

多源异质监测量负荷形变场径向基函数逼近算法

ETideLoad4.5 充分推导与完整实现了负荷 SRBF 谱域逼近（表示）与负荷效应（负荷形变场）SRBF 综合算法，以有效解决负荷格林函数的高阶振荡与不收敛，格林积分的频谱泄漏与奇异性问题，进而提出基于谱域 SRBF 表示的固体地球物理解析约束方法，以解决 GNSS、重力、水准、地倾斜与地下水等多源异质监测量的深度融合问题，并严格在动力学框架中实现了多种异构大地测量与地表环境负荷的协同监测。

8.7.1 地面负荷等效水高球面径向基函数表示

地面点 \mathbf{x} 处，负荷等效水高 $h_w(\mathbf{x})$ 可表示为规格化面球基函数（定义在半径等于地球长半轴 a 的球面上）的线性组合

$$h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{F}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \quad (7.1)$$

式中： $\mathbf{x} = r \cdot \mathbf{e} = r(\sin\theta\cos\lambda, \sin\theta\sin\lambda, \cos\theta)$ ； r, θ, λ 分别是地面点 \mathbf{x} 的地心距、余纬和经度； \bar{F}_{nm} 为完全规格化的球谐系数； a 为地球长半轴，表示规格化的面球函数 \bar{Y}_{nm} 定义在半径等于地球长半轴 a 的球面上，且

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) &= \bar{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda, \quad \bar{F}_{nm} = \delta \bar{C}_{nm}, \quad m \geq 0 \\ \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) &= \bar{P}_{n|m|}(\cos\theta)\sin|m|\lambda, \quad \bar{F}_{nm} = \bar{S}_{n|m|}, \quad m < 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

$\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$ 为完全规格化缔合 Legendre 函数； n 为球谐系数的阶， m 为球谐系数的次。

面球函数 \bar{E}_{nm} 也可定义在半径为 \mathcal{R} 的 Bjerhammar 球面上（Bjerhammar 球仅是习惯说法，与 Bjerhammar 边值理论无关，这里的 $\mathcal{R} \in (a - \delta, a + \delta)$ ， $\delta \ll a$ ），显然有 $a^n \bar{F}_{nm} = \mathcal{R}^n \bar{E}_{nm}$ ，因而地面负荷等效水高 $h_w(\mathbf{x})$ ，也可用 Bjerhammar 球面上的面球函数 \bar{E}_{nm} 表示为：

$$h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{n=2}^N \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{E}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \quad (7.3)$$

另一方面，地面负荷等效水高 $h_w(\mathbf{x})$ 还可表示为 K 个 Bjerhammar 球面上球面径向基函数（Spherical Radial Basis Functions, SRBF）的线性组合

$$h_w(\mathbf{x}) = a \sum_{k=1}^K d_k \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) \quad (7.4)$$

式中： $\mathbf{x}_k = \mathcal{R}\mathbf{e}_k$ 是定义在 Bjerhammar 球面上的 SRBF 节点，也称为 SRBF 中心或极点； d_k 为 SRBF 系数， K 为 SRBF 节点数，即 SRBF 系数的个数； $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 为负荷等效水高的球面径向基函数，可简写为 $\Phi_k(\mathbf{x}) = \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

球面径向基函数 $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 可进一步展开成 Legendre 级数形式

$$\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \sum_{n=2}^N \phi_n P_n(\psi_k) = \sum_{n=2}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.5)$$

式中： ϕ_n 为SRBF的 n 阶 Legendre 系数，它表征了SRBF形状，基本决定SRBF的空域和谱域性质，也称形状因子；在不强调谱域阶数 n 时，也称 B_n 为SRBF的 Legendre 系数； $\mu = \mathcal{R}/r$ 因与径向基函数 $\Phi_k(x)$ 的谱域带宽有关，也称为宽度参数。

将 (7.5) 式代入 (7.4) 得：

$$\begin{aligned} h_w(\mathbf{x}) &= \frac{r}{4\pi} \sum_{n=2}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{k=1}^K d_k P_n(\psi_k) \\ &= \frac{r}{4\pi} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \end{aligned} \quad (7.6)$$

