

## 地面及其外部全要素固体潮效应统一计算方法

太阳系中地球外部天体的引潮位直接引起地面及地球外部重力位变化，并激发固体地球形变，引起地球内部的质量调整，产生附加引力位。前者是引潮位的直接影响（即引潮位自身），后者是引潮位的间接影响。两者之和就是地面及地球外重力位的固体潮效应，简称体潮效应。固体潮使大地水准面的形状发生周期性的变化，局部发生倾斜，面上的重力值也发生变化。

### 8.1.1 地面及其外部固体潮效应统一表示

#### 8.1.1.1 地球外部天体的地球引潮位计算

地球外部重力场可用重力位系数模型 $(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})$ 表示，同样，在任意历元时刻 $t$ ，地球外部太阳系天体对固体地球的引潮位可用重力位系数随时间的变化 $(\Delta\bar{C}_{nm}, \Delta\bar{S}_{nm})$ 表示为：

$$\Delta\bar{C}_{nm} - i\Delta\bar{S}_{nm} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=2}^{10} \frac{GM_j}{GM} \left(\frac{a}{r_j}\right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos\theta_j) e^{im\lambda_j} \quad (1.1)$$

式中： $\Delta\bar{C}_{nm} - i\Delta\bar{S}_{nm} = \Delta\bar{C}_{nm}(t) - i\Delta\bar{S}_{nm}(t)$ 为引潮位对 $n$ 阶 $m$ 次位系数的直接影响； $GM_j$ 为引潮天体 $j$ 引力常数； $r_j = r_j(t)$ 为引潮天体的地心距； $j = 2\sim 10$ ，分别代表月球( $n = 2, 3, 4, 5$ )、太阳( $n = 2, 3$ )、水星、金星、火星、木星、土星、天王星和海王星( $n = 2$ )； $\theta_j = \theta_j(t)$ 为地固坐标系中引潮天体的地心余纬； $\lambda_j = \lambda_j(t)$ 为地固坐标系中引潮天体的经度（格林尼治恒星时）。式（1.1）省略了自变量 $t$ 。

在（1.1）中，任意历元时刻 $t$ 的太阳系天体在地固坐标系中球坐标 $(r_j, \lambda_j, \varphi_j)$ 可用太阳系星历表计算。比较著名的是美国喷气推进实验室（Jet Propulsion Laboratory, JPL）每年基于观测数据的更新持续改进的系列太阳系星历表。从2003年开始，喷气推进实验室采用ICRF坐标框架，推出了DE405/LE405星历表，2008、2014和2021年又推出DE421/LE421、DE432和DE440/LE440星历表。其他国家也发布了一系列星历表。

利用JPL太阳系星历表，可以计算引潮天体在任意 $t$ 历元时刻的地心天球坐标。然后根据地球定向参数（如EOPC04）、岁差（如IAU2006）和章动（如IAU2000A）模型，将坐标从地心天球参考系统（Geocentric Celestial Reference System, GCRS）转换到国际地面参考系统（International Terrestrial Reference system, ITRS），其转换公式为（Petit和Luzum, 2010）：

$$[ITRS] = W(t)R(t)Q(t)[GCRS] \quad (1.2)$$

式中： $[ITRS]$ 为引潮天体的地固坐标； $[GCRS]$ 为引潮天体的地心天球坐标； $t$ 为对应的历元时刻； $W(t)$ 为极移矩阵； $R(t)$ 为地球旋转矩阵； $Q(t)$ 为岁差-章动偏移矩阵。

国际天文联合会（IAU）负责讨论并制定国际通用的天文标准，包括常用的天文常数，有关地球自转轴运动的岁差、章动和极移等。SOFA软件包是IAU编写的有关天文基础标准的子程序库，旨在为天文计算提供权威有效的算法程序和常数数值，可进行天文历

法计算、时间计算、星历表计算、岁差章动计算、恒星空间运动计算和主要星表参考系统转换。

### 8.1.1.2 地面及其外部全要素固体潮效应表示

按照重力位球谐展开理论，地面或地球外部任意点 $(r, \varphi, \lambda)$ 处的 $n$ 阶引潮位 $\Delta V_n(r, \theta, \lambda)$ 和 $n$ 阶引潮力 $\dot{g}_n(r, \theta, \lambda)$ 可用 $n$ 阶位系数变化 $(\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm})$ 表示为：

$$\begin{aligned}\Delta V_n(r, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \\ \dot{g}_n(r, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{r^2} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta)\end{aligned}\quad (1.3)$$

对于球对称非旋转弹性地球，位勒夫数 $k_n$ 和位移勒夫数 $(h_n, l_n)$ 是实数 $(n = 2, 3)$ ，取值如表 1.4。当 $n \geq 4$ 时， $k_n = h_n = l_n = 0$ 。

由 $n$ 阶引潮位 $\Delta V_n$ 引起的地球重力位系数变化 $(\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm})$ ，可导出地面及其外部各种大地测量观测量或参数（要素）的固体潮效应表达式。

地面或地球外部空间任意点 $(r, \varphi, \lambda)$ 处的重力位固体潮效应 $\dot{V}(r, \varphi, \lambda)$ ，等于该点处各阶引潮位 $\Delta V_n(r, \theta, \lambda)$ 与附加位 $\Phi_n^a(r, \theta, \lambda) = k_n \Delta V_n(r, \theta, \lambda)$ 之和：

$$\begin{aligned}\dot{V}(r, \theta, \lambda) &= \sum_{n=2}^6 [\Delta V_n(r, \theta, \lambda) + \Phi_n^a(r, \theta, \lambda)] = \sum_{n=2}^6 (1 + k_n) \Delta V_n(r, \theta, \lambda) \\ &= \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^6 \left(\frac{a}{r}\right)^n (1 + k_n) \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta)\end{aligned}\quad (1.4)$$

按是否直接包含位移勒夫数作用下固体地球形变贡献划分，大地测量观测量或参数（要素）的固体潮效应分成两类。一类大地测量要素的固体潮效应，不直接包含位移勒夫数 $(h_n, l_n)$ 作用下的固体地球形变贡献，如地球外部重力位（扰动位/高程异常）、重力（扰动重力）、垂线偏差、重力梯度等；另一类是大地测量要素所属点位与固体地球固连，其固体潮效应包含位移勒夫数 $(h_n, l_n)$ 作用下的固体地球形变贡献，如地面站点重力、地倾斜、水准高程的固体潮效应。显然，地面外部空间（低空和卫星高度）、海面及其水下空间点（不与海底固连）的若干大地测量要素固体潮效应属于第一类，与 CORS 站并置并同步定点观测的重力和地倾斜台站，可以直接移去大地高的各种形变效应影响，其扰动重力、垂线偏差的固体潮效应也属于第一类。因此，第一类固体潮效应的点位可以位于地面、地面外部和海洋空间，以下简称地面及固体地球外部空间。

类似重力位固体潮效应表达式推导过程，地面或固体地球外部高程异常（大地水准面）固体潮效应表达式为：

$$\begin{aligned}\zeta(r, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{\gamma r} \sum_{n=2}^6 \left(\frac{a}{r}\right)^n (1 + k_n) \\ &\quad \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta)\end{aligned}\quad (1.5)$$

地面或固体地球外部扰动重力固体潮效应表达式为

$$\delta \dot{g}(r, \theta, \lambda) = \dot{g} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^6 (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n (1 + k_n)$$

$$\sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (1.7)$$

地面或固体地球外部垂线偏差固体潮效应表达式

$$\text{南向: } \xi(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{\gamma r^2} \sin\theta \sum_{n=2}^6 \left(\frac{a}{r}\right)^n (1 + k_n)$$

$$\sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (1.6)$$

$$\text{西向: } \eta(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{\gamma r^2 \sin\theta} \sum_{n=2}^6 \left(\frac{a}{r}\right)^n (1 + k_n)$$

$$\sum_{m=1}^n m (\Delta \bar{C}_{nm} \sin m\lambda - \Delta \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (1.7)$$

地面或固体地球外部扰动重力梯度固体潮效应（径向）表达式

$$\dot{T}_{rr}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r^3} \sum_{n=2}^6 (n+1)(n+2) \left(\frac{a}{r}\right)^n (1 + k_n)$$

$$\sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (1.8)$$

地面或固体地球外部水平重力梯度固体潮效应表达式

$$\text{北向: } \dot{T}_{NN}(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{r^3} \sum_{n=2}^6 \left(\frac{a}{r}\right)^n (1 + k_n)$$

$$\sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (1.9)$$

$$\text{西向: } \dot{T}_{WW}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r^3 \cos^2\varphi} \sum_{n=2}^6 \left(\frac{a}{r}\right)^n (1 + k_n)$$

$$\sum_{m=1}^n m^2 (\Delta \bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (1.10)$$

与固体地球固连的地面站点，其位移固体潮效应表达式⊙

$$\text{东方向: } e(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{\gamma r^2 \sin\theta} \sum_{n=2}^3 \left(\frac{a}{r}\right)^n l_n$$

$$\sum_{m=1}^n m (\Delta \bar{C}_{nm} \sin m\lambda - \Delta \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (1.11)$$

$$\text{北方向: } n(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{\gamma r^2} \sin\theta \sum_{n=2}^3 \left(\frac{a}{r}\right)^n l_n$$

$$\sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (1.12)$$

$$\text{径向: } r(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{\gamma r} \sum_{n=2}^3 \left(\frac{a}{r}\right)^n h_n$$

$$\sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (1.13)$$

与固体地球固连的地面站点，其地面重力固体潮效应表达式为⊙

$$\dot{g}^s(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^6 (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \left(1 + \frac{2}{n} h_n - \frac{n+1}{n} k_n\right)$$

$$\sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (1.14)$$

与固体地球固连的地面站点，其地倾斜固体潮效应表达式⊙

$$\begin{aligned} \text{南向: } \xi^s(r, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{\gamma r^2} \sin \theta \sum_{n=2}^6 \left(\frac{a}{r}\right)^n (1 + k_n - h_n) \\ &\quad \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \text{西向: } \eta^s(r, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{\gamma r^2 \sin \theta} \sum_{n=2}^6 \left(\frac{a}{r}\right)^n (1 + k_n - h_n) \\ &\quad \sum_{m=1}^n m (\Delta \bar{C}_{nm} \sin m\lambda - \Delta \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (1.16)$$

不难看出，上述标注⊙的大地测量观测量或参数（要素），只有在其点位与地球固连情况下有效，其余大地测量要素适合地面及固体地球外部空间。

为统一表示海潮、大气潮、外部天体与非潮汐负荷对地面及固体地球外部各种大地测量要素（观测量或参数）的影响，本书将引潮位的直接影响与间接影响之和，统一称为固体潮效应（一些文献仅将引潮位的间接影响称为固体潮效应）。

### 8.1.1.3 天体的引潮位与引潮力及其时变分析

利用太阳系历表，由 (1.1) 和 (1.3) 式，可计算太阳系中地球外部天体在地球空间中的  $n$  阶引潮位（引潮力），进而参考当前及未来一段时期，形变地球大地测量学需要和技术水平，确定参与计算的太阳系天体及其引潮位展开阶数  $n$ ，计算并考察不同阶次引潮位（引潮力）的周期性、量级与时变规律。

地球外部天体的地球引潮位和引潮力的数值与计算点在地球坐标系中的位置有关。这里以东经  $105^\circ$ ，北纬  $20^\circ$ ，大地高  $100\text{m}$  的地面点为计算点，记  $P(N105^\circ, E20^\circ, H100\text{m})$ ，由 (1.3) 式，计算太阳系中 10 个地球外部天体 2~6 阶地球引潮位  $\Delta V_n$ （单位  $10^{-5}\text{m}^2/\text{s}^2$ ）和引潮力  $\dot{g}_n$ （单位  $\text{nGal}=10^{-11}\text{m}/\text{s}^2$ ），其中，对 10 个天体的各阶地球引潮位（引潮力）的最大值与最小值之差如表 5.1。表中 0.0000 表示计算结果四舍五入后接近零，空白表示值太小（比 0.0000 更小），无需计算。

