

多源异质监测量负荷形变场径向基函数逼近算法

当负荷形变量为扰动位微分或其线性组合，如扰动重力、垂线偏差、水平位移或重力梯度负荷形变效应，其格林函数存在严重的高阶振荡与不收敛问题，格林积分存在频谱泄漏与奇异性问题，如图 1。

不难发现，采用格林积分法计算扰动位微分量不占优的负荷形变量时，如计算地面大地高、高程异常、正高或有明显垂直形变站点的重力、地倾斜负荷效应时，可获得较好的效果，但在计算扰动重力、垂线偏差或水平位移负荷效应时，积分结果很不稳定，其可靠性差。

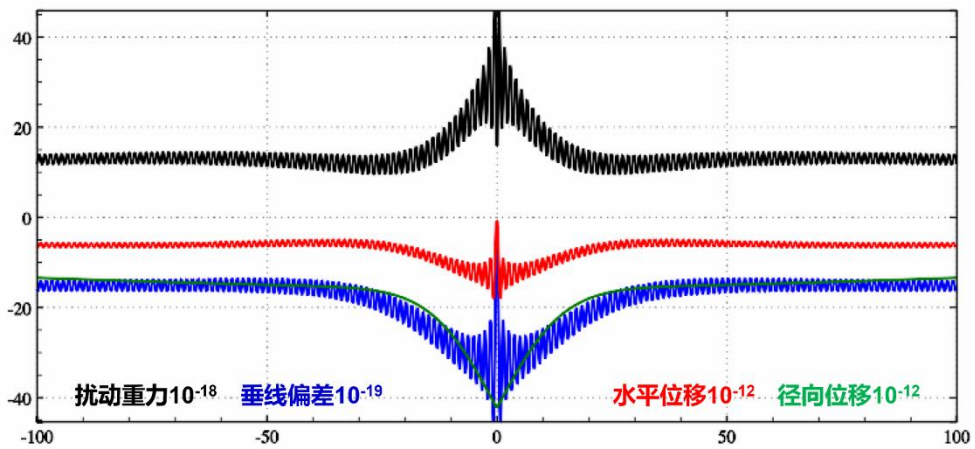


图 1 扰动位微分量负荷 Green 函数近区性质

类似地，在研究陆地水与地表环境负荷大地测量监测方法时，当监测量是 GNSS 大地高变化时，采用格林积分约束法估计，可获得区域陆地水变化及其负荷形变场；但若监测量中的扰动位微分量占优时，如监测量为扰动重力、垂线偏差、水平位移或重力梯度变化时，采用格林函数积分法约束，难以获得稳定解。因此，负荷格林函数积分法，难以胜任多种大地测量监测数据融合与协同监测的需要。

ETideLoad4.5 充分推导与完整实现了负荷 SRBF 谱域逼近（表示）与负荷效应（负荷形变场）SRBF 综合算法，以有效解决负荷格林函数的高阶振荡与不收敛，格林积分的频谱泄漏与奇异性问题，进而提出基于谱域 SRBF 表示的固体地球物理解析约束方法，以解决 GNSS、重力、水准、地倾斜与地下水等多源异质监测量的深度融合问题，并严格在动力学框架中实现了多种异构大地测量与地表环境负荷的协同监测。

8.6.1 地面负荷等效水高球面径向基函数表示

地面点 x 处，负荷等效水高 $h_w(x)$ 可表示为规格化面谐基函数（定义在球半径 a 地面）

的线性组合：

$$h_w(x) = r \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{F}_{nm} \bar{Y}_{nm}(e) \quad (6.1)$$

式中： $x = r \cdot e = r(\sin\theta\cos\lambda, \sin\theta\sin\lambda, \cos\theta)$ ； r, λ, θ 分别是地面点 x 的地心距，经度和余纬； \bar{F}_{nm} 为完全规格化的球谐系数； a 为地球长半轴，表示规格化的面谐函数 \bar{Y}_{nm} 定义在半径等于 a 的球面上，且：