顾及球谐函数加法定理：

$$P_n(\psi_k) = P_n(\mathbf{e}, \mathbf{e}_k) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (7.7)$$

$$\text{则 (7.5) 式可写为: } h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{n=2}^N B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \sum_{k=1}^K d_k \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (7.8)$$

比较 (7.1)、(7.3) 与 (7.8) 式得：

$$\bar{F}_{nm} = \left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right)^n \bar{E}_{nm} = B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right)^n \sum_{k=1}^K d_k \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (7.9)$$

利用式 (7.9)，可由球面径向基函数系数 d_k 计算负荷等效水高球谐系数 \bar{F}_{nm} 。SRBF中心 \mathbf{x}_k 在 Bjerhammar 球面上的位置、分布和数量，是球面径向基函数逼近的关键性指标，决定了负荷形变场（时变重力场）的空间自由度（空间分辨率）和空域特征，等效于全球负荷球谐系数模型的阶数。

8.7.2 适合负荷形变场监测的球面径向基函数

用于负荷形变场（时变重力场）逼近的径向基函数应满足 Laplace 方程。常见的点质量核函数，Poisson 核函数、径向多极子核函数和 Poisson 小波核函数都是具有调和性质的径向基核函数。令 \mathbf{x} 为地球外部计算点， \mathbf{x}_k 为 Bjerhammar 球面 $\Omega_{\mathcal{R}}$ 上的 SRBF 节点。

(1) 点质量核函数。由 Hardy (1971) 提出的一种逆多面函数 (IMQ)，是引力位积分公式 $V = G \iiint \frac{dm}{L}$ 的核函数，其解析表达式为：

$$\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{L} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|} \quad (7.10)$$

式中： L 为 \mathbf{x} 与 \mathbf{x}_k 的空间距离。由于 $\Delta(1/L) = 0$ ，因此点质量核函数 $\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 满足 Laplace 方程。

(2) Poisson 核函数。源于扰动重力场元 Poisson 积分公式，其解析表达式为：

$$\Phi_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = -2r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{L} \right) - \frac{1}{L} = \frac{r^2 - r_k^2}{L^3} \quad (7.11)$$

(3) 径向多极子核函数的解析表达式为：

$$\Phi_{RM}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L} \quad (7.12)$$

式中： m 为径向多极子核函数的次（order），零次径向多极子核函数就是点质量核函数 $\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_{RM}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

(4) Poisson 小波核函数的解析表达式为：

$$\Phi_{PW}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = 2(\chi_{m+1} - \chi_m), \quad \chi_m = \left(r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L} \quad (7.13)$$

零次 Poisson 小波核函数就是 Poisson 核函数 $\Phi_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_{PW}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

(5) 球面径向基函数计算

为突出负荷及其形变场的谱域性质，通常将 SRBF 解析表达式 (7.10) ~ (7.13)，表示成 Legendre 级数形式 (7.5) 后，按 Legendre 级数计算。

ETideLoad4.5 将球面径向基函数 $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 的 Legendre 级数进行归一化处理，计算归一化系数，用归一化后的 Legendre 级数展开式计算 SRBF。令 \mathbf{x}, \mathbf{x}_k 的球面角距 $\psi_k = 0$ ，则 $\cos\psi_k = 1$ ，顾及 $P_n(\cos\psi_k) = P_n(1) = 1$ ，代入 (7.5) 式，可得 SRBF 归一化系数的通用计算表达式：

$$\Phi^0 = \sum_{n=2}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n \quad (7.14)$$

归一化后的球面径向基函数 Legendre 级数为：

$$\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{\Phi^0} \sum_{n=2}^N \phi_n P_n(\psi_k) = \frac{1}{\Phi^0} \sum_{n=2}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n P_n(\psi_k) \quad (7.15)$$

上述四种形式的 SRBF 及其对应的 Legendre 系数如表 7.1。

表 7.1 负荷等效水高径向基函数及其 Legendre 系数

径向基函数	解析表达式 $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$	第 n 阶形状因子 ϕ_n	Legendre 系数 B_n
点质量核函数	$\frac{1}{L} = \frac{1}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}_k }$	μ^n	$\frac{4\pi}{2n+1}$
Poisson 核函数	$\frac{r^2 - r_k^2}{L^3}$	$(2n+1)\mu^n$	4π
径向多极子核函数	$\frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L}$	$C_n^m \mu^{n-m} \quad (n \geq m)$	$\frac{4\pi C_n^m}{2n+1} \mu^{-m}$
Poisson 小波核函数	$2(\chi_{m+1} - \chi_m)$ $\chi_m = \left(r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L}$	$(-n \ln \mu)^m (2n+1) \mu^n$	$4\pi (-n \ln \mu)^m$