由表 1.1 可以看出，地球引潮位和引潮力计算时，若取截断阈值为  $10^{-8}\text{m}^2/\text{s}^2$  或  $11^{-14}\text{m}/\text{s}^2$  时，月球需展开计算至 6 阶，太阳需展开至 3 阶，水星、金星、火星、木星、土星均只需展开至 2 阶，天王星、海王星、冥王星不需要参与计算。

表 1.1 引潮天体的  $n$  阶地球引潮位（引潮力）最大最小值之差统计

天体	$\Delta V_2$	$\dot{g}_2$	$\Delta V_3$	$\dot{g}_3$	$\Delta V_4$	$\dot{g}_4$
月球	247660.1100	116532.1527	6176.8512	2906.4098	174.7919	124.7522
太阳	92514.4904	43531.0825	5.6041	2.6369	0.0004	0.0003
金星	10.8438	5.1023	0.0014	0.0007	0.0000	0.0000
木星	1.4120	0.6644	0.0000	0.0000		
火星	0.4041	0.1901	0.0000	0.0000		
水星	0.0815	0.0383	0.0000	0.0000		
土星	0.0383	0.0164	0.0000	0.0000		

天王星	0.000566	0.000266				
海王星	0.000194	0.000091				
冥王星	0.00000002	0.00000001				
	$\Delta V_5$	$\dot{g}_5$	$\Delta V_6$	$\dot{g}_6$	$\Delta V_7$	$\dot{g}_7$
月球	3.0696	2.7402	0.0531	0.0567	0.0000	0.0000

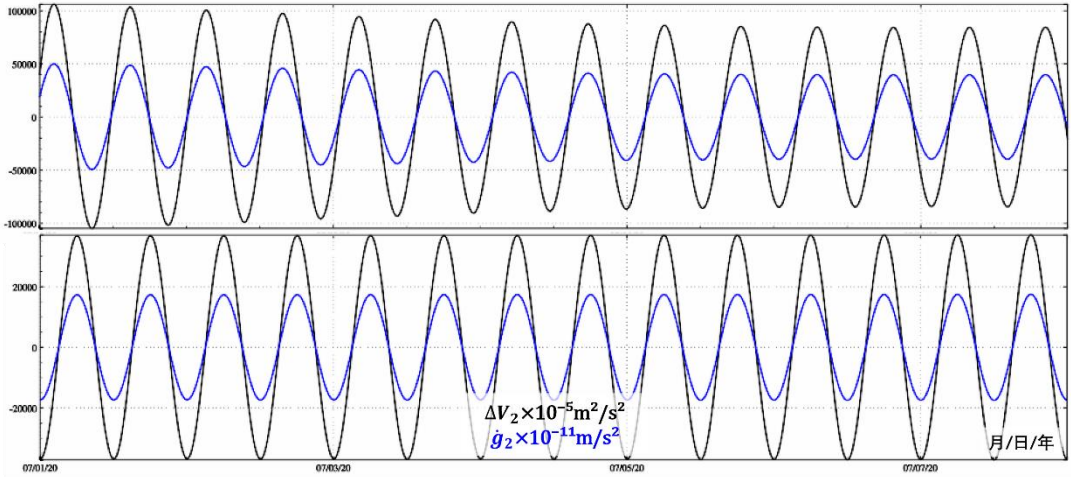


图 1.1 月球和太阳 2 阶地球引潮位（引潮力）2 年时间序列

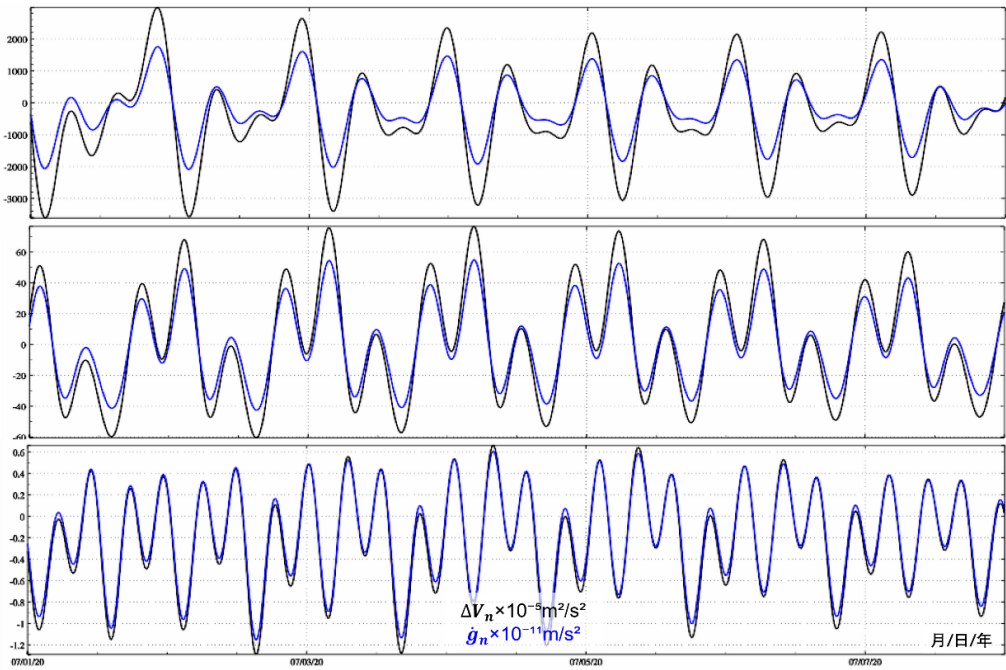


图 1.2 月球 3 阶、4 阶和 5 阶地球引潮位（引潮力）1 周时间序列

图 1.1 为月球和太阳的 2 阶地球引潮位 (引潮力) 时间序列, 图 1.2 为月球的 3、4、5 阶地球引潮位 (引潮力) 时间序列。时间跨度 2020 年 7 月 1 日 0 时至 2022 年 7 月 7 日 24 时 (7 天), 时间间隔 10 分钟。

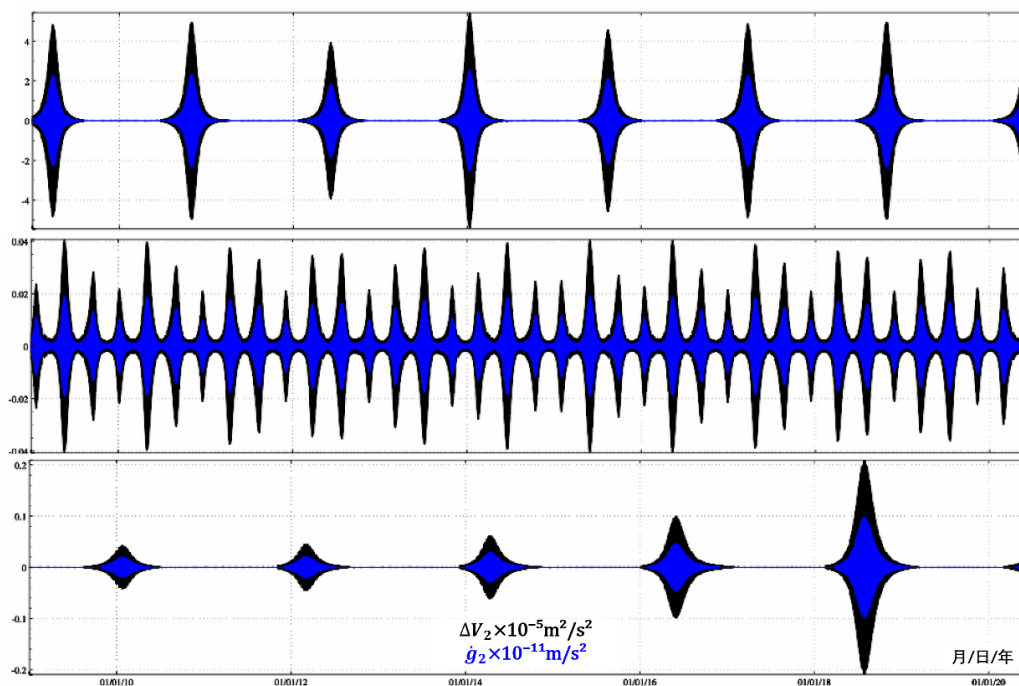


图 1.3 金星、木星和火星 2 阶地球引潮位 (引潮力) 12 年时间序列

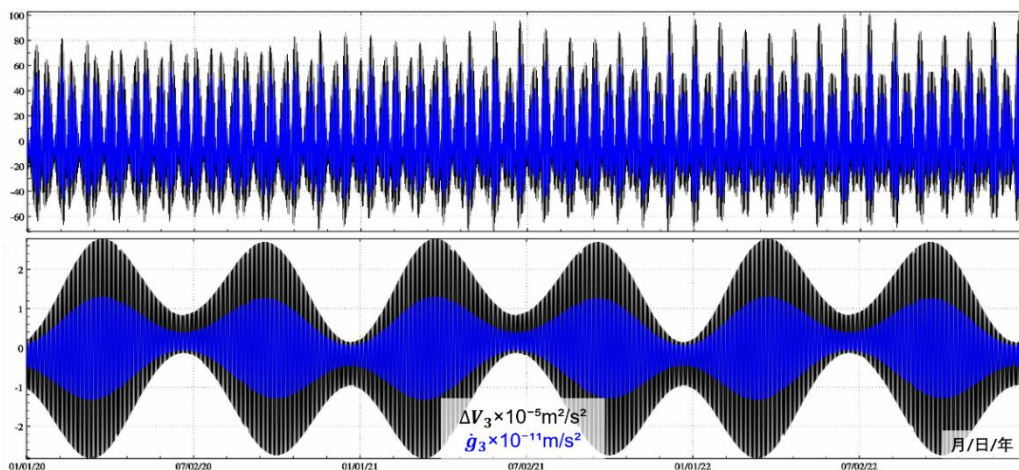


图 1.4 月球和太阳 3 阶地球引潮位 (引潮力) 2 年时间序列

图 1.3 为金星、木星和火星 2 阶地球引潮位 (引潮力) 时间序列, 时间跨度 2010 年 1 月 1 日至 2022 年 12 月 31 日 (12 年), 时间间隔 2 小时。图 1.4 为 2020 年 1 月 1 日