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{nm}(e) &= \bar{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda, \quad \bar{F}_{nm} = \delta\bar{C}_{nm}, \quad m \geq 0 \\ \bar{Y}_{nm}(e) &= \bar{P}_{n|m|}(\cos\theta)\sin|m|\lambda, \quad \bar{F}_{nm} = \bar{S}_{n|m|}, \quad m < 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

$\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$ 为完全规格化缔合 Legendre 函数； n 为球谐系数的阶， m 为球谐系数的次。

将面谐函数 \bar{E}_{nm} 定义在半径为 \mathcal{R} 的 Bjerhammar 球面上，有 $a^n \bar{F}_{nm} = \mathcal{R}^n \bar{E}_{nm}$ ，则地面负荷等效水高可用 Bjerhammar 球面上的面谐函数 \bar{E}_{nm} 表示为：

$$h_w(x) = r \sum_{n=2}^N \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{E}_{nm} \bar{Y}_{nm}(e) \quad (6.3)$$

地面负荷等效水高 $h_w(x)$ 也可表示为 K 个球面径向基函数（SRBF）的线性组合：

$$h_w(x) = a \sum_{k=1}^K d_k \Phi_k(x, x_k) \quad (6.4)$$

式中： $x_k = \mathcal{R} \cdot e_k$ 是定义在 Bjerhammar 球面上的 SRBF 节点，也称为 SRBF 中心或 SRBF 极点； d_k 为 SRBF 系数， K 为 SRBF 节点数，即 SRBF 系数个数； $\Phi_k(x, x_k)$ 为负荷等效水高的球面径向基函数，可简写为 $\Phi_k(x) = \Phi_k(x, x_k)$ 。

球面径向基函数 $\Phi_k(x, x_k)$ 可进一步展开成 Legendre 级数形式：

$$\Phi_k(x, x_k) = \sum_{n=2}^N \phi_n P_n(\psi_k) = \sum_{n=2}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (6.5)$$

式中： ϕ_n 为 SRBF 的 n 阶 Legendre 系数，它表征了 SRBF 形状，基本决定 SRBF 的空域和谱域性质，也称形状因子，在不强调谱域阶数 n 时，也称 B_n 为 SRBF 的 Legendre 系数。 $\mu = \mathcal{R}/r$ 因与径向基函数 $\Phi_k(x)$ 的谱域带宽有关，也称为宽度参数。

将 (6.5) 式代入 (6.4) 得：

$$\begin{aligned} h_w(x) &= \frac{r}{4\pi} \sum_{n=2}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{k=1}^K d_k P_n(\psi_k) \\ &= \frac{r}{4\pi} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \end{aligned} \quad (6.6)$$

顾及球谐函数加法定理：

$$P_n(\psi_k) = P_n(e, e_k) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{nm}(e) \bar{Y}_{nm}(e_k) \quad (6.7)$$

则 (6.5) 式可写成

$$h_w(x) = r \sum_{n=2}^N B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \sum_{k=1}^K d_k \bar{Y}_{nm}(e) \bar{Y}_{nm}(e_k) \quad (6.8)$$

比较 (6.1)、(6.3) 与 (6.8) 式, 可得:

$$\bar{F}_{nm} = \left(\frac{R}{a}\right)^n \bar{E}_{nm} = B_n \left(\frac{R}{a}\right)^n \sum_{k=1}^K d_k \bar{Y}_{nm}(e_k) \quad (6.9)$$

利用式 (6.9), 就可由球面径向基函数系数 d_k 计算负荷等效水高球谐系数 \bar{F}_{nm} 。之后, 就可采用负荷形变场球谐综合算法公式, 计算地面负荷等效水高、以及地面及其外部各种大地测量观测量或参数负荷形变效应。

SRBF 节点 (中心) x_k 在 Bjerhammar 球面上的位置、分布和数量, 是球面径向基函数逼近的关键性指标, 决定了负荷形变场 (时变重力场) 的空间自由度 (空间分辨率) 和空域特征, 对应全球负荷球谐系数模型的阶数。

