

局部重力场建模误差分析与质量控制

地球重力场无缝连续地充满于整个地固空间，我们只能用一定分辨率的格网空间平均值来表达重力场量，这是重力场量区别于一般离散点几何大地测量要素的典型特征，重力场逼近的误差分析与质量控制因而没有几何大地控制网误差分析与质量控制那样直观有效。然而，各种重力场量及其相互之间在整个地球外部空间是高度解析相关的，重力场逼近问题本质上是重力场量之间的一维线性变换问题（见 5.1.3 节），充分利用重力场的这些性质和特征，可灵活构建形式多样的解析约束条件，丰富重力场建模误差分析与质量控制的内涵与策略。

1 重力场逼近的误差分析与精度评定

1.1 观测重力场量误差与目标重力场元精度概念

地球重力场量在地球外部空间或边界面上连续可微，因而观测重力场量虽然在离散点上获取，但在重力场逼近的数学模型中，实际发挥作用的是相应于某种分辨率的观测场量空间平均值，例如空域重力场积分需要积分边界面上格网平均观测场量，谱域观测场量的观测模型一般截断到某一最大阶数，观测场量也等效于相应分辨率的空间平均值。

同理，重力场逼近得到的目标重力场元，也是相应于有效分辨率的空间平均值，而不是离散点值。例如，重力场逼近求得的 $1' \times 1'$ 扰动重力格网模型，其格网值表达的是 $1' \times 1'$ 格网扰动重力平均值，由谱域基函数展开式（如重力位系数展开式）计算某处目标场元，由于展开式截断到最大阶数，计算结果等效于该处目标场元有效分辨率的空间平均值。

可见，对于重力场逼近目的，观测重力场量误差特指该观测场量相应某一空间分辨率的空间平均值误差，称为观测场量的空间代表性误差，而不是测点处实际观测误差；用于表达逼近解的目标场元，目标场元精度特指该重力场元相应于有效分辨率的空间平均值精度，下称重力场元的空间代表性精度，也不是点值精度。重力场元格网的空间代表性精度取决于重力场逼近精度、空间分辨率与单元格网处局域重力场结构（特别是短波超短波结构）。顾及空间分辨率与重力场空间解析结构，可有效改善目标场元格网的科学应用水平。

观测重力场量的空间代表性误差取决于观测误差、测点空间分布密度和局域重力场空间结构，当观测精度足够时，空间代表性误差主要由测点分布密度和局域重力场结构决定。例如，当测点重力测量精度优于 0.1mGal ， $1' \times 1'$ 扰动重力空间代表性误差为 1mGal 时，则扰动重力空间代表性误差主要由测点分布密度、局域重力场结构和格网化算法性能决定，此时进一步提高测点重力测量精度，对改善观测扰动重力空间代表性误差无效。地面大地测量时代，通常假设重力场的短波超短波结构与地形起伏相关，也将空间代表性误差称为地形代表性误差。

特别地，重力场量的空间分辨率，不是简单的几何图像像素平均，其代表性与局域重力场结构相关，即相同空间分辨率在重力场结构简单的地区代表性强，而在重力场结构复杂地区的代表性弱。任一空间分辨率任意类型的重力场量格网，单元格网场量之间都蕴含着丰富的空间解析函数关系，因而其所含的重力场信息量，要比其几何分辨率丰富得多。

1.2 重力场逼近的误差分析与精度评定理论基础

地球重力场逼近是地球重力场线性空间中自由度为 1 的一维线性变换，不同空间位置上同一类型重力场量之间、不同类型重力场量之间以及不同位置上各种类型重力场量之间都是函数相关的，能用空域重力场积分公式或谱域参数化基函数级数形式解析表达，因此，地球重力场信息（信号）是高度解析的，重力场的高度解析性质在整个地球外部空间中无处不在。科学有效地利用重力场高度解析的典型地球物理特性，可从强观测噪声环境中有效提取微弱重力场信号。这是地球重力场逼近问题区别于一般几何大地测量学问题的显著特征。例如，卫星重力场探测方法可从信噪比小于 10^{-3} 的强噪声环境中有效提取重力场信号。

当按空域积分法逼近重力场时，原则上有两类方案可用于分析局部重力场建模的精度水平。第一类方案直接基于其数学模型即重力场积分公式。首先，需估计边界面上被积观测场量格网（如 Stokes 公式中空间异常格网）的空间代表性误差，包括由实际离散观测量获得边界面上被积观测场量格网过程中的各种引入误差；然后，由重力场积分公式导出误差传播公式，忽略参考重力场模型误差影响，估计目标场元的空间代表性精度。第二类方案基于重力场量之间解析函数关系。首先，构造以目标场元为被积场量，目标场元所在面为边界面，以离散点实际观测场量为被积场量的重力场积分算法；其次，按重力场积分法，计算测点上观测场量的积分值，统计分析积分值（具有空间代表性精度）与观测场量（实测精度，参考真值）差异，获得观测场量的空间代表性误差；最后，由观测场量的空间代表性误差按照第一类方案，估计目标场元的空间代表性精度。由于统计出的观测场量空间代表性误差是以实际观测场量为参考真值，而实际观测场量都是全波段的，故统计出的观测场量空间代表性误差也必然是全波段的，因此，第二类方案最后一步一般无需考虑参考重力场模型误差影响，而第二步获得观测场量空间代表性误差的过程，就是观测误差分析流程。