至 2022 年 12 月 31 日 (2 年) 月球和太阳 3 阶地球引潮位 (引潮力) 时间序列。

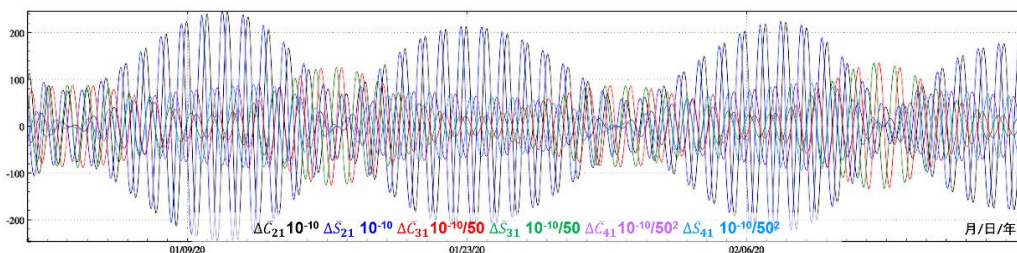


图 1.5 外部天体引潮位对田谐位系数的直接影响 (周日潮族) 时间序列

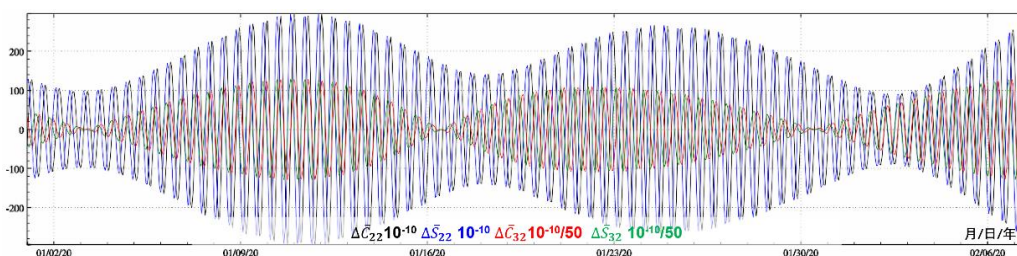


图 1.6 外部天体引潮位对扇谐位系数的直接影响 (半日潮族) 时间序列

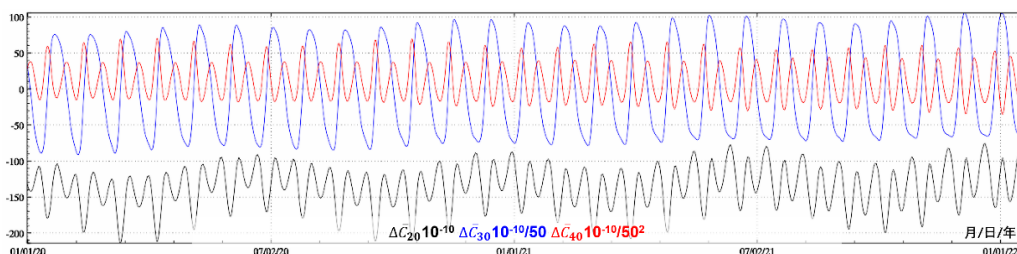


图 1.7 外部天体引潮位对带谐位系数的直接影响 (长周期潮族) 时间序列

图 1.5~图 1.7 为地球外部天体引潮位对地球重力位系数直接影响时间序列。图中显示, 田谐( $m = 1$ )位系数主要呈现周日变化; 扇谐位系数( $m = 2$ )主要呈现半日变化; 带谐( $m = 0$ )位系数, 主要呈现长周期变化。

### 8.1.2 自转微椭非弹性地球的体潮勒夫数

大地测量要素的 (观测量或参数) 固体潮效应, 等于引潮位对该大地测量要素的直接影响与间接影响之和, 可用体潮勒夫数的线性组合-潮汐因子  $\delta = \mathcal{L}(k, h, l)$  来表征。体潮勒夫数有三种, 即位勒夫数  $k$ 、径向 (位移) 勒夫数  $h$  与水平 (位移) 勒夫数  $l$ 。

#### 8.1.2.1 非球形自转地球体潮勒夫数取值

弹性地球的非球形椭率和地球自转, 使得勒夫数的表达变得复杂。引潮位引起固体地球形变,  $n$ 阶 $m$ 次引潮位激发的地面站点位移形变解为:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} = & \frac{W_{mn}}{g_0} \left[ \mathbf{e}_r (h^0 Y_{nm} + h^+ Y_{n+2,m} + h^- Y_{n-2,m}) + \mathbf{e}_\theta \right. \\
& \left. \left( l^0 \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} + \omega^+ \frac{m}{\sin \theta} Y_{n+1,m} + \omega^- \frac{m}{\sin \theta} Y_{n-1,m} + l^+ \frac{\partial Y_{n+2,m}}{\partial \theta} + l^- \frac{\partial Y_{n-2,m}}{\partial \theta} \right) + i \mathbf{e}_\lambda \right. \\
& \left. \left( l^0 \frac{m}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} + \omega^+ \frac{m}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{n+1,m}}{\partial \theta} + \omega^- \frac{m}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{n-1,m}}{\partial \theta} + l^+ \frac{m Y_{n+2,m}}{\sin \theta} + l^- \frac{m Y_{n-2,m}}{\sin \theta} \right) \right] \quad (1.17)
\end{aligned}$$

式中： $W_{mn} Y_{nm} = W_{mn}(a) Y_{nm}(\theta, \lambda)$ 为 $n$ 阶 $m$ 次引潮位， $g_0 = g_0(a)$ 为地面平均重力，显然 $W_{mn} Y_{nm}/g_0$ 是平衡潮高； $h^0, l^0$ 为位移勒夫数的球对称部分； $h^+, l^+, h^-, l^-$ 为相应勒夫数的球型耦合部分； $\omega^+, \omega^-$ 为相应勒夫数的环型耦合部分。

式(1.17)指出，对于球对称非旋转弹性地球，只需2个参数( $h$ 与 $l$ )就可表示潮汐位移场；但是对于自转、椭球地球，则需要8个参数。因为椭率和自转导致 $n$ 阶的球型位移场(2个参数)中耦合进了 $n+1$ 阶和 $n-1$ 阶的环型位移场(2个参数)以及 $n+2$ 阶和 $n-2$ 阶的球型位移场(4个参数)，形成位移勒夫数的纬度依赖部分。

引潮位引起地球表面和内部介质将发生形变，导致地球内部密度的重新分布，产生形变附加位。在 $(r, \theta, \lambda)$ 处的形变附加位可表示为

$$\Phi^a(r, \theta, \lambda) = W_{mn} \left[ k^0 \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} Y_{nm} + k^+ \left( \frac{a}{r} \right)^{n+3} Y_{n+2,m} + k^- \left( \frac{a}{r} \right)^{n-1} Y_{n-2,m} \right] \quad (1.18)$$

与位移形变解类似，式中 $k^0$ 代表位勒夫数的球对称部分， $k^+$ 和 $k^-$ 代表相应勒夫数的球型耦合部分。由于环型位移不涉及体膨胀，不会导致地球引力位的扰动，因此，位勒夫数 $k$ 中不会出现环形耦合项。

微椭弹性自转地球的勒夫数仍然是实数，与频率无关，取值如表1.2。

表 1.2 微椭弹性地球体潮勒夫数取值

$n$	$m$	潮汐周期	$k_{nm}$	$h_{nm}$	$l_{nm}$
2	0	长周期	0.29525	0.6078	0.0847
2	1	周日	0.29470	0.6078	0.0847
2	2	半日	0.29801	0.6078	0.0847
3	0	长周期	0.093	0.2920	0.0150
3	1	周日	0.093	0.2920	0.0150
3	2	半日	0.093	0.2920	0.0150
3	3	1/3日	0.094	0.2920	0.0150
4	0~4	长周期~1/4日	0.041	0.175	0.010
5			0.025	0.129	
6			0.017	0.197	

### 8.1.2.2 自转地球位移勒夫数的纬度依赖

地球椭率和地球自转破坏了潮汐响应的对称性，微椭地球自转离心力导致位移勒夫



数( $h_{nm}, l_{nm}$ )呈现纬度依赖性。二阶位移勒夫数的纬度依赖公式:

$$\begin{cases} h_{2m}(\varphi) = h_{2m} + h^\varphi \frac{3\sin^2\varphi - 1}{2} \\ l_{2m}(\varphi) = l_{2m} + l^\varphi \frac{3\sin^2\varphi - 1}{2} \end{cases} \quad (1.19)$$

式中:  $\varphi = \pi/2 - \theta$ 为地面站点的地心纬度; ( $h_{2m}, l_{2m}$ )为微椭非旋转弹性地球的位移勒夫数, 取值如表 1.2;  $\varphi$ 为地面测站的地心纬度; [ $h_{2m}(\varphi), l_{2m}(\varphi)$ ]为顾及站点处纬度依赖性的水平勒夫数; ( $h^\varphi, l^\varphi$ )为位移勒夫数纬度依赖系数, IERS 2010 协议中,  $h^\varphi = -0.0006, l^\varphi = 0.0002$ 。

三阶位移勒夫数的纬度依赖性很弱, 可不加改正。

### 8.1.2.3 非弹性地幔与勒夫数频率相关性

地幔的非弹性(粘滞性)导致固体地球对引潮位的形变响应产生延迟, 使得各潮族(半日 $m = 2$ 、周日 $m = 1$ 与长周期潮族 $m = 0$ )的体潮勒夫数(包括球对称部分和纬度依赖因子)变成复数, 存在相对微小的虚部, 其绝对值不足实部的 1%。另一方面, 地幔的粘滞性还在不同程度上放大了地球潮汐形变, 导致体潮勒夫数的频率相关性随分潮周期增加而增强, 使得体潮勒夫数的实部和虚部同时发生微小变化。长周期分潮( $m = 0$ , 也称带谐分潮, 分潮周期 8 天至 18.6 年)的频率较低, 时间跨度大, 地幔的粘滞性因此导致长周期带谐分潮的勒夫数出现较强的频率相关性。对于半日分潮( $m = 2$ ),  $h$ 增大 1.4%; 对于周日分潮( $m = 1$ ),  $h$ 增大 1.4%,  $k$ 增大 1.7%; 对于长周期分潮( $m = 0$ , 如 $M_f$ ), 地幔的粘滞性导致径向勒夫数 $h$ 增大 2.5%, 位勒夫数 $k$ 增大 3% (许厚泽, 2010)。

为表示粘滞性形变地球附加位引起的 $n$ 阶 $m$ 次位系数变化, 需要用 3 种形式的位勒夫数( $k_{nm}^{(0)}, k_{nm}^{(\pm)}$ )、径向勒夫数( $h_{nm}^{(0)}, h_{nm}^{(\pm)}$ )与水平勒夫数( $l_{nm}^{(0)}, l_{nm}^{(\pm)}$ )来表征 $n$ 阶 $m$ 次( $n \geq 2$ )引潮位的间接影响。考虑到地球质量守恒, 当 $n = 2$ 时,  $k_{2m}^{(-)} = 0, h_{2m}^{(-)} = 0, l_{2m}^{(-)} = 0$ , 只有 2 种位勒夫数( $k_{2m}^0, k_{2m}^+$ ), 2 种径向勒夫数( $h_{2m}^{(0)}, h_{2m}^{(+)}$ )和 2 种水平勒夫数( $l_{2m}^{(0)}, l_{2m}^{(+)}$ )。

地幔的粘滞性导致地球对引潮位的响应产生延迟, 使得勒夫数随频率变化, ( $k_{2m}^0, k_{2m}^+$ ), ( $h_{2m}^{(0)}, h_{2m}^{(+)}$ )和( $l_{2m}^{(0)}, l_{2m}^{(+)}$ )存在小的虚部。

三阶勒夫数的频率相关性很弱, 可忽略其潮汐形变滞后效应。

表 1.3 粘弹性地球体潮位勒夫数 $k$ 的频率相关

$nm$		潮汐周期	弹性地球		粘弹性地球		
$n$	$m$		$k_{nm}$	$k_{2m}^{(+)}$	$Re(k_{nm})$	$Im(k_{nm})$	$k_{2m}^{(+)}$
2	0	长周期	0.29525	-0.00087	0.30190	-0.00000	-0.00089
2	1	周日	0.29470	-0.00079	0.29830	-0.00144	-0.00080

2	2	半日	0.29801	-0.00057	0.30102	-0.00130	-0.00057
3	0	长周期	0.093	...			
3	1	周日	0.093	...			
3	2	半日	0.093	...			
3	3	1/3 日	0.094	...			