8.6.2 适合负荷形变场监测的球面径向基函数

用于负荷形变场 (时变重力场) 逼近的径向基函数应满足 Laplace 方程。常见的点质量核函数, Poisson 核函数、径向多极子核函数和 Poisson 小波核函数都是具有调和性质的径向基核函数。

令 x 为地球外部计算点, x_k 为 Bjerhammar 球面 Ω_R 上的 SRBF 节点。

(1) 点质量核函数

点质量核函数由 Hardy (1971) 提出的一种逆多面函数 (IMQ), 是引力位积分公式 $V = G \iiint \frac{dm}{L}$ 的核函数, 其解析表达式为

$$\Phi_{IMQ}(x, x_k) = \frac{1}{L} = \frac{1}{|x - x_k|} \quad (6.10)$$

式中: L 为 x 与 x_k 为的空间距离。由于 $\Delta(1/L) = 0$, 因此点质量核函数 $\Phi_{IMQ}(x, x_k)$ 满足 Laplace 方程。

(2) Poisson 核函数

Poisson 核函数源于扰动重力场元的 Poisson 积分公式, 其解析表达式为

$$\Phi_P(x, x_k) = -2r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{L}\right) - \frac{1}{L} = \frac{r^2 - r_k^2}{L^3} \quad (6.11)$$

(3) 径向多极子核函数

径向多极子核函数的解析表达式为

$$\Phi_{RM}^m(x, x_k) = \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial r_k}\right)^m \frac{1}{L} \quad (6.12)$$

式中: m 可称为径向多极子核函数的次 (order), 零次径向多极子核函数就是点质量核函

数 $\Phi_{IMQ}(x, x_k) = \Phi_{RM}^0(x, x_k)$ 。

(4) Poisson 小波核函数

Poisson 小波核函数的解析表达式为

$$\Phi_{PW}^m(x, x_k) = 2(\chi_{m+1} - \chi_m), \quad \chi_m = \left(r_k \frac{\partial}{\partial r_k}\right)^m \frac{1}{L} \quad (6.13)$$

零次 Poisson 小波核函数就是 Poisson 核函数 $\Phi_P(x, x_k) = \Phi_{PW}^0(x, x_k)$ 。

(5) 球面径向基函数计算

为突出负荷及其形变场的谱域性质，通常将等效水高球面径向基函数解析表达式 (6.10) ~ (6.13) 表示成 Legendre 级数形式 (6.5) 后，按 Legendre 级数计算。

ETideLoad4.5 将球面径向基函数 $\Phi_k(x, x_k)$ 的 Legendre 级数进行归一化处理，计算归一化系数，用归一化后的 Legendre 级数展开式计算球面径向基函数。令 x, x_k 的球面角距 $\psi_k = 0$ ，则 $\cos\psi_k = 1$ ，顾及 $P_n(\cos\psi_k) = P_n(1) = 1$ ，代入 (6.5) 式，得等效水高球面径向基函数归一化系数的通用表达式：

$$\Phi^0 = \sum_{n=2}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n \quad (6.14)$$

归一化后的负荷等效水高球面径向基函数 Legendre 级数为：

$$\Phi_k(x, x_k) = \frac{1}{\Phi^0} \sum_{n=2}^N \phi_n P_n(\psi_k) = \frac{1}{\Phi^0} \sum_{n=2}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n P_n(\psi_k) \quad (6.15)$$