当按多种观测场量谱域最小二乘法逼近重力场时，如全球重力位系数模型构建或区域 SRBF 重力场逼近，可直接依据重力场逼近数学模型，在最小二乘框架中实现全空间全要素观测场量误差分析、谱域系数（位系数或 SRBF 系数）与目标场元精度评定。首先，由重力场逼近获得的谱域系数估计值，按谱域级数展开式，分别计算测点上每种观测场量的估计值，并统计分析估计值（具有空间代表性精度）与观测场量（实测精度，参考真值）差异，获得每种观测场量的空间代表性误差；其次，由谱域最小二乘法重力

场逼近数学模型，导出误差传播算法公式；最后，由各种观测场量的空间代表性误差，按误差传播算法计算全部谱域系数精度和目标场元的空间代表性精度。

1.3 重力场观测与重力场逼近性能外部测评方法

(1) 重力场积分法观测场量外部精度指标测定与建模精度评估

首先，选择实测重力场量，如航空重力测线或地面离散分布重力测点等，由逼近后的重力场数值模型，按相应的重力场逼近算法，计算测线或地面测点处的模型值；第二步，统计模型值与观测量（参考真值）之差，计算其标准差，作为观测量空间代表性误差。第三步，按第 2 小节积分法重力场建模精度评定方案，分别选择合适的重力场积分算法，由观测量空间代表性误差，按误差传播定律导出各种重力场元模型精度评定算法，评价全要素重力场模型的空间代表性精度。

(2) 谱域最小二乘法观测场量外部精度指标测定与建模精度评估

类似地，首先选择实测重力场量，如航空重力测线或地面离散分布重力测点等，由逼近后的谱域系数模型（位系数或 SRBF 系数），直接计算测线或地面测点处的模型值；第二步，统计模型值与观测量（参考真值）之差，计算其标准差，作为观测量空间代表性误差。第三步，按谱域最小二乘法逼近法数学模型，导出谱域系数误差传播算法公式，并由观测量空间代表性误差，估计谱域系数精度指标；第四步，由重力场元的谱系数级数形式，按误差传播定律导出全要素重力场元模型精度评定算法，评价全要素重力场模型的空间代表性精度。

(3) 重力场测量仪器设备的外部精度指标测定一般方案

由第 1 小节的空间代表性误差结构可知，由上述 (1) (2) 方案推估的航空测线重力或地面点重力的观测量空间代表性误差，一定大于航空测线重力或地面点重力的实测误差，因而按上述 (1) (2) 方案可推估出航空重力或地面重力测量设备的最低重力测量精度水平。

由观测量空间代表性误差计算流程可以看出，各种大地测量技术测量的任意类型观测重力场量，如地面垂线偏差测量或重力梯度测量、航空重力向量或航空重力梯度、GNSS 水准实测高程异常、卫星测高垂线偏差测量等，都可采用上述方案 (1) (2)，有效测定其实测误差的最大值，即观测量的空间代表性误差。特别地，这种方法对实测数据的数量和空间分布没有太多要求，易于制定灵活便捷的质量检测方案。

利用重力场逼近方法，可有效测定空天地海任意类型观测重力场量的空间代表性误差，却无法确定测量设备的直接测量精度指标，重力场逼近方法只能给出实际设备测量误差的上限。然而，对于重力场逼近目的，设备直接测量精度与重力场建模水平没有直接关系，对重力场建模水平取决定性作用只能是观测量的空间代表性误差。

2 局部重力场积分算法质量控制技术

2.1 边界面上局部重力场积分范围的协调一致性

移去参考重力场模型值后，边界面上残差场量的积分范围用流动点（面元）到空间计算点的球面角距 ψ 为变量来表达，而不是流动点到计算点的空间距离 L 。技术上要求，对于所有计算点（无论是否在边界面上），变量 ψ 在边界面上的定义域应严格相等，以维持重力场解析性质的空间一致性。可见，边界面上残差场量的积分范围与计算点所在空间位置无关。PAGravf4.5 通过控制积分核函数定义域，实现边界面上固定大小范围（边界面上的固定积分半径）的重力场积分，包括数值积分与积分快速 FFT 算法（核函数加窗），以协调统一各种局部重力场积分计算。