为计算方便，以下将表 1.3 中粘弹性地球二阶长周期( $m = 0$ )、周日( $m = 1$ )和半日( $m = 2$ ) (潮族) 位勒夫数，记为 $k_{2m} = Re(k_{2m}) + i Im(k_{2m})$ ，作为标称位勒夫数；而将表 1.2 中的微椭弹性地球位移勒夫数 $h_{2m} = 0.6078$ ,  $l_{2m} = 0.0847$ ，作为标称位移勒夫数。

### 8.1.3 二阶体潮勒夫数的频率相关性校正

在地球自转和全球地球动力学研究中，常常将地球看成是一个旋转椭球液体，由一个旋转的椭球体的弹性地幔和包含在地幔之中的一个椭球体的液态地核（包含一个固体内核）构成。由于核幔界面（CMB）的微小椭率，液核和地幔的瞬时转动轴的不相重合，在 CMB 上产生内部压力和压力矩，从而导致地球除钱德勒摆动（CW）之外的又一个旋转本征模（逆向）的出现，因为该本征模的本征周期接近于 1 天，通常称之为近周日自由摆动（NDFW），在惯性空间中表现为自由核章动（FCN）。

由于地幔稍带黏滞性，核幔之间除惯性耦合之外，还存在黏性耦合和电磁耦合，以及海洋和大气与地球固体部分的潮汐摩擦等耗散机制的作用，需以复数形式描述 NDFW 本征频率、与之对应的 FCN 本征周期以及接近与本征频率的体潮勒夫数。周日潮族 ( $m = 1$ )，特别是周日分潮的频率接近于 NDFW 本征频率的体潮勒夫数，由于近周日共振效应表现为明显的频率相关特征。

#### 8.1.3.1 地球近周日摆动与勒夫数共振参数

地球的近周日自由摆动的激发，导致与本征频率接近的周日固体潮（如 $P_1$ 、 $K_1$ 、 $\psi_1$ 和 $\phi_1$ 分潮）及相应的受迫章动观测中出现明显的共振放大现象。Mathews 等采用“修正的”初始参考地球模型 M-PREM，将描述地球周日潮汐形变的勒夫数表示为自由的共振形式。Wahr 在 1981 年推导了周日体潮勒夫数的自由章动共振表达式，给出基于 1066A 地球模型的数值结果。摆动引起的离心力对周日分潮勒夫数具有重要贡献，其贡献与地球及其核的摆动响应成正比。周日分潮的任意体潮或负荷勒夫数 $L$ （如 $k_{21}^0$ 或 $k_{2m}^+$ ）的频率相关值，可以用共振公式表示为潮汐频率 $\sigma$ 的函数：

$$L(\sigma) = L_0 + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{L_{\alpha}}{\sigma - \sigma_{\alpha}} \quad (1.20)$$

式中： $L$ 表示任意的周日体潮或负荷勒夫数，其与频率无关的部分 $L_0$ ；下标 $\alpha$ 表示地球或其核的自由摆动，取值 1、2、3 分别对应钱德勒摆动（CW）、逆向和正向近周日自由摆动 3 个简正模， $\sigma_{\alpha}$ 、 $L_{\alpha}$ 分别为 $\alpha$ 的本征谐振频率和响应系数（导纳）。

潮汐频率 $\sigma$ 与本征谐振频率 $\sigma_{\alpha}$ 通常用每恒星日的周期数（cpsd）表示，正负频率代表

逆向（正向）谐振波。通常也用度每小时表示潮汐频率 $\omega$ （角速率），有：

$$\omega = 15\kappa\sigma, \quad \kappa = 1.002737909 \quad (1.21)$$

式中 $\kappa = 1.002737909$ 为恒星日与平太阳日的比值，是天文常数。Mathews 等 (2002) 通过分析甚长基线干涉测量 (VLBI) 数据，获得了进动速率和章动幅度，进而按章动理论拟合估计得到本征谐振频率 $\omega_\alpha$ 。

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -0.0026010 - 0.0001361i \\ \sigma_2 &= 1.0023181 + 0.000025i \\ \sigma_3 &= 0.9999026 + 0.000780i \end{aligned} \quad (1.22)$$

表 1.4 为由周日（潮族）共振公式 (1.20) 计算周日位勒夫数( $k_{21}^{(0)}, k_{21}^{(+)}$ )的共振参数。

表 1.4 体潮周日位勒夫数( $k_{21}^{(0)}, k_{21}^{(+)}$ )共振参数

$\alpha$	$k_{21}^{(0)}$		$k_{21}^{(+)}$	
	Re( $L_\alpha$ )	Im( $L_\alpha$ )	Re( $L_\alpha$ )	Im( $L_\alpha$ )
0	0.29954	$-0.1412 \times 10^{-2}$	$-0.804 \times 10^{-3}$	$0.237 \times 10^{-5}$
1	$-0.77896 \times 10^{-3}$	$-0.3711 \times 10^{-4}$	$0.209 \times 10^{-5}$	$0.103 \times 10^{-6}$
2	$0.90963 \times 10^{-4}$	$-0.2963 \times 10^{-5}$	$-0.182 \times 10^{-6}$	$0.650 \times 10^{-8}$
3	$-0.11416 \times 10^{-5}$	$0.5325 \times 10^{-7}$	$-0.713 \times 10^{-9}$	$-0.330 \times 10^{-9}$

表 1.5 给出了负荷勒夫数( $k'_{21}, h'_{21}, l'_{21}$ )的共振参数。这些共振参数与海洋潮汐负荷引起的固体地球形变及其附加位变化有关。表中忽略了很小的虚部。

表 1.5 周日负荷勒夫数( $k'_{21}, h'_{21}, l'_{21}$ )共振参数

$\alpha$	$k'_{21}$	$h'_{21}$	$l'_{21}$
0	-0.30808	-0.99500	0.02315
1	$8.1874 \times 10^{-4}$	$1.6583 \times 10^{-3}$	$2.3232 \times 10^{-4}$
2	$1.4116 \times 10^{-4}$	$2.8018 \times 10^{-4}$	$-8.4659 \times 10^{-6}$
3	$3.4618 \times 10^{-7}$	$5.5852 \times 10^{-7}$	$1.0724 \times 10^{-8}$

水平位移勒夫数的共振效应需要顾及勒夫数的纬度依赖和海潮负荷激发的共振效应。联合 (1.19) 和 (1.20) 式，可计算位移勒夫数及其纬度依赖系数的共振参数，如表 1.6。

表 1.6 体潮位移勒夫数及其纬度依赖系数的共振参数

$\alpha$	$h_{2m}$		$h^\varphi$	
	Re( $L_\alpha$ )	Im( $L_\alpha$ )	Re( $L_\alpha$ )	Im( $L_\alpha$ )
0	0.60671	$-0.2420 \times 10^{-2}$	$-0.615 \times 10^{-3}$	$-0.122 \times 10^{-4}$
1	$-0.15777 \times 10^{-2}$	$-0.7630 \times 10^{-4}$	$0.160 \times 10^{-5}$	$0.116 \times 10^{-6}$
2	$0.18053 \times 10^{-3}$	$-0.6292 \times 10^{-5}$	$0.201 \times 10^{-6}$	$0.279 \times 10^{-8}$

3	$-0.18616 \times 10^{-5}$	$0.1379 \times 10^{-6}$	$-0.329 \times 10^{-7}$	$-0.217 \times 10^{-8}$
$\alpha$	$l_{2m}$		$l^\varphi$	
	$\text{Re}(L_\alpha)$	$\text{Im}(L_\alpha)$	$\text{Re}(L_\alpha)$	$\text{Im}(L_\alpha)$
0	$0.84963 \times 10^{-1}$	$-0.7395 \times 10^{-3}$	$0.19334 \times 10^{-3}$	$-0.3819 \times 10^{-5}$
1	$-0.22107 \times 10^{-3}$	$-0.9646 \times 10^{-5}$	$-0.50331 \times 10^{-6}$	$-0.1639 \times 10^{-7}$
2	$-0.54710 \times 10^{-5}$	$-0.2990 \times 10^{-6}$	$-0.66460 \times 10^{-8}$	$0.5076 \times 10^{-9}$
3	$-0.29904 \times 10^{-7}$	$-0.7717 \times 10^{-8}$	$0.10372 \times 10^{-7}$	$0.7511 \times 10^{-9}$

### 8.1.3.2 周日勒夫数海潮负荷贡献与频率相关性校正

负荷形变理论通常基于弹性地球形变动力学，在计算海潮负荷效应时，二阶负荷勒夫数一般采用常数值， $k'_2 = -0.3075, h'_2 = -1.001, l'_2 = 0.0295$ （参考 5.2 节）。周日共振导致负荷勒夫数也呈现频率相关性，并通过海潮负荷形变离心力引起的地极形变，以及地幔粘滞性、核幔耦合等潮汐摩擦耗散机制作用，导致周日分潮 ( $mn = 21$ ) 的体潮勒夫数呈现频率相关性，使得体潮勒夫数的实部和虚部都有可能发生微小变化。

考虑周日共振效应后，周日分潮负荷勒夫数需由  $(k'_2, h'_2, l'_2)$  变为  $(k'_{21}, h'_{21}, l'_{21})$ 。频率为  $\sigma$  的海潮周日分潮对相同频率周日体潮勒夫数的主要贡献 (Wahr 和 Sasao, 1981)，也称周日勒夫数海潮负荷贡献，可表达为：

$$\delta k_{21}^{ol}(\sigma) = [k'_{21}(\sigma) - k'_2] \frac{4\pi G \rho_w}{5g_0} RA_{21}(\sigma) \quad (1.23)$$

式中  $k = k, h$  或  $l$ ;  $g_0$  为地面平均重力;  $k'_{21}(\sigma)$  为顾及周日共振效应的负荷勒夫数，简称周日共振负荷数，是分潮频率  $\sigma$  的函数，由表 1.6 按 (1.20) 式计算;  $k'_2 = k'_2, h'_2$  或  $l'_2$ ，为球对称非旋转弹性地球 (PREM) 的二阶负荷勒夫数 (实数);  $A_{21}(\sigma)$  为分潮  $\sigma$  的体潮勒夫数修正量与负荷勒夫数修正量的比例因子 (导纳)，可通过对全球海潮调和常数模型进行调和与分析后按下式计算：

$$A_{21}(\sigma) = H_{21}^{otide}(\sigma) / H_{21}^{TGP}(\sigma) \quad (1.24)$$

式中:  $H_{21}^{TGP}(\sigma)$  是天体引潮位 (生成位) 周日分潮  $\sigma$  的天文振幅 (m);  $H_{21}^{otide}(\sigma)$  是经规格化调和与分析后 (参见 8.3.2 节)，海潮 (潮高) 周日分潮  $\sigma$  的规格化调和幅值 (m)。

周日体潮频率相关性校正值计算公式为：

$$\delta k_{21}(\sigma) = k_{21}^{(0)}(\sigma) + \delta k_{21}^{ol}(\sigma) - k_{21} \quad (1.25)$$

式中:  $k = k, h$  或  $l$ ;  $k_{21}^{(0)}(\sigma)$  为顾及地幔粘滞性及分潮  $\sigma$  近周日共振的体潮勒夫数 (复数)，是分潮  $\sigma$  的函数，由表 1.5 或表 1.6 中的共振参数，按 (1.20) 式计算;  $k_{21}$  为标称周日勒夫数，标称勒夫数取值参见表 1.3 或表 1.2。

这里简要介绍周日体潮频率相关性校正值计算方案。取标称负荷勒夫数  $k'_2 = -0.3075, h'_2 = -1.001, l'_2 = 0.0295$ ; 标称周日位勒夫数  $k_{21} = 0.29830 - 0.00144i$  (取自

表 1.3), 与标称周日位移勒夫数 $h_{21} = 0.6078, l_{21} = 0.0847$  (取自表 1.2)。

第一步, 由式 (1.22)、表 1.4、表 1.5 和表 1.6, 按式 (1.20), 计算顾及周日共振效应的共振体潮勒夫数 $k_{21}^0(\sigma)$ 和共振负荷勒夫数 $k'_{21}(\sigma)$ ; 第二步, 将周日共振负荷勒夫数 $k'_{21}(\sigma)$ 代入 (1.23) 式, 计算周日体潮勒夫数海潮负荷贡献 $\delta k_{21}^{ol}(\sigma)$ ; 第三步, 将周日共振体潮勒夫数 $k_{21}^0(\sigma)$ 与海潮负荷贡献 $\delta k_{21}^{ol}(\sigma)$ 代入 (1.25) 式, 计算周日位移勒夫数频率相关性校正值 $\delta k_{21}(\sigma)$ , 结果如表 1.7, 以及周日位移勒夫数频率相关性校正值 $\delta h_{21}(\sigma), \delta l_{21}(\sigma)$ , 结果如表 1.8 和表 1.9。

