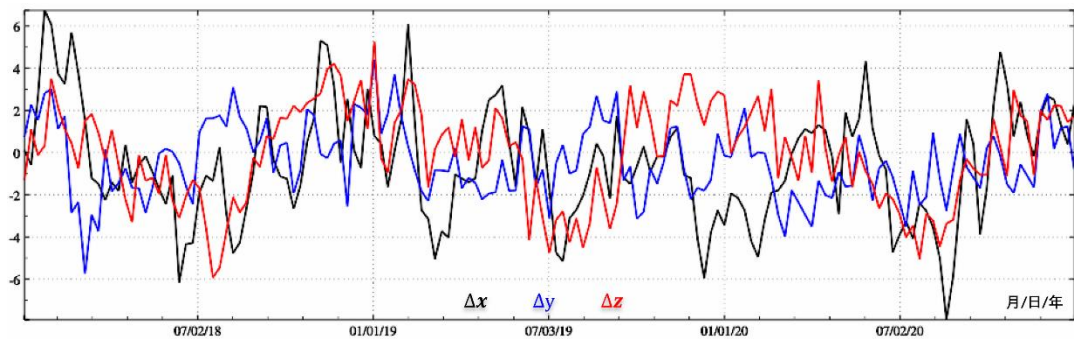


图 3.25 地球质心变化的地面大气压变化负荷效应-相对于 2018 年平均位置

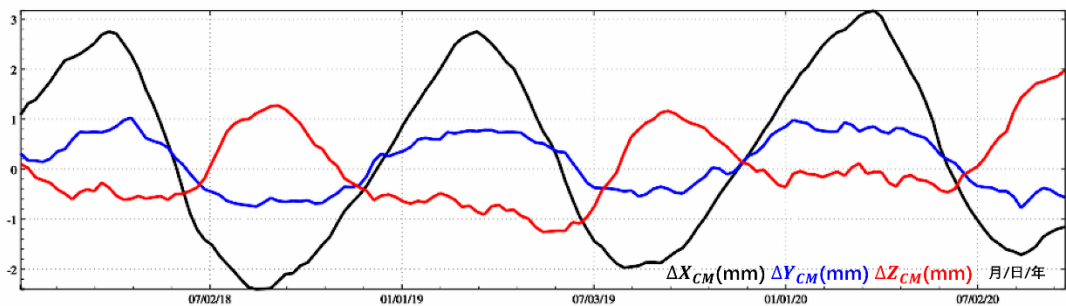


图 3.26 地球质心变化的陆地水变化负荷效应-相对于 2018 年平均位置

显然，若采样历元时刻一一对应，可直接将非潮汐海平面变化、地面大气压变化和全球陆地水变化球谐系数一阶项直接相加后，再按 (3.46) 式计算非潮汐地表环境负荷变化引起的地球质心变化；也可以将上述三种负荷变化引起的地球质心变化相加，得到非潮汐地表环境负荷变化引起的地球质心变化。两者结果等价。

类似于地球质心变化的负荷潮效应，ETideLoad 推荐采用基于地表负荷球谐系数模型的非潮汐负荷效应计算方法，且一阶项不参与计算。这种情况下，地球质心 CM 框架中各种观测量和整个数据处理过程中无需补偿（不能重复补偿）地球质心变化的非潮汐地表负荷效应。但是，若直接按负荷格林函数积分法移去大地测量观测量的地表环境负荷效应后，由于负荷格林函数本身包含一阶项（和零阶项，见 8.5.2 节），必须补偿实际并不存在于地球质心 CM 框架观测或数据处理成果量中的地球质心变化地表环境负荷效应，需要推导额外的地球质心变化补偿算法公式。