上述四种形式的负荷等效水高径向基函数及其对应的 Legendre 系数如下表 6。

表 6 负荷等效水高径向基函数及其 Legendre 系数

径向基函数	解析表达式 $\Phi_k(x, x_k)$	第 n 阶形状因子 ϕ_n	Legendre 系数 B_n
点质量核函数	$\frac{1}{L} = \frac{1}{ x-x_k }$	μ^n	$\frac{4\pi}{2n+1}$
Poisson 核函数	$\frac{r^2-r_k^2}{L^3}$	$(2n+1)\mu^n$	4π
径向多极子核函数	$\frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial r_k}\right)^m \frac{1}{L}$	$C_n^m \mu^{n-m} \quad (n \geq m)$	$\frac{4\pi C_n^m}{2n+1} \mu^{-m}$
Poisson 小波核函数	$2(\chi_{m+1} - \chi_m)$ $\chi_m = \left(r_k \frac{\partial}{\partial r_k}\right)^m \frac{1}{L}$	$(-n \ln \mu)^m (2n+1)\mu^n$	$4\pi(-n \ln \mu)^m$

8.6.3 单位球面 Reuter 网格及有关参数算法

已知 Reuter 网格等级 Q (偶数)，则球坐标系中单位球面 Reuter 网格的地心纬度间隔 $d\varphi$ ，单元网格 i 中心的地心纬度 φ_i 算法为

$$d\varphi = \frac{\pi}{Q}, \quad \varphi_i = -\frac{\pi}{2} + \left(i - \frac{1}{2}\right) d\varphi, \quad 1 \leq i < Q \quad (6.16)$$

纬度 φ_i 处的平行圈方向单元格网数 J_i ，经度间隔 $d\lambda_i$ 与边长 dl_i 算法为

$$J_i = \left\lceil \frac{2\pi \cos \varphi_i}{d\varphi} \right\rceil, \quad d\lambda_i = \frac{2\pi}{J_i}, \quad dl_i = d\lambda_i \cos \varphi_i \quad (6.17)$$

不难发现， $dl_i \approx d\varphi$ 。记

$$\varepsilon_i = \frac{ds_i - ds}{ds} = \frac{dl_i - d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\lambda_i}{d\varphi} \cos \varphi_i - 1 \quad (6.18)$$

式中： ds 为赤道附近单元格网面积， ds_i 为平行圈 φ_i 处单元格网面积， ε_i 表示平行圈单元格网面积相对赤道附近单元格网面积的相对偏差。 ε_i 一般很小，约为万分之几，具体数值与 Reuter 网格等级 Q 有关。赤道附近单元格网面积 $ds = d\varphi \cdot d\varphi$ ，单元格网面积相对偏差 $\varepsilon_{Q/2} = 0$ 。

对于局部区域，给定区域经纬度范围，可直接按 (6.16) 式确定 i 的最小最大值，再按 (6.17) 式计算每个平行圈处的最大 J_i ，从而确定网格等级为 Q 的区域 Reuter 网格，无需计算全球网格。

8.6.4 负荷及其形变效应的径向基函数参数形式

依据负荷形变球谐级数展开式 (3.5) ~ (3.17)，可由 (6.6) 地面负荷球面径向基函数展开式 (最右边表达式)，导出各种地面负荷形变效应径向基函数级数参数化形式。

$$h_w(x) = r \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (6.19)$$

$$\zeta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n (1+k'_n) \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (6.20)$$

$$\delta g = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1)(1+k'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (6.21)$$

$$g_t = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1) \left(1 + \frac{2}{n} h'_n - \frac{n+1}{n} k'_n\right) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (6.22)$$

$$\xi^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n (1+k'_n - h'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (6.23)$$

$$\eta^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n (1+k'_n - h'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (6.24)$$

$$\xi = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (6.25)$$

$$\eta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (6.26)$$

$$\text{水平东向 } e = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n l'_n B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (6.27)$$

$$\text{水平北向} n = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sin\alpha_k \sum_n l'_n B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (6.28)$$

$$\text{径向位移} r = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n h'_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (6.29)$$

$$\text{地面正(常)高变化} h = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n h'_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (6.30)$$

$$T_{rr} = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^3} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1)(n+2)(1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (6.31)$$

$$T_{NN} = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^3} \sum_{k=1}^K d_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \varphi_k^2} \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial^2 P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k^2} \quad (6.32)$$

$$T_{WW} = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^3 \cos^2 \varphi} \sum_{k=1}^K d_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \lambda_k^2} \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial^2 P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k^2} \quad (6.33)$$