表 1.7 二阶周日位移勒夫数 $k_{2m}^{(0)}$ 频率相关性校正值

周日潮	Doodson	角速率 $\omega^\circ/\text{hr}$	$\delta k_{21}^R \times 10^{-5}$	$\delta k_{21}^I \times 10^{-5}$	引潮位分潮天文振幅 $H_{21}^{TGP} \times 10^{-5}\text{m}$
$2Q_1$	125,755	12.85429	-29	3	-664
$\sigma_1$	127,555	12.92714	-30	3	-802
	135,645	13.39645	-45	5	-947
$Q_1$	135,655	13.39866	-46	5	-5020
$\rho_1$	137,455	13.47151	-49	5	-954
	145,545	13.94083	-82	7	-4946
$O_1$	145,555	13.94303	-83	7	-26221
$\tau_1$	147,555	14.02517	-91	9	343
$N\tau_1$	153,655	14.41456	-168	14	194
	155,445	14.48520	-193	16	137
$Lk_1$	155,455	14.48741	-194	16	741
$No_1$	155,655	14.49669	-197	16	2062
	155,665	14.49890	-198	16	414
$\chi_1$	157,455	14.56955	-231	18	394
	157,465	14.57176	-233	18	87
$\pi_1$	162,556	14.91787	-834	58	-714
	163,545	14.95673	-1117	76	137
$P_1$	163,555	14.95893	-1138	77	-12203
	164,554	15.00000	-1764	104	103
$S_1$	164,556	15.00000	-1764	104	289
	165,345	15.02958	-3048	92	7
	165,535	15.03665	-3630	195	4

	165,545	15.03886	-3845	229	-730
$K_1$	165,555	15.04107	-4084	262	36878
	165,565	15.04328	-4355	297	5001
	165,575	15.04548	-4665	334	-108
	166,455	15.07749	85693	21013	-0.6
	166,544	15.07993	35203	2084	1.1
$\psi_1$	166,554	15.08214	22794	358	293
	166,556	15.08214	22780	358	-4.5
	166,564	15.08434	16842	-85	5
	167,355	15.11392	3755	-189	18
	167,365	15.11613	3552	-182	5
$\phi_1$	167,555	15.12321	3025	-160	525
	167,565	15.12542	2892	-154	-20
	168,554	15.16427	1638	-93	31
$\theta_1$	173,655	15.51259	370	-20	395
	173,665	15.51480	369	-20	78
	175,445	15.58323	325	-17	-61
$J_1$	175,455	15.58545	324	-17	2062
	175,465	15.58765	323	-16	409
$S_{o_1}$	183,555	16.05697	194	-8	342
	185,355	16.12989	185	-7	169
$O_{o_1}$	185,555	16.13911	184	-7	1129
	185,565	16.14131	184	-7	723
	185,575	16.14352	184	-7	151
$v_1$	195,455	16.68348	141	-4	216
	195,465	16.68569	141	-4	138
半日潮	Doodson	角速率 $\omega^\circ/\text{hr}$	$\delta k_{22}^R \times 10^{-5}$	$\delta k_{22}^I \times 10^{-5}$	$H_{22}^{TGP} \times 10^{-5}\text{m}$
$N_2$	245,655	28.43973	2	0	12099
$M_2$	255,555	28.98410	2	0	63192

表 1.8 二阶周日径向勒夫数 $h_{2m}^{(0)}$ 频率相关性校正与纬度依赖性

周日潮	Doodson	角速率 $\omega^\circ/\text{hr}$	$\delta h_{21}^R \times 10^{-4}$	$\delta h_{21}^I \times 10^{-4}$	引潮位分潮天文振
-----	---------	------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------

					幅 $H_{21}^{TGP} \times 10^{-5} \text{m}$
$2Q_1$	125,755	12.85429	-39	-27	-664
$\sigma_1$	127,555	12.92714	-39	-26	-802
	135,645	13.39648	-42	-26	-947
$Q_1$	135,655	13.39866	-42	-26	-5020
$\rho_1$	137,455	13.47151	-43	-26	-954
	145,545	13.94082	-50	-25	-4946
$O_1$	145,555	13.94303	-50	-25	-26221
$\tau_1$	147,555	14.02517	-52	-25	343
$N\tau_1$	153,655	14.41456	-67	-24	194
$No_1$	155,655	14.49669	-73	-23	2062
$\chi_1$	157,455	14.56955	-80	-23	394
$\pi_1$	162,556	14.91787	-200	-15	-714
$P_1$	163,555	14.95893	-261	-11	-12203
$S_1$	164,556	15.00000	-386	-4	289
	165,545	15.03881	-795	23	-730
$K_1$	165,555	15.04107	-842	30	36878
	165,565	15.04333	-896	36	5001
	165,575	15.04543	-958	43	-108
$\psi_1$	166,554	15.08214	4491	36	293
	166,564	15.08439	3309	-50	5
$\phi_1$	167,555	15.12321	567	-59	525
$\theta_1$	173,655	15.51259	39	-30	395
$J_1$	175,455	15.58545	30	-30	2062
$Oo_1$	185,555	16.13911	2	-28	1129
半日潮	Doodson	角速率 $\omega^\circ/\text{hr}$	$\delta h_{22}^R \times 10^{-4}$	$\delta h_{22}^I \times 10^{-4}$	$H_{22} \times 10^{-5} \text{m}$
$M_2$	255,555	28.98410	0	-22	12099

表 1.9 二阶周日水平勒夫数 $l_{2m}^{(0)}$ 频率相关性校正与纬度依赖性

周日潮	Doodson	角速率 $\omega^\circ/\text{hr}$	$\delta l_{21}^R \times 10^{-4}$	$\delta l_{21}^I \times 10^{-4}$	引潮位分潮天文 振幅 $H_{21}^{TGP} \times 10^{-5} \text{m}$
$Q_1$	135,655	13.39866	-1	-6	-5020

	145,545	13.94082	-1	-6	-4946
$O_1$	145,555	13.94303	-1	-6	-26221
$No_1$	155,655	14.49669	0	-6	2062
$P_1$	163,555	14.95893	6	-6	-12203
	165,545	15.03886	22	-6	-730
$K_1$	165,555	15.04107	23	-6	36878
	165,565	15.04328	25	-6	5001
$\psi_1$	166,554	15.08214	-137	-20	293
$\phi_1$	167,555	15.12321	-19	-7	525
$J_1$	175,455	15.58545	-2	-6	395
$Oo_1$	185,555	16.13911	-1	-6	1129
半日潮	Doodson	角速率 $\omega^\circ/\text{hr}$	$\delta l_{22}^R \times 10^{-4}$	$\delta l \times 10^{-4}$	$H_{22}^{TGP} \times 10^{-5} \text{m}$
$M_2$	255,555	28.98410	0	-7	12099

### 8.1.3.3 非弹性地球长周期勒夫数频率相关性校正

地幔的粘滞性, 进一步增强了长周期分潮 ( $mn = 20$ , 带谐) 体潮勒夫数频率相关性。设长周期分潮频率为 $\sigma$ , 顾及频率相关性的长周期勒夫数可表达为:

$$k_{20}(\sigma) = 0.29525 - 5.796 \times 10^4 \left\{ \text{ctg} \frac{\epsilon\pi}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma} \right)^\epsilon \right] + i \left( \frac{\sigma_m}{\sigma} \right)^\epsilon \right\} \quad (1.26)$$

$$h_{20}(\sigma) = 0.5998 - 9.96 \times 10^4 \left\{ \text{ctg} \frac{\epsilon\pi}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma} \right)^\epsilon \right] + i \left( \frac{\sigma_m}{\sigma} \right)^\epsilon \right\} \quad (1.27)$$

$$l_{20}(\sigma) = 0.0831 - 3.01 \times 10^4 \left\{ \text{ctg} \frac{\epsilon\pi}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma} \right)^\epsilon \right] + i \left( \frac{\sigma_m}{\sigma} \right)^\epsilon \right\} \quad (1.28)$$

式 (1.26) ~ (1.28) 中,  $\sigma_m$  是周期为 200s 的参考频率;  $\epsilon = 0.15$ 。

取  $k_{20} = 0.30190, h_{20} = 0.6078, l_{20} = 0.0847$ , 则非弹性地球二阶长周期勒夫数频率相关性校正公式为:

$$\delta k_{20}(\sigma) = k_{20}(\sigma) - k_{20}, \quad (k = k, h, l) \quad (1.29)$$

将 (1.26) ~ (1.28) 式分别代入 (1.29) 式, 计算非弹性地球二阶长周期勒夫数频率相关性校正值, 结果如表 1.10~表 1.12。

表 1.10 二阶长周期位勒夫数 $k_{20}^{(0)}$ 频率相关性校正

长周期潮	Doodson	角速率 $\omega^\circ/\text{hr}$	$\delta k_{20}^R \times 10^{-5}$	$\delta k_{20}^I \times 10^{-5}$	引潮位分潮天文振幅 $H_{20}^{TGP} \times 10^{-5} \text{m}$
$\Omega_1$	55,565	0.00221	1347	-541	2793



$\Omega_2$	55,575	0.00441	1124	-488	-27
$S_a$	56,554	0.04107	547	-349	-492
$S_{sa}$	57,555	0.08214	403	-315	-3100
	57,565	0.08434	398	-313	77
$S_{ta}$	58,554	0.12320	326	-296	-181
$M_{sm}$	63,655	0.47152	101	-242	-673
	65,445	0.54217	80	-237	231
$M_m$	65,455	0.54438	80	-237	-3518
	65,465	0.54658	79	-237	229
	65,655	0.55366	77	-236	188
$M_{sf}$	73,555	1.01590	-9	-216	-583
	75,355	1.08875	-18	-213	-288
$M_f$	75,555	1.09804	-19	-213	-6663
	75,565	1.10024	-19	-213	-2762
	75,575	1.10245	-19	-213	-258
$M_{stm}$	83,655	1.56956	-65	-202	-242
$M_{tm}$	85,455	1.64241	-71	-201	-1276
	85,465	1.64462	-71	-201	-529
$M_{sqm}$	93,555	2.11394	-102	-193	-204
$M_{qm}$	95,355	2.18679	-106	-192	-169

表 1.11 二阶长周期径向勒夫数 $h_{20}^{(0)}$ 频率相关性校正与纬度依赖性

长周期潮	Doodson	角速率 $\omega^\circ/\text{hr}$	$\delta h_{20}^R \times 10^{-4}$	$\delta h_{20}^I \times 10^{-4}$	引潮位分潮天文振幅 $H_{20}^{TGP} \times 10^{-5}\text{m}$
$\Omega_1$	55,565	0.00221	266	-93	2793
$S_{sa}$	57,555	0.08214	104	-54	-3100
$M_m$	65,455	0.54438	48	-41	-3518
$M_f$	75,555	1.09804	31	-37	-6663
	75,565	1.10024	31	-37	-2762

表 1.12 二阶长周期水平勒夫数 $l_{2m}^{(0)}$ 频率相关性校正与纬度依赖性

长周期潮	Doodson	角速率 $\omega^\circ/\text{hr}$	$\delta l_{20}^R \times 10^{-4}$	$\delta l_{20}^I \times 10^{-4}$	引潮位分潮振幅
------	---------	------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	---------

					$H_{20}^{TGP} \times 10^{-6} \text{m}$
$\Omega_1$	55,565	0.00221	89	-28	2793
$S_{sa}$	57,555	0.08214	39	-16	-3100
$M_m$	65,455	0.54438	23	-12	-3518
$M_f$	75,555	1.09804	17	-11	-6663
	75,565	1.10024	17	-11	-2762

#### 8.1.3.4 位系数变化的勒夫数频率相关性校正

对二阶位勒夫数按每个频率 $\sigma$ 进行相关性校正 $\delta k_{2m}$ ，都会引起位系数变化。若勒夫数的某分潮 $\sigma$ 频率相关性校正值为 $\delta k_{2m}(\sigma)$ ，该分潮 $\sigma$ 对2阶 $m$ 次位系数的贡献为 $(\Delta \bar{C}_{2m}^\delta - i\Delta \bar{S}_{2m}^\delta)$ ，则两者乘积 $\delta k_{2m}(\sigma)\Delta \bar{C}_{2m}^\sigma$ 就是勒夫数按该分潮 $\sigma$ 进行频率相关性校正后，引起2阶 $m$ 次位系数的变化。对所有分潮 $\sigma$ 求和，其结果就是位勒夫数频率相关性校正对2阶 $m$ 次位系数的贡献，即 $\Delta \bar{C}_{2m}^\delta = \sum_{\sigma} \delta k_{2m}(\sigma)\Delta \bar{C}_{2m}^\sigma$ 。