(6) 单位球面 Reuter 格网及有关参数算法

已知 Reuter 格网等级 Q (偶数), 则球坐标系中单位球面 Reuter 格网的地心纬度间隔 $d\varphi$, 单单元格网 i 中心的地心纬度 φ_i 算法为:

$$d\varphi = \frac{\pi}{Q}, \quad \varphi_i = -\frac{\pi}{2} + \left(i - \frac{1}{2}\right) d\varphi, \quad 1 \leq i < Q \quad (7.16)$$

纬度 φ_i 处的平行圈方向单单元格网数 J_i , 经度间隔 $d\lambda_i$ 与边长 dl_i 算法为:

$$J_i = \left\lfloor \frac{2\pi \cos \varphi_i}{d\varphi} \right\rfloor, \quad d\lambda_i = \frac{2\pi}{J_i}, \quad dl_i = d\lambda_i \cos \varphi_i \quad (7.17)$$

不难发现, $dl_i \approx d\varphi$ 。记

$$\varepsilon_i = \frac{ds_i - ds}{ds} = \frac{dl_i - d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\lambda_i}{d\varphi} \cos \varphi_i - 1 \quad (7.18)$$

式中: ds 为赤道附近单单元格网面积; ds_i 为平行圈 φ_i 处单单元格网面积; ε_i 表示平行圈单单元格网面积相对赤道附近单单元格网面积的相对偏差。 ε_i 一般很小, 约为万分之几, 数值与 Reuter 格网等级 Q 有关。赤道附近单单元格网面积 $ds = d\varphi \cdot d\varphi$, 单单元格网面积相对偏差 $\varepsilon_{Q/2} = 0$ 。

对于局部区域, 给定区域经纬度范围, 可直接按 (7.16) 式确定 i 的最小最大值, 再按 (7.17) 式计算每个平行圈处的最大 J_i , 从而确定格网等级为 Q 的区域 Reuter 格网, 无需计算全球格网。

8.7.3 负荷及形变效应径向基函数参数形式

依据负荷形变球谐级数展开式 (2.8) ~ (2.20), 可由 (7.6) 地面负荷球面径向基函数展开式 (最右边表达式), 导出各种地面负荷形变效应径向基函数级数参数化形式如下:

$$\Delta h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.19)$$

$$\Delta \zeta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n (1+k'_n) \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.20)$$

$$\Delta g^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1) \left(1 + \frac{2}{n} h'_n - \frac{n+1}{n} k'_n\right) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (7.21)$$

$$\Delta g^\delta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1) (1+k'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (7.22)$$

$$\Delta \xi^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n (1+k'_n - h'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.23)$$

$$\Delta \eta^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n (1+k'_n - h'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.24)$$

$$\Delta \xi = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.25)$$

$$\Delta\eta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sin\alpha_k \sum_n (1 + k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.26)$$

$$\text{水平东向}\Delta e = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \cos\alpha_k \sum_n l'_n B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.27)$$

$$\text{水平北向}\Delta n = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sin\alpha_k \sum_n l'_n B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.28)$$

$$\text{径向位移}\Delta r = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n h'_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.29)$$

$$\text{正(常)高变化}\Delta h = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n (h'_n - k'_n - 1) \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.30)$$

$$\Delta T_{rr} = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^3} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1)(n+2)(1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (7.31)$$

$$\Delta T_{NN} = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^3} \sum_{k=1}^K d_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \varphi_k^2} \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial^2 P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k^2} \quad (7.32)$$

$$\Delta T_{WW} = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^3 \cos^2 \varphi} \sum_{k=1}^K d_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \lambda_k^2} \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial^2 P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k^2} \quad (7.33)$$