式中： α_k 是 ψ_k 的大地方位角。

对于区域性负荷及其形变效应（时变重力场）监测目的，通常需要借助参考全球时变重力场模型（如 GRACE 时变重力场模型），或已知全球负荷形变场模型（大气压、海平面变化与地表水负荷球谐系数模型），移去中低阶负荷及其形变效应的参考模型值，由区域监测数据逼近残差负荷及其形变效应。

与空域负荷格林函数积分法一样，若已知区域地表负荷等效水高 h_w ，可按（6.19）式对负荷等效水高 h_w 进行 SRBF 谱域分析，求解 SRBF 系数模型（ETideLoad4.5 称这个过程为负荷 SRBF 逼近），进而按 SRBF 系数模型的系数综合算法，由（6.20）~（6.33）式计算区域全要素负荷形变场（ETideLoad4.5 称这个过程为负荷效应 SRBF 综合）。

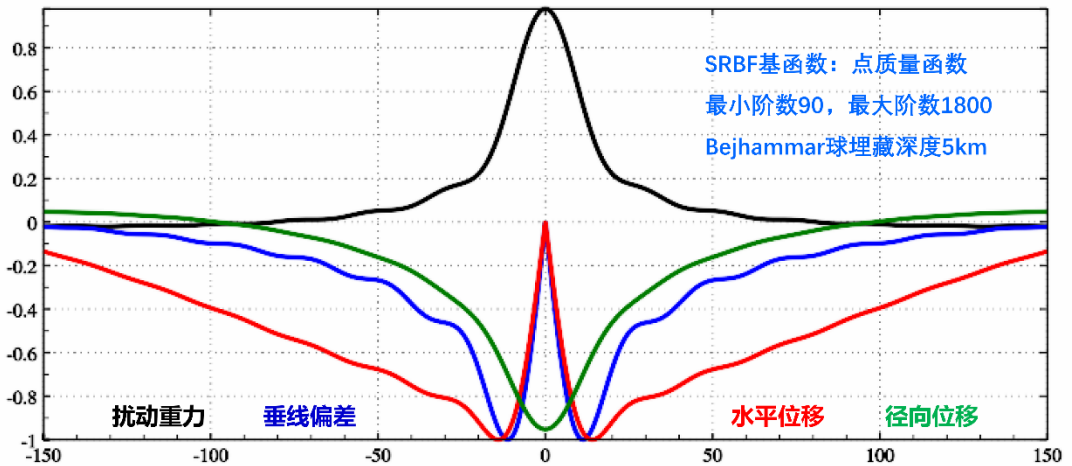


图 2 扰动位微分量负荷效应 SRBF 近区性质

这里，选择点质量函数为球面径向基函数，设置最小阶数和最大阶数分别为 90 和 1800 阶，令 Bjerhammar 球埋藏深度 5km，SRBF 中心最大作用距离 150km，计算与图

1 负荷形变量类型相同的扰动重力、垂线偏差、地面水平位移和径向位移负荷效应的 SRBF 空域曲线，如图 2。

比较图 1 和图 2 可以看出，即使是地面大地高负荷效应，近区 SRBF 函数的收敛性质也明显优于负荷格林函数。扰动重力、垂线偏差、水平位移负荷效应的 SRBF 函数在 20km 内的近区都是单调收敛的。采用 SRBF 代替，能有效解决负荷格林函数在近区的高阶振荡与不收敛问题。

8.6.5 球面角距 ψ 水平一、二阶偏导数算法公式

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -\cos\alpha, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -\cos\varphi\sin\alpha \quad (6.34)$$

式中： α 是球面角距 ψ 的大地方位角，由球面三角公式可得：

$$\sin\psi\cos\alpha = \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda' - \lambda) \quad (6.35)$$

$$\sin\psi\sin\alpha = \cos\varphi'\sin(\lambda' - \lambda) \quad (6.36)$$

将 (6.35) 式两边对 φ 求偏导，顾及 (6.34) 式，有：

$$-\cos\psi\cos^2\alpha + \sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = -\sin\varphi\sin\varphi' - \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda' - \lambda), \quad \text{从而可得：}$$

$$\sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = -\sin\varphi\sin\varphi' - \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda' - \lambda) + \cos\psi\cos^2\alpha \quad (6.37)$$