2.2 构造与被积观测扰动场量接近的等位边界面

大多数重力场积分公式由 Stokes 边值问题导出，如 Hotine 积分、V-M 积分与径向梯度积分公式等。Stokes 边值问题解要求边界面是等位面，即被积观测扰动场量位于重力等位面上。在重力场积分运算前，多数情况下需要将观测扰动场量解析延拓到某一等位边界面上。PAGravf4.5 中属于 Stokes 框架的所有重力场积分算法，都要求积分边界面为重力等位面，但没有要求等位边界面必须是大地水准面，因而可灵活选择与观测点接近的等位面作为边界面，以减少解析延拓误差以及延拓归算过程中重力场信息损失或失真。

由于扰动场量和移去参考重力场模型量的残差扰动场量对位置敏感性低，因此，用于表示边界面位置的大地高精度只要不低于 10m 就能满足要求。例如，可用 360 阶系数模型构造等位边界面，近地空间完全可用等正（高）面大地高格网表示等位边界面。

2.3 用空间坐标计算流动点到计算点的空间距离

当计算点不在积分边界面上时，积分流动点与计算点的距离需要用空间坐标计算，即使计算点也在积分边界面上时，由于积分距离是流动点到计算点的直线距离，而不是球面大弧长度，因而高精度重力场积分计算不宜将边界面近似为球面，而应由空间坐标计算流动点到计算点的积分直线距离。PAGravf4.5 中点位坐标一律用椭球大地坐标（经纬度和大地高）表示，如边界面位置、测点、计算点、积分流动点（面元、体元）的位置一律用点位椭球大地坐标表示，边界面积分格网位置取单元格网中心点椭球大地坐标，积分直线距离一律采用椭球大地坐标计算。

2.4 观测扰动场量格网化解析约束控制基本原则

在地球重力场逼近的整个计算流程中，只要其中有一个算法不满足或失去重力场量解析函数关系约束，都有可能引起重力场信号失真，从而导致重力场建模失去误差分析和精度评价能力，这种情况下只能依赖外部实测重力场数据评估重力场建模水平。

在边界面观测扰动场量格网化时，若测点分布密度相对于格网分辨率没有明显优势，

且所在地区的重力场短波超短波结构复杂，应尽量寻求如最小二乘配置法、点质量法或球面径向基函数逼近法等解析格网化算法计算格网平均观测场量。当测点分布密度远大于格网分辨率时，简单几何格网化方法一般也不易引起重力场结构明显变形。

在陆海地形起伏大的区域，陆海布格影响和地壳均衡影响的改正量级时常大于观测扰动场量本身量级，由于这些改正量存在密度或地球物理假设，其误差或质量不可控制，因而原则上只在重力数据资源非常匮乏情况下，才可适度用布格（均衡）重力异常来推估空白区重力异常。在地球重力场测量数据资源不断丰富的今天，应慎用这种推估方案。

3 重力场逼近的算法性能测试与优化

3.1 地形影响在重力场逼近中的作用与性能控制原则

空天地海任意类型的观测重力场量，都是整个地球系统质量及其内部密度分布的总响应，地球外部大地测量技术无法观测到部分地球系统质量如地形质量、地壳或岩石圈质量对观测场量的贡献，因此任意类型重力场量的各种性质地形影响都是不可测的，地形影响本身不是有效的大地测量要素。另一方面，不同类型观测场量对不同波段重力场的敏感性不同，表现为重力场逼近中观测模型的设计矩阵（敏感矩阵）结构不同，重力场逼近的目标场元同样也是全波段重力场的数学表达，正如地球位系数物理学体积分定义式显示，即使是低阶次系数，也必然包含地形质量的贡献即地形影响。可见，无论是重力场观测还是重力场逼近解，理论上都不存在实际不可测的地形影响问题。

在整个物理大地测量学科体系中，引入重力场量地形影响问题的实际作用有且仅有一个（除重力勘探建模外），那就是分离观测场量或待估目标场元的短波超短波成分，以提高观测场量格网化或数据处理水平，或改善目标场量的短波超短波逼近性能。重力场逼近过程中，地形影响处理方案可采用“移去-重力场逼近-恢复”技术流程，其中，移去的是观测场量的地形影响，恢复的是目标场元的地形影响。由于地形密度近似或地球物理假设必然引起地形影响量的不确定性，因而高精度物理大地测量学普遍要求，移去的地形影响量和恢复的地形影响量之间应具有严格解析函数关系，以确保从观测场量中移去的地形影响，能在目标场元地形影响恢复时切实消除残留的地形影响。

可见理论上，地球重力场逼近不涉及地形影响问题，额外引入地形影响的目的是改善超短波重力场的逼近性能。由此可得，重力场逼近问题中地形影响算法质量控制的基本原则为：地形影响处理能有效改善超短波重力场逼近性能，从观测场量中移去的地形影响量与恢复到目标场元中的地形影响量之间具有严格的重力场解析函数关系。