与空域负荷格林函数积分法一样，若已知区域地表负荷等效水高 h_w ，可按(7.19)式对负荷等效水高 h_w 进行SRBF谱域分析，求解SRBF系数模型(这个过程可称为负荷SRBF逼近或SRBF分析)，进而按SRBF系数模型的系数综合算法，由(7.20)~(7.33)式计算区域全要素负荷形变场。这个过程可称为负荷效应SRBF综合。

为考察球面径向基函数的近区性质，选择点质量函数为球面径向基函数，最小阶数和最大阶数分别为90和1800阶，令Bjerhammar球埋藏深度5km，SRBF中心最大作用距离150km，计算与图7.1类型相同的重力、垂线偏差、地面水平位移和径向位移负荷效应的SRBF空域曲线，如图7.2。

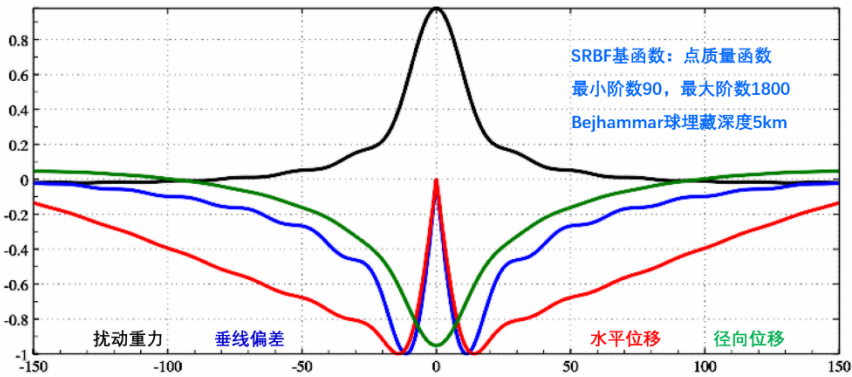


图 7.2 扰动位微分量负荷效应 SRBF 近区性质

比较图 7.1 和图 7.2 可以看出，即使是地面大地高负荷效应，近区 SRBF 函数的收敛

性质也明显优于负荷格林函数。扰动重力、垂线偏差、水平位移负荷效应的 SRBF 函数在 20km 内的近区都是单调收敛的。采用负荷 SRBF 逼近及负荷形变场 SRBF 综合法代替，能有效解决负荷格林函数在近区的高阶振荡与不收敛问题。

8.7.5 球面角距 ψ 的水平一阶、二阶偏导数

地面负荷形变效应径向基函数的算法公式，需要球面角距 ψ 的水平一、二阶偏导数，下面给出球坐标系中的推导过程。

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos \alpha, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos \varphi \sin \alpha \quad (7.34)$$

式中： α 是球面角距 ψ 的大地方位角，由球面三角公式可得：

$$\sin \psi \cos \alpha = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (7.35)$$

$$\sin \psi \sin \alpha = \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) \quad (7.36)$$

将 (7.35) 式两边对 φ 求偏导，顾及 (7.34) 式，有

$$-\cos \psi \cos^2 \alpha + \sin \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\sin \varphi \sin \varphi' - \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (7.37)$$

$$\text{从而可得: } \sin \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\sin \varphi \sin \varphi' - \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) + \cos \psi \cos^2 \alpha \quad (7.38)$$

同理，将 (7.36) 式两边对 λ 求偏导，有

$$-\cos \psi \cos \varphi \sin^2 \alpha + \sin \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} = -\cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) \quad (7.39)$$

$$\sin \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} = -\cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) + \cos \psi \cos \varphi \sin^2 \alpha \quad (7.40)$$

8.7.6 SRBF 系数参数估计技术

将表 7.1 中负荷等效水高径向基函数对应的球面径向基函数勒让德系数 B_n 代入 (7.19) 式，就是以残差地面等效水高变化 $\Delta \tilde{h}_w(\mathbf{x}_i)$ 为观测量，球面径向基函数系数 d_k 为未知数的地面负荷 SRBF 逼近基本观测方程

$$\mathbf{L} = \{\Delta \tilde{h}_w(\mathbf{x}_i)\}^T = \mathbf{A}\{d_k\}^T + \mathbf{e} \quad (i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, K) \quad (7.41)$$

式中： \mathbf{A} 为 $M \times K$ 设计矩阵， \mathbf{e} 为 $M \times 1$ 观测量误差向量； M 为观测量个数， K 为 SRBF 极点数即未知数 d_k 个数； \mathbf{x}_i 为观测量所在地面点的大地坐标。