同理，将 (6.36) 式两边对 λ 求偏导，有：

$$-\cos\psi\cos\varphi\sin^2\alpha + \sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} = -\cos\varphi'\sin(\lambda' - \lambda), \quad (6.38)$$

从而可得：

$$\sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} = -\cos\varphi'\sin(\lambda' - \lambda) + \cos\psi\cos\varphi\sin^2\alpha \quad (6.39)$$

8.6.6 抑制边缘效应的 SRBF 系数参数估计

将表 6 中负荷等效水高径向基函数对应的球面径向基函数勒让德系数 B_n 代入上述各式，就是以（残差）监测量 $F(x_i)$ （移去全球参考值）为观测量，球面径向基函数系数 d_k 为未知数的区域负荷及其形变场（时变重力场）SRBF 基本观测方程：

$$L = \{F(x_i)\}^T = A\{d_k\}^T + e \quad (i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, K) \quad (6.40)$$

式中： A 为 $M \times K$ 设计矩阵， e 为 $M \times 1$ 观测量误差向量； M 为观测数， K 为 SRBF 极点数即未知数 d_k 个数； x_i 为观测点位置。

ETideLoad4.5 提出了一种通过抑制边缘效应来提高 SRBF 系数参数估计性能的算法。当 SRBF 节点 v 位于计算区域边缘时，令其对应的系数等于零即 $d_v = 0$ 作为观测方程，

以抑制边缘效应，提升 SRBF 系数 $\{d_k\}$ 参数估计的稳定性和可靠性。ETideLoad4.54.5 采用附加抑制边缘效应的法方程为：

$$[A^T P A + \epsilon \Xi] \{d_k\}^T = A^T P L \quad (6.41)$$

式中： Ξ 为对角线矩阵，当仅当其下标对应的 SRBF 中心位于区域边缘时等于 1，其余为零。 ϵ 为协因数阵 $A^T P A$ 对角线标准差。

为保持负荷形变场逼近性能的空间一致性，ETideLoad4.5 在构建观测方程 (6.40) 过程中，要求所有 SRBF 中心的作用距离 dr （也称影响半径）相等。这里的作用距离 dr 相应于 SRBF 自变量的定义域，因此任一监测量仅用半径 dr 范围内 SRBF 节点球面径向基函数的线性组合表示。SRBF 中心作用距离 dr 等效于负荷格林函数的积分半径。

引入边缘效应抑制方法后，法方程不再需要正则化，从而避免负荷形变场（时变重力场）的解析结构受监测量误差影响，提高算法的普适性和可靠性。法方程采用这种策略后，可由 CORS 站网或固体潮站网监测量时间序列，实现负荷形变场（时变重力场）时间序列的规模化批量监测计算。

法方程 (6.41) 求解，可选择 LU 三角分解法（平方根法）或 Cholesky 分解法。

8.6.7 多源异质监测量径向基函数逼近

(1) 某种类型监测量贡献调节与边缘效应抑制

ETideLoad4.5 提出了一种可同时抑制边缘效应和调节某一指定类型监测量贡献的径向基函数负荷形变场监测方法。其法方程为：

$$\sum_i^{i \neq j} \left(\frac{1}{\epsilon_i} A_i^T P_i A_i \right) + \frac{\kappa^2}{\epsilon_j} A_j^T P_j A_j + \epsilon \Xi \{d_k\}^T = \sum_i^{i \neq j} \left(\frac{1}{\epsilon_i} A_i^T P_i L_i \right) + \frac{\kappa^2}{\epsilon_j} A_j^T P_j L_j \quad (6.42)$$