用于重力场逼近的观测场量必须是唯一可测的大地测量要素，这是大地测量学的约束性要求。然而，任意类型场量的各种性质地形影响都不是唯一可测的，显然不是有效的大地测量要素，因而不能直接用作（谱域和空域）重力场逼近的观测场量。据此我们不难推出借助地形超短波信息（以剩余地形影响为例）改善全球或局部重力场逼近性能

的一般原则和要求：(1) 任意类型重力场量的各种性质地形影响都不可独立作为重力场逼近的观测场量（这是限制性要求）；(2) 可通过地形影响移去恢复方法，以当前观测场量为约束控制，采用重力场逼近方法改善分辨率或观测类型，构造含地形超短波信息的加密观测场量；(3) 维持当前观测场量的重力场逼近（参数化）观测模型不变（这是约束性要求），补充加密观测场量的重力场逼近（参数化）观测模型，并明显降低加密观测场量的权重（有条件时），按最小二乘法实现全球或局部超高分辨率重力场逼近；(4) 可采用残差重力场累积逼近技术，改善超短波重力场逼近性能。

地形影响处理的性能和效果，与当地的地形复杂程度、重力场短波结构、重力数据类型以及测点空间分布都是密切相关的。需要指出的是，当地形复杂性低，局部重力场结构简单，重力点分布较好时，存在采用任何性质的地形影响，都不能改善（甚至会降低）某种类型场量格网化或重力场逼近性能的可能。实际计算前，应针对目标区域的地形起伏特征、重力场局部结构与可用的观测场量及其空间分布情况，依据地形影响定量准则，全面细致地测试分析地形影响处理技术路线，保证地形影响算法及参数选择切实有据可依，才有可能有效提升重力场地形影响数据处理方案的适用性和技术水平。

地面大地测量时代，重力资源匮乏，地面存在大量重力空白区，人们假设重力异常空间变化与当地地形起伏存在某种相关性，从而借助地形影响推估空白区重力异常。然而，在地球重力场探测技术快速发展和观测资源不断丰富的今天，未经深入细致地测试分析，无具体依据地过分跨大地形影响在重力场逼近中的地位和作用是不科学的。

3.2 重力场逼近的算法性能测试与计算方案优化方法

大多数重力场逼近算法和参数设置性能，可用某一超高阶地球重力位系数模型来测试验证。例如，PAGrav4.5 重力场逼近计算样例，就以 EGM2008 重力位系数模型的 2~540 阶为参考重力场，采用 541~1800 阶作为残差扰动场量，给出各种算法的统计分析测试结果。基于超高阶重力位系数模型的重力场逼近算法性能测试技术流程为：以部分类型残差扰动场量为观测场量，调用待测试的局部重力场逼近算法，计算得到另一部分类型残差场元的计算值。通过对比分析局部重力场逼近算法计算的残差扰动场元计算值，与由重力位系数模型直接计算的残差扰动场元模型值（参考真值）的差异，评价局部重力场逼近算法及有关参数设置的技术性能。

PAGrav4.5 重力场逼近算法体系具备由一种类型观测场量，计算大地水准面外部全空间全要素场元的能力，可以循环计算同一点上的同类型场元。通过比较分析循环计算得到的计算场元与观测场量（参考真值）之间的差异，可以分析计算技术流程中参与计算的算法特点和性能。通过优化配置算法，完善重力场建模方案。

选择不同单一类型观测场量、不同类型球面径向基函数 SRBF 及其参数、计算不同类型目标场元，可全面测试 SRBF 及其重力场逼近算法的空域、谱域和解析性质，以揭示目标区域重力场空域谱域精细结构。考察观测场量、SRBF 与目标场元的谱域中心及带

宽，以充分解析目标场元谱结构为原则，结合实际观测条件，可优化设计区域重力场最佳逼近方案。

PAGrav4.5 [多种异质数据 SRBF 重力场全要素建模] 程序，本身具有很强的测试、验证和分析功能，可以测试验证极少高精度天文垂线偏差或 GNSS 水准数据的解析融合（令其观测系统权 > 1 ）、多源多代混叠数据的粗差探测与外部精度评估（令相应观测系数权 $= 0$ ），浅水卫星测高的边界流探测与海面地形分离（卫星测高系统权 < 1 ），以及多种数据空间分布、质量与精度差异大等极端情况下重力场逼近的性能特点和技术水平。

针对某特定重力场逼近目标，可以选择多个不同重力场逼近算法、多种不同参数或多条技术路线来实现。实际计算时，应深入考察目标区域重力数据条件和重力场性质，仔细选择、测试和分析合适的重力场逼近算法和参数，优化技术路线。