当 SRBF 节点 $v \in (1, \dots, K)$ 位于计算区域边缘时，令其对应的 SRBF 系数等于零即 $d_v=0$ ，将其作为观测方程，可抑制边缘效应，从而提升 SRBF 系数 $\{d_k\}$ 参数估计的稳定性和可靠性。采用附加抑制边缘效应约束的法方程变为：

$$[\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} \mathbf{E}]\{d_k\}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (7.42)$$

式中： E 为对角线矩阵，当且仅当其下标对应的 SRBF 中心位于区域边缘时等于 1，其余为零； Q 为法方程系数阵 $A^T P A$ 对角线非零元素均方根。

为保持负荷形变场逼近性能的空间一致性，在构建观测方程（7.41）过程中，通常要求所有 SRBF 中心的作用距离 dr 相等。 dr 相应于 SRBF 自变量的定义域，即任一观测量仅用半径 dr 范围内 SRBF 节点球面径向基函数的线性组合表示。SRBF 中心作用距离 dr 等效于负荷格林函数的积分半径。

引入边缘效应抑制方法后，法方程不再需要正则化和迭代计算，从而避免负荷形变场（时变重力场）的解析结构受测量误差影响，可有效提高算法的普适性和可靠性。

残差负荷每次逼近等价于以上次累积的负荷为参考场，按移去恢复法计算剩余残差负荷。通常一般累积 1~2 次可达到稳定解。残差负荷累积逼近有效性一般性原则：（1）负荷形变场空间连续可微，（2）负荷等效水高的残差标准差明显减小，残差统计平均值趋于零。

实际计算时，可先让累积逼近次数等于零，优化调整首次逼近的合适参数，再固定首次逼近参数，优化调整累积逼近参数。

8.7.7 多源异质观测系统深度融合原理

通常可采用如下两种组合平差方案进行参数估计。第一种先按统计学原理为每组观测量配置合适的权重，再由全部观测量按最小二乘原理组成法方程后，计算未知参数估值；第二种先由每组观测量按最小二乘原理组成各自的法方程，对法方程进行规范化处理，然后按不同组的观测质量进行配权，对规范后的法方程加权求和，生成组合后的法方程，求解未知参数估值。

由测量平差原理可知，当各组观测量相互之间统计独立时，采用合适的统计策略，总可以使两种方案的参数估计性质趋于一致。第一种方案，不考虑观测量相对于未知参数的协方差结构，采用统计优化方法对不同组的观测量配置合适的权。当观测点的空间分布差异大，或存在多种类型观测量时，不同组的协方差（观测系统结构）会存在明显差异，一般很难稳定有效地配权，且需要多次迭代估计，有难以获得稳定解的风险；第二种方案，通过归一化不同组的协方差结构（体现多种异构观测系统结构），可有效控制各组观测系统在结构上的深度融合。

多源异质大地测量系统深度融合可采用第二种方案，组合后的法方程可表示为：

$$\sum_s \left(\frac{w_s}{Q_s} A_s^T P_s A_s \right) X = \sum_s \left(\frac{w_s}{Q_s} A_s^T P_s L_s \right) \quad (7.43)$$

式中： $s = 1, \dots, S$ ， S 为观测量分组数； X 为待估参数向量； A_s, L_s, P_s 分别为第 s 组观测方

程的设计矩阵、观测向量与观测量权阵，第 s 组观测量的 \mathbf{P}_s 仅用于区别第 s 组内观测量之间的精度差异，与其他组观测量误差完全无关； Q_s 为第 s 组法方程规范化参数，取第 s 组法方程系数阵 $\mathbf{A}_s^T \mathbf{P}_s \mathbf{A}_s$ 对角线非零元素均方根； w_s 为第 s 组权值，仅用于区别不同组的观测质量。

组合参数 $\delta_s = Q_s/w_s$ ，将观测系统模型（协方差阵）与观测质量 w_s 对组合参数 δ_s 的影响完全分离，使得融合过程不受观测量类型和观测点空间分布差异的影响，因而有利于深度融合观测量空间分布与观测系统结构迥异的空天地海各种类型观测数据，组合后的法方程一般无需迭代计算。