将2阶 $m$ 次潮族的位勒夫数频率相关性校正写为 $\delta k_{2m} = \delta k_{2m}^R + i\delta k_{2m}^I$ ，可得2阶周日、半日位勒夫数频率相关性校正，引起的二阶田谐、扇谐位系数变化：

$$\Delta \bar{C}_{2m}^\delta - i\Delta \bar{S}_{2m}^\delta = \sum_{\sigma} \delta k_{2m}(\sigma)(\Delta \bar{C}_{2m}^\sigma - i\Delta \bar{S}_{2m}^\sigma) = \eta_m \left( \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} A_m \delta k_{2m}^\tau H_{2m}^\tau e^{i\phi^\tau} \right) = \eta_m A_m \sum_{\tau=1}^{\tau_{2m}} H_{2m}^\tau [(\delta k_{2m}^{\tau R} \cos \phi^\tau - \delta k_{2m}^{\tau I} \sin \phi^\tau) + i(\delta k_{2m}^{\tau R} \sin \phi^\tau + \delta k_{2m}^{\tau I} \cos \phi^\tau)] \quad (1.30)$$

$$\Delta \bar{C}_{21}^\delta - i\Delta \bar{S}_{21}^\delta =$$

$$A_1 \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} H_{21}^\tau [(\delta k_{21}^{\tau R} \sin \phi^\tau + \delta k_{21}^{\tau I} \cos \phi^\tau) - i(\delta k_{21}^{\tau R} \cos \phi^\tau - \delta k_{21}^{\tau I} \sin \phi^\tau)] \quad (1.31)$$

$$\Delta \bar{C}_{22}^\delta - i\Delta \bar{S}_{22}^\delta =$$

$$A_2 \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} H_{22}^\tau [(\delta k_{22}^{\tau R} \cos \phi^\tau - \delta k_{22}^{\tau I} \sin \phi^\tau) + i(\delta k_{22}^{\tau R} \sin \phi^\tau + \delta k_{22}^{\tau I} \cos \phi^\tau)] \quad (1.32)$$

类似地，2阶长周期位勒夫数频率相关性校正，引起的二阶带谐位系数变化：

$$\Delta \bar{C}_{20}^\delta = \text{Re} \left[ \sum_{\sigma} \delta k_{20}(\sigma)\Delta \bar{C}_{20}^\sigma \right] = \text{Re} \left( \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} \delta k_{20}^\tau A_0 H_{20}^\tau e^{i\phi^\tau} \right) = A_0 \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} H_{20}^\tau (\delta k_{20}^{\tau R} \cos \phi^\tau - \delta k_{20}^{\tau I} \sin \phi^\tau) \quad (1.33)$$

式 (1.30) ~ (1.33) 中， $\eta_1 = -i, \eta_2 = 1$ ；

$$A_0 = \frac{1}{R\sqrt{4\pi}} = 4.4228 \times 10^{-8} \text{m}^{-1}$$

$$A_m = \frac{(-1)^m}{R\sqrt{8\pi}} = (-1)^m (3.1274 \times 10^{-8}) \text{m}^{-1} \quad m = 1, 2$$

$\tau_{2m}(m = 0, 1, 2)$ 为二阶 $m$ 族潮汐的有效分潮个数（如表 1.7 中， $\tau_{20} = 21, \tau_{21} = 48, \tau_{22} = 2$ ）； $H_{2m}^\tau$ 为与固体潮频率相同的天体引潮位分潮天文振幅（m），即表 1.7 中最后一列； $\phi^\tau$ 为分潮 $\tau$ 的天文幅角（单位为弧度），可由 Doodson 数或 Delaunay 变量计算。

#### 8.1.3.5 位移勒夫数频率相关性校正等效处理

与地球固连的地面站点，当其大地测量要素的固体潮效应包含位移勒夫数表征的潮汐形变贡献时，需要考虑位移勒夫数频率相关性校正。位移勒夫数表征引潮位引起的地

面站点位移, 其对大地测量要素的作用总是以比例因子 (比例系数) 形式出现。由 (1.1.2) 不难发现, 在地面站点径向与水平位移、地面重力和地倾斜的固体潮效应表达式中, 同阶次位勒夫数与位系数直接影响总是以乘积形式出现。

由固体地球动力学理论可知, 地面站点位移固体潮效应是调和的, 可表示成球谐级数形式。同阶次潮族的位移勒夫数频率相关性校正与位系数直接影响的乘积, 就是该阶次位勒夫数频率相关性校正对同阶次位移球谐系数的贡献。可见, 由二阶位勒夫数频率相关性校正, 导致的 2 阶位移球谐系数变化可表达为:

$$\Delta\hat{C}_{2m}^{\sigma} - i\Delta\hat{S}_{2m}^{\sigma} = \sum_{\sigma} \delta h_{2m}(\sigma)(\Delta\bar{C}_{2m} - i\Delta\bar{S}_{2m}) \quad (1.34)$$

$$\Delta\tilde{C}_{2m}^{\sigma} - i\Delta\tilde{S}_{2m}^{\sigma} = \sum_{\sigma} \delta l_{2m}(\sigma)(\Delta\bar{C}_{2m} - i\Delta\bar{S}_{2m}) \quad (1.35)$$

对比位系数变化的位勒夫数频率相关性校正算法公式, 可得 2 阶周日、半日径向勒夫数频率相关性校正, 引起的 2 阶田谐、扇谐径向位移球谐系数变化 ( $m = 1, 2$ ) 为:

$$\Delta\hat{C}_{2m}^{\sigma} - i\Delta\hat{S}_{2m}^{\sigma} = \sum_{\sigma} \delta h_{2m}(\sigma)(\Delta\bar{C}_{2m} - i\Delta\bar{S}_{2m}) = \eta_m \left( \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} A_m \delta h_{2m}^{\tau} H_{2m}^{\tau} e^{i\phi^{\tau}} \right) = \eta_m A_m \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} H_{2m}^{\tau} [(\delta h_{2m}^{\tau R} \cos\phi^{\tau} - \delta h_{2m}^{\tau I} \sin\phi^{\tau}) + i(\delta h_{2m}^{\tau R} \sin\phi^{\tau} + \delta h_{2m}^{\tau I} \cos\phi^{\tau})] \quad (1.36)$$

2 阶长周期径向勒夫数频率相关性校正, 引起的二阶带谐径向位移球谐系数变化为:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{C}_{20}^{\sigma} &= \text{Re} \left[ \sum_{\sigma} \delta h_{20}(\sigma) \Delta\bar{C}_{20} \right] = \text{Re} \left( \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} \delta h_{20}^{\tau} A_0 H_{20}^{\tau} e^{i\phi^{\tau}} \right) \\ &= A_0 \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} H_{20}^{\tau} (\delta h_{20}^{\tau R} \cos\phi^{\tau} - \delta h_{20}^{\tau I} \sin\phi^{\tau}) \end{aligned} \quad (1.37)$$

类似地, 可得 2 阶周日、半日水平勒夫数频率相关性校正, 引起的 2 阶田谐、扇谐水平位移球谐系数变化 ( $m = 1, 2$ ) 为:

$$\Delta\tilde{C}_{2m}^{\sigma} - i\Delta\tilde{S}_{2m}^{\sigma} = \sum_{\sigma} \delta l_{2m}(\sigma)(\Delta\bar{C}_{2m} - i\Delta\bar{S}_{2m}) = \eta_m \left( \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} A_m \delta l_{2m}^{\tau} H_{2m}^{\tau} e^{i\phi^{\tau}} \right) = \eta_m A_m \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} H_{2m}^{\tau} [(\delta l_{2m}^{\tau R} \cos\phi^{\tau} - \delta l_{2m}^{\tau I} \sin\phi^{\tau}) + i(\delta l_{2m}^{\tau R} \sin\phi^{\tau} + \delta l_{2m}^{\tau I} \cos\phi^{\tau})] \quad (1.38)$$

2 阶长周期水平勒夫数频率相关性校正, 引起的二阶带谐水平位移球谐系数变化为:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{C}_{20}^{\sigma} &= \text{Re} \left[ \sum_{\sigma} \delta k_{20}(\sigma) \Delta\bar{C}_{20} \right] = \text{Re} \left( \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} \delta k_{20}^{\tau} A_0 H_{20}^{\tau} e^{i\phi^{\tau}} \right) \\ &= A_0 \sum_{\tau=1}^{\tau_{20}} H_{20}^{\tau} (\delta k_{20}^{\tau R} \cos\phi^{\tau} - \delta k_{20}^{\tau I} \sin\phi^{\tau}) \end{aligned} \quad (1.39)$$

本节将位勒夫数频率相关性校正公式表达成位移量的球谐系数变化, 与位系数变化的勒夫数频率相关性校正公式在形式上相同。这样做的目的是, 便于规范各种大地测量要素固体潮效应计算流程, 实现地面及固体地球外部各种几何和物理大地测量要素 (观测量或参数) 固体潮效应的算法相容和统一计算。

#### 8.1.4 大地测量全要素体潮效应统一算法

采用相容的算法、相同的数值标准与地球物理模型, 统一计算地面及其外部空间各种大地测量要素 (观测量或参数) 固体潮效应, 是形变地球大地测量学的基本原则, 是多种异构高精度大地测量协同观测的最低要求。

##### 8.1.4.1 固体潮效应的勒夫数频率相关性校正算法

首先, 选择合适的标称体潮勒夫数, 让勒夫数频率相关性校正包含所有勒夫数虚部的贡献, 让标称勒夫数为实数, 以简化固体潮效应计算方案。

为满足这种情况，这里以表 1.2 微椭弹性地球勒夫数位为基础，将位勒夫数取值用表 1.3 中粘弹性地球的二阶位勒夫数的实部替换，作为标称体潮勒夫数，取值如 1.13。而表 1.3 中粘弹性地球的二阶位勒夫数的虚部，纳入位勒夫数频率相关性校正算法中一并计算，即将二阶周日位勒夫数的虚部统一加上-0.00144，即表 1.7 中， $\delta k_{21}^I(\sigma) = \delta k_{21}^I(\sigma) - 0.00144$ ，将二阶半日位勒夫数的虚部统一加上-0.00130， $\delta k_{22}^I(\sigma) = \delta k_{22}^I(\sigma) - 0.00130$ 。

二阶地球重力位系数固体潮效应的勒夫数频率相关性校正算法，已由 (1.30) ~ (1.33) 式给出。

表 1.13 标称体潮勒夫数取值

$n$	$m$	潮汐周期	$k_{nm}$	$h_{nm}$	$l_{nm}$
2	0	长周期	0.30190	0.6078	0.0847
2	1	周日	0.29830	0.6078	0.0847
2	2	半日	0.30102	0.6078	0.0847
3	0	长周期	0.093	0.2920	0.0150
3	1	周日	0.093	0.2920	0.0150
3	2	半日	0.093	0.2920	0.0150
3	3	1/3 日	0.094	0.2920	0.0150

将地球重力位系数固体潮效应的勒夫数频率相关性校正值  $\Delta\bar{C}_{2m}^\delta - i\Delta\bar{S}_{2m}^\delta$ ，代入高程异常（大地水准面）固体潮效应表达式 (1.5)，可得地面或固体地球外部高程异常（大地水准面）固体潮效应的二阶勒夫数频率相关性校正公式：

$$\delta\zeta(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{\gamma r} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=0}^2 (\Delta\bar{C}_{2m}^\delta \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m}^\delta \sin m\lambda) \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.40)$$