式中： ϵ_j 为指定类型 j 可调控监测量的协因数阵组合参数， ϵ_i 为监测量 i ($i \neq j$)的协因数阵组合参数； κ 为可调控监测量 j 的贡献率。

ETideLoad4.5 将可调控监测量的法方程系数矩阵 $A_j^T P_j A_j$ 与常数项 $A_j^T P_j L_j$ 分别乘以贡献率 κ ，以提高 ($\kappa > 1$) 或降低 ($\kappa < 1$) 可调控监测量的贡献率。

(2) 多源异质观测场元融合的参数估计方法

多种监测量融合的参数估计通常采用方差分量估计法。该方法取 ϵ_i 、 ϵ_j 分别为第 i 种残差监测量方差 σ_i^2 和可调控监测量方差 σ_j^2 。此时，法方程需要采用迭代求解方案。初始方差取原监测量方差，迭代计算时取前次迭代结果的残差监测量方差。

方差分量估计法 SRBF 系数参数估计需要迭代计算，受监测误差影响，不但存在没有稳定解的风险，还严重削弱了粗差探测能力。ETideLoad4.5 提出一种适应各种复杂杂测情形的协因数阵对角线标准差法。该方法取 ϵ_i 、 ϵ_j 分别为第 i 种残差监测量协因数阵对角

线的标准差和可调控监测量协因数阵对角线的标准差。采用协因数阵对角线标准差法，法方程无需迭代计算。

协因数阵对角线法，与监测量误差无关，且不受不同类型场元监测点空间分布差异的影响，从而有利于融合监测点空间分布存在极端差异的多种类型大地测量监测数据。

(3) 多次累积 SRBF 逼近法负荷形变场逼近

待定负荷是监测量与滤波器 SRBF 的卷积。显然，一个 SRBF 难以同时与监测量和待定负荷的谱域中心及带宽有效匹配，因而无法避免待定负荷的谱泄漏。而且，除埋藏深度（宽度参数）外，SRBF 类型、最小最大阶数与 SRBF 中心分布也都影响待定负荷的估计性能。因此，仅以埋藏深度为参数的 SRBF 系数最优估计，不足以保证地表负荷的最佳估计。

为解决这一关键问题，ETideLoad4.5 基于负荷形变场的线性可加性，提出了多次累积 SRBF 逼近法负荷形变场（时变重力场）建模方案，代替以埋藏深度（或宽度参数）为参数的 SRBF 系数最优估计方案，且每次逼近不再要求确定最佳埋藏深度（宽度参数）。

当每次 SRBF 逼近采用不同谱域特征的 SRBF，多次累积 SRBF 逼近通过组合多个 SRBF 谱域中心及带宽，可充分解析负荷及其形变效应的谱域信号，避免谱泄漏，从而在空域中实现负荷及其形变场（时变重力场）的最佳恢复。

ETideLoad4.5 给出 SRBF 参数、算法参数与累积逼近有效性原则：①负荷及其形变场空间连续可微，②监测量的残差标准差明显减小，残差统计平均值趋于零。。

多次累积 SRBF 逼近法的每次残差逼近本质是用上次逼近结果作参考场，按移去恢复法逼近残差负荷及其形变效应。假设 A、B 为两个独立的多次 SRBF 逼近作业流程，由负荷形变场的线性可加性可知，即使 A、B 中各单次残差逼近结果互不相同，但分别累加后的最终负荷逼近结果趋于一致。

特别地，通过选择可调控监测量及其贡献率 κ ，能有效处理极端空间分布、质量与精度差异大等异常复杂情况下高精度负荷形变场逼近难题。 $\kappa = 0$ 时，可有效探测该类监测量粗差，评估其质量与外部精度（如 CORS 网、固体潮站网等联合的流动大地测量监测网质量评估）； $\kappa > 1$ 时，可有效提高高精度监测量的贡献，如 CORS 网与流动大地测量监测网联合监测时，可提高 CORS 站监测量的贡献率； $\kappa < 1$ 时，可有效抑制低质量监测量的影响。