式中： $\Delta\bar{S}_{20}^\delta = 0$ 。

同理，可得地面或固体地球外部扰动重力固体潮效应的二阶勒夫数频率相关性校正公式：

$$\delta\delta\dot{g} = 3 \frac{GM}{r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=0}^2 (\Delta\bar{C}_{2m}^\delta \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m}^\delta \sin m\lambda) \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.41)$$

地面或固体地球外部垂线偏差固体潮效应的二阶勒夫数频率相关性校正公式：

$$\text{南向：} \delta\xi = \frac{GM \sin\theta}{\gamma r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=0}^2 (\Delta\bar{C}_{2m}^\delta \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m}^\delta \sin m\lambda) \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.42)$$

$$\text{西向：} \delta\eta = \frac{GM}{\gamma r^2 \sin\theta} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=1}^2 m (\Delta\bar{C}_{2m}^\delta \sin m\lambda - \Delta\bar{S}_{2m}^\delta \cos m\lambda) \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.43)$$

地面或固体地球外部扰动重力梯度固体潮效应（径向）的二阶勒夫数频率相关性校正公式：

$$\delta\dot{T}_{rr} = 15 \frac{GM}{r^3} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=0}^2 (\Delta\bar{C}_{2m}^\delta \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m}^\delta \sin m\lambda) \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.44)$$

地面或固体地球外部水平重力梯度固体潮效应的二阶勒夫数频率相关性校正公式：

$$\text{北向: } \delta\dot{T}_{NN} = -\frac{GM}{r^3} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=0}^2 (\Delta\bar{C}_{2m}^\delta \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m}^\delta \sin m\lambda) \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.45)$$

$$\text{西向: } \delta\dot{T}_{WW} = \frac{GM}{r^3 \sin^2\theta} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=1}^2 m^2 (\Delta\bar{C}_{2m}^\delta \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m}^\delta \sin m\lambda) \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.46)$$

与地球固连的地面站点，其位移固体潮效应 $\odot$ 的二阶勒夫数频率相关性校正公式：

$$\text{东方向: } \delta e = -\frac{GM}{\gamma r^2 \sin\theta} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=1}^2 m (\Delta\bar{C}_{2m}^\sigma \sin m\lambda - \Delta\bar{S}_{2m}^\sigma \cos m\lambda) \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.47)$$

$$\text{北方向: } \delta n = -\frac{GM \sin\theta}{\gamma r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=0}^2 (\Delta\bar{C}_{2m}^\sigma \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m}^\sigma \sin m\lambda) \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.48)$$

$$\text{径向: } \delta r = \frac{GM}{\gamma r} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=0}^2 (\Delta\hat{C}_{2m}^\sigma \cos m\lambda + \Delta\hat{S}_{2m}^\sigma \sin m\lambda) \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.49)$$

与地球固连的地面站点，其地面重力固体潮效应 $\odot$ 的二阶勒夫数频率相关性校正公式：

$$\delta\dot{g}^s(r, \varphi, \lambda) = \frac{3GM}{r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=0}^2 \left[ \left( \Delta\hat{C}_{2m}^\sigma - \frac{3}{2} \Delta\bar{C}_{2m}^\delta \right) \cos m\lambda + \left( \Delta\hat{S}_{2m}^\sigma - \frac{3}{2} \Delta\bar{S}_{2m}^\delta \right) \sin m\lambda \right] \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.50)$$

与地球固连的地面站点，其地倾斜固体潮效应 $\odot$ 的二阶勒夫数频率相关性校正公式：

$$\text{南向: } \delta\dot{\xi}^s = \frac{GM \sin\theta}{\gamma r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=0}^2 \left[ (\Delta\bar{C}_{2m}^\delta - \Delta\hat{C}_{2m}^\sigma) \cos m\lambda + (\Delta\bar{S}_{2m}^\delta - \Delta\hat{S}_{2m}^\sigma) \sin m\lambda \right] \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.51)$$

$$\text{西向: } \delta\dot{\eta}^s = \frac{GM}{\gamma r^2 \sin\theta} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m=1}^2 m \left[ (\Delta\bar{C}_{2m}^\delta - \Delta\hat{C}_{2m}^\sigma) \sin m\lambda - (\Delta\bar{S}_{2m}^\delta - \Delta\hat{S}_{2m}^\sigma) \cos m\lambda \right] \bar{P}_{2m}(\cos\theta) \quad (1.52)$$

#### 8.1.4.2 固体潮效应的 4 阶地球重力位系数变化贡献

4 阶重力位系数的固体潮效应，采用与频率相关的勒夫数 $k_{2m}^{(+)}$  ( $m = 0, 1, 2$ )，由 2 阶重力位系数的直接影响 $(\Delta\bar{C}_{2m} - i\Delta\bar{S}_{2m})$  (2 阶引潮位) 计算：

$$\Delta\bar{C}_{4m} - i\Delta\bar{S}_{4m} = k_{2m}^{(+)} (\Delta\bar{C}_{2m} - i\Delta\bar{S}_{2m}), \quad m = 0, 1, 2 \quad (1.53)$$

虽然 4 阶重力位系数的固体潮效应按 (1.53) 式，由二阶位系数的直接影响计算，但其对大地测量各要素的贡献应按 4 阶位系数变化计算。将 (1.53) 式，代入 (1.5) ~ (1.16) 式，可得地面或固体地球外部高程异常 (大地水准面) 固体潮效应的 4 阶重力位系数变化的贡献为：

$$\varepsilon\dot{\zeta}(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{\gamma r} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sum_{m=0}^2 k_{2m}^{(+)} (\Delta\bar{C}_{2m} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m} \sin m\lambda) \bar{P}_{4m}(\cos\theta) \quad (1.54)$$

4 阶重力位系数变化对地面或固体地球外部扰动重力、站点与地球固连的地面重力固体潮效应贡献相等，即：

$$\varepsilon\delta\dot{g} = \dot{g} = \frac{5GM}{r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sum_{m=0}^2 k_{2m}^{(+)} (\Delta\bar{C}_{2m} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m} \sin m\lambda) \bar{P}_{4m}(\cos\theta) \quad (1.55)$$

4 阶重力位系数变化对地面或固体地球外部垂线偏差、站点与地球固连的地倾斜固体潮效应贡献相等，即：

$$\begin{aligned} \text{南向: } \varepsilon\dot{\xi} &= \frac{GM \sin\theta}{\gamma r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \\ &\sum_{m=0}^2 k_{2m}^{(+)} (\Delta\bar{C}_{2m} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m} \sin m\lambda) \frac{\partial}{\partial\theta} \bar{P}_{4m}(\cos\theta) \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \text{西向: } \varepsilon\dot{\eta} &= \frac{GM}{\gamma r^2 \sin\theta} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \\ &\sum_{m=1}^2 k_{2m}^{(+)} m (\Delta\bar{C}_{2m} \sin m\lambda - \Delta\bar{S}_{2m} \cos m\lambda) \bar{P}_{4m}(\cos\theta) \end{aligned} \quad (1.57)$$

地面或固体地球外部扰动重力梯度固体潮效应（径向）的 4 阶重力位系数变化的贡献：

$$\varepsilon\dot{T}_{rr} = \frac{30GM}{r^3} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sum_{m=0}^2 k_{2m}^{(+)} (\Delta\bar{C}_{2m} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m} \sin m\lambda) \bar{P}_{4m}(\cos\theta) \quad (1.58)$$

地面或固体地球外部水平重力梯度固体潮效应的 4 阶重力位系数变化的贡献。

$$\begin{aligned} \text{北向: } \varepsilon\dot{T}_{NN} &= -\frac{GM}{r^3} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \\ &\sum_{m=0}^2 k_{2m}^{(+)} (\Delta\bar{C}_{2m} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m} \sin m\lambda) \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \bar{P}_{4m}(\cos\theta) \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \text{西向: } \varepsilon\dot{T}_{WW} &= \frac{GM}{r^3 \sin^2\theta} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \\ &\sum_{m=1}^2 m^2 k_{2m}^{(+)} (\Delta\bar{C}_{2m} \sin m\lambda + \Delta\bar{S}_{2m} \cos m\lambda) \bar{P}_{4m}(\cos\theta) \end{aligned} \quad (1.60)$$

4 阶重力位系数变化对与地球固连的地面站点位移固体潮效应没有贡献，恒为零。

### 8.1.4.3 大地测量全要素固体潮效应统一计算流程

(1) 直接由 (1.1) 式，计算地球外部天体引潮位引起的地球外部重力位系数变化  $\Delta\bar{C}_{nm} - i\Delta\bar{S}_{nm}$ , ( $n = 2, 3$ )。

(2) 采用实数值的标称勒夫数（表 1.13），且由标称的位移勒夫数和计算点的地心纬度  $\varphi$ ，按 (1.19) 式计算顾及纬度依赖性的位移勒夫数，进而按 (1.4) ~ (1.16) 式，由重力位系数变化  $\Delta\bar{C}_{nm} - i\Delta\bar{S}_{nm}$ , ( $n = 2, 3$ )，计算地面或固体地球外部各种大地测量要素（观测量或参数）固体潮效应的标称值，记为  $x^0$ 。

(3) 采用与频率相关的勒夫数 $k_{2m}^{(+)}$ , ( $m = 0, 1, 2$ ), 由 2 阶位系数变化 $\Delta\bar{C}_{2m} - i\Delta\bar{S}_{2m}$ , 按式 (1.54) ~ (1.60) 计算地面或固体地球外部各种大地测量要素 (观测量或参数) 固体潮效应的 4 阶重力位系数变化贡献, 记为 $\varepsilon x$ 。

(4) 由 2 阶各分潮勒夫数频率相关性校正和海潮调和幅值, 分别按 (1.30) 与 (1.31)、(1.36) 与 (1.37), 计算位系数变化、位移球谐系数变化的勒夫数频率相关性校正 ( $\Delta\bar{C}_{2m}^{\delta} - \Delta\hat{C}_{2m}^{\sigma}$ )、( $\Delta\hat{C}_{2m}^{\sigma} - i\Delta\hat{S}_{2m}^{\sigma}$ ) 和 ( $\Delta\bar{C}_{2m}^{\sigma} - i\Delta\bar{S}_{2m}^{\sigma}$ ), 进而按 (1.40) ~ (1.52) 式, 计算地面或地球外部各种大地测量要素固体潮效应的二阶勒夫数频率相关性校正, 记为 $\delta x$ 。

二阶各分潮勒夫数频率相关性校正和海潮调和幅值见表 1.7~表 1.12, 其中位勒夫数频率相关性校正, 统一加上表 1.3 中粘弹性地球的二阶位勒夫数的虚部, 即 $\delta k_{21}^I(\sigma) = \delta k_{21}^I(\sigma) - 0.00144$ ,  $\delta k_{22}^I(\sigma) = \delta k_{22}^I(\sigma) - 0.00130$ 。

(5) 将 (2) ~ (3) 步计算得到的相应大地测量要素固体潮效应的标称值 $x^0$ 、4 阶重力位系数变化贡献 $\varepsilon x$ 与二阶勒夫数频率相关性校正 $\delta x$ 分别相加, 就得到地面及固体地球外部计算点处各种大地测量要素固体潮效应的高精度计算结果。

### 8.1.5 大地测量固体潮效应的特点及分析

固体潮效应与大地测量要素类型、时间以及计算点在地球坐标系中的位置有关。下面通过地面点 P( $N105^{\circ}$ ,  $E20^{\circ}$ ,  $H100\text{m}$ ) 固体潮效应及其各部分贡献的时间序列, 来考察各种大地测量要素固体潮效应的时变性质。

#### (1) 全要素大地测量的固体潮效应

首先, 顾及固体潮效应中各种贡献, 计算地面点 P( $N105^{\circ}$ ,  $E20^{\circ}$ ,  $H100\text{m}$ ) 处全要素大地测量的固体潮效应时间序列。时间跨度为 2020 年 6 月 1 日 0 时至 2020 年 6 月 7 日 24 时 (7 天), 时间间隔 10 分钟。如图 1.8。

在分析固体潮效应时序曲线的时变性质时, 一般可重点考察各种类型大地测量要素固体潮效应的幅值大小及其随时间的变化情况, 考察不同类型大地测量要素固体潮效应之间的相位变化关系。固体潮效应时序的最大最小值之差, 与参考历元无关。采用固体潮效应最大最小值之差, 可有效体现不同类型大地测量要素固体潮效应之间的关系。

图 1.8 显示, 大地水准面固体潮效应 (当地面点大地高与大地水准面高相差不大时, 地面高程异常的固体潮效应即为大地水准面的固体潮效应) 最大最小值之差可达 0.99m, 地面大地高固体潮效应最大最小值之差可达 0.51m, 正常高固体潮效应最大最小值之差可达 0.58m, 地面重力固体潮效应最小最大值可达 447.5 $\mu\text{Gal}$ , 地倾斜最大最小值之差可到 45mas, 水平位移最大最小值之差可达 0.16m, 重力梯度径向固体潮效应最大最小值之差可达 3.20mE, 水平重力梯度最大最小值之差可达 1.15mE。

地面点的大地高固体潮效应与正常高固体潮效应异相 (同一时刻符号相反), 地倾斜 (垂线偏差) 南向与西向的固体潮效应异相, 水平重力梯度的北向与西向固体潮效应异

相。地面点的水平位移、地倾斜（垂线偏差）及水平重力梯度向量的固体潮效应，在东西方向上的幅度一般大于南北方向。

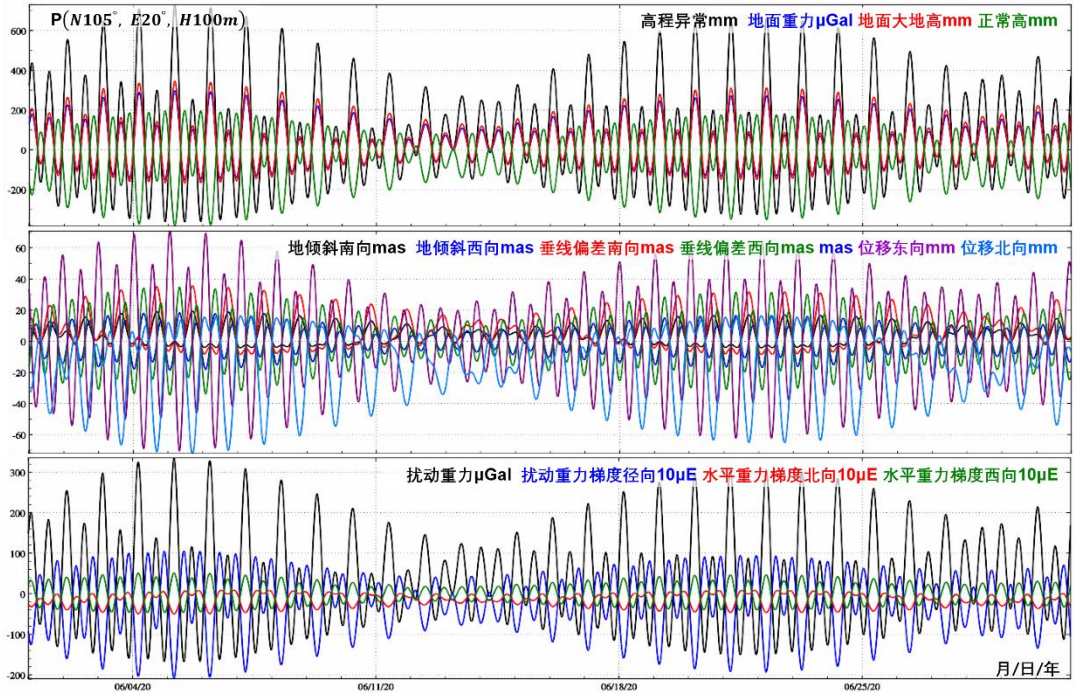


图 1.8 地面站点全要素大地测量固体潮效应时间序列

## (2) 地球外部行星的固体潮效应

为考察除月球和太阳外，其他地球外部行星对固体潮效应的贡献及其时变情况，这里以地球外部全部行星为引潮天体，计算地面点  $P(N105^\circ, E20^\circ, H100m)$  处全要素大地测量的行星固体潮效应时间序列，时间跨度 2020 年 1 月 1 日至 2022 年 12 月 31 日（12 年），时间间隔 2 小时。行星固体潮效应不含勒夫数频率相关性贡献。

图 1.9 显示，地球外部行星的固体潮效应很小，一般只在高精度卫星大地测量、较大时空尺度或全球地球动力学监测或研究中需要顾及。行星固体潮效应包含两个较明显的周期信号，较大幅值的信号周期约为 560 天，第二个信号的周期约为 250 天。



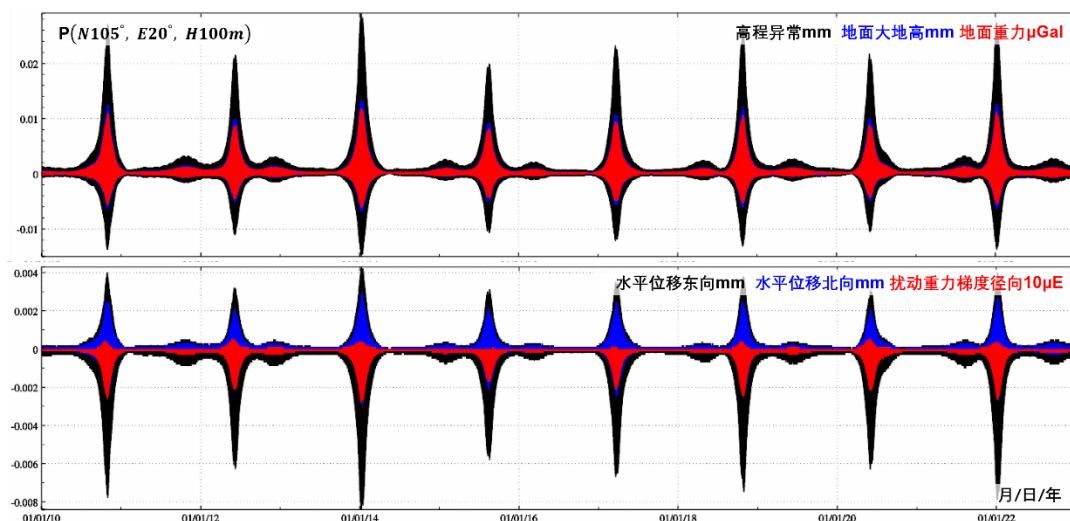


图 1.9 地球外部行星的地面大地测量固体潮效应时间序列

### (3) 引潮位对大地测量要素的间接影响

固体潮效应中的引潮位间接影响部分，等于固体潮效应减去引潮位对大地测量要素的直接影响。间接影响反映引潮位导致固体地球形变，通过勒夫数作用后对大地测量要素的影响。图 1.10 为地面点  $P(N105^{\circ}, E20^{\circ}, H100m)$  处引潮位对大地测量要素的间接影响时间序列，时间跨度为 2020 年 6 月 1 日 0 时至 2020 年 6 月 7 日 24 时 (7 天)，时间间隔 10 分钟。

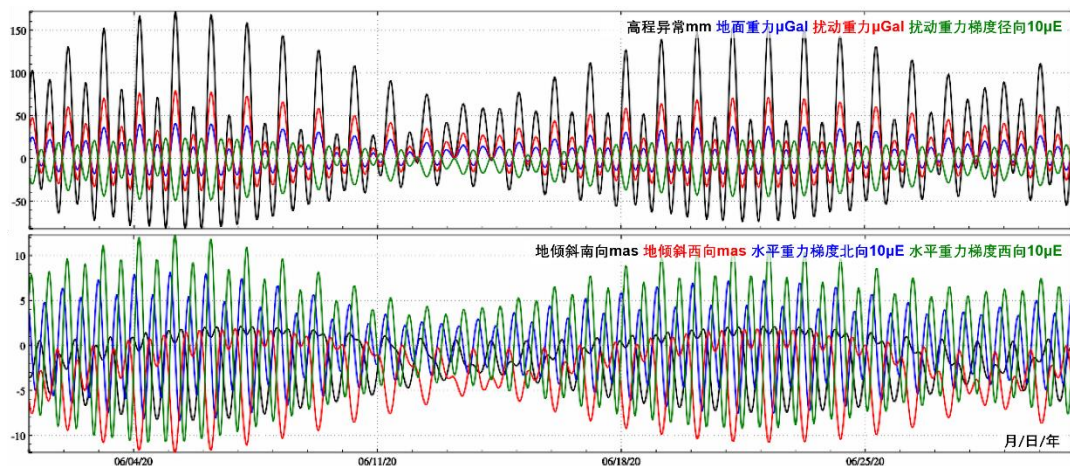


图 1.10 地面大地测量固体潮效应中的引潮位间接影响

图 1.10 显示，大地水准面固体潮间接影响最大最小值之差可达到 0.24m，地面重力固体潮间接影响最大最小值之差可达  $40\mu\text{Gal}$ ，重力梯度径向固体潮效应间接影响最大最小值之差可达 0.7mE。与固体潮效应（引潮位直接影响和间接影响之和）相比，不同类

型大地测量要素固体潮间接影响之间的相位关系不完全一致。

#### (4) 勒夫数频率相关性校正总贡献

高精度、全球性或区域性、大时间跨度的大地测量与地球动力学，离不开精密潮汐理论支持，固体潮效应需要顾及勒夫数频率相关性。下面计算勒夫数频率相关性校正（不含径向、水平勒夫数纬度依赖性贡献）对地面点处全要素大地测量固体潮效应的贡献，时间跨度 2018 年 1 月 1 日至 2018 年 1 月 31 日（1 个月），时间间隔 30 分钟。

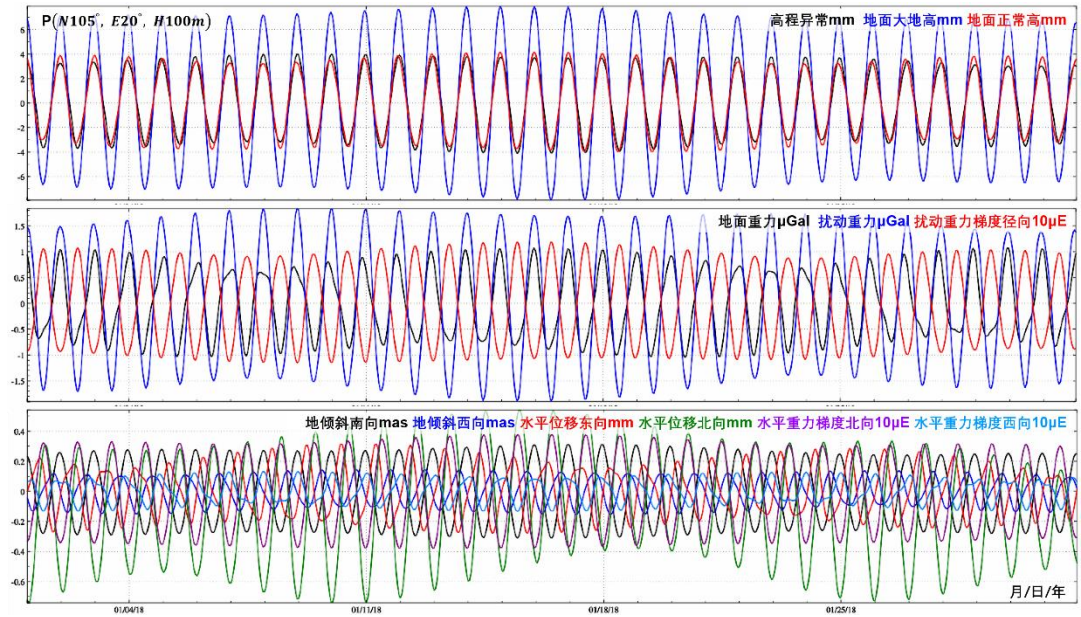


图 1.11 地面大地测量固体潮效应中勒夫数频率相关性贡献