

地表负荷 SRBF 逼近与负荷效应 SRBF 综合

当负荷形变量为扰动位微分或其线性组合，如扰动重力、垂线偏差、水平位移或重力梯度的负荷形变效应，其负荷格林函数存在严重的高阶振荡与不收敛问题，格林积分存在频谱泄漏与奇异性问题。负荷间接影响格林函数曲线如图 7.1（横坐标为积分半径，单位为 km）。

不难发现，采用负荷格林函数积分法计算扰动位微分量不占优的负荷形变量时，如计算地面大地高、高程异常、正高或有明显垂直形变站点的地面重力、地倾斜负荷效应时，能获得可接受的效果，但在计算扰动重力、垂线偏差或水平位移负荷效应时，积分结果很不稳定，可靠性差。类似地，在研究陆地水与地表环境负荷大地测量监测方法时，当监测量是 GNSS 大地高变化时，采用格林积分约束法估计，可反演区域陆地水变化及其负荷形变场；但若监测量中的扰动位微分量占优时，如监测量为扰动重力、垂线偏差、水平位移或重力梯度变化时，若采用负荷格林函数积分法约束，由于格林函数的高阶振荡与不收敛，法方程结构极不稳定，因而难以获得稳定解。可见，负荷格林函数积分法难以胜任多种大地测量监测数据融合与协同监测的需要。

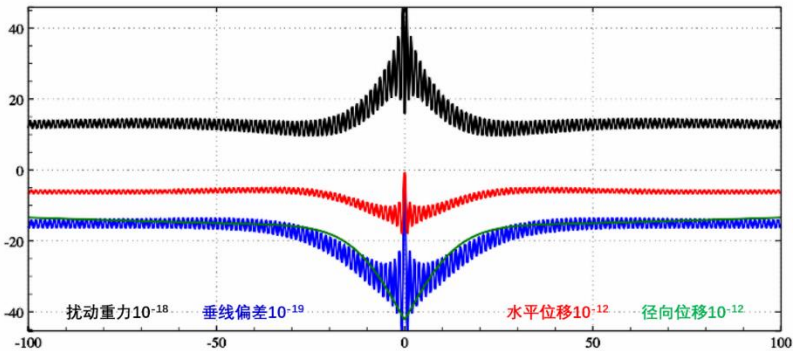


图 7.1 扰动位微分量负荷 Green 函数（间接影响）近区性质

8.7.1 地面负荷等效水高球面径向基函数表示

地面点 \boldsymbol{x} 处，负荷等效水高 $h_w(\boldsymbol{x})$ 可表示为规格化面球基函数（定义在半径等于地球长半轴 a 的球面上）的线性组合

$$h_w(\boldsymbol{x}) = r \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{F}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\boldsymbol{e}) \quad (7.1)$$

式中： $\boldsymbol{x} = r \cdot \boldsymbol{e} = r(\sin\theta\cos\lambda, \sin\theta\sin\lambda, \cos\theta)$ ； r, θ, λ 分别是地面点 \boldsymbol{x} 的地心距、余纬和经度； \bar{F}_{nm} 为完全规格化的球谐系数； a 为地球长半轴，表示规格化的面球函数 \bar{Y}_{nm} 定义在半径等于地球长半轴 a 的球面上，且

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) &= \bar{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda, \quad \bar{F}_{nm} = \delta\bar{C}_{nm}, \quad m \geq 0 \\ \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) &= \bar{P}_{n|m|}(\cos\theta)\sin|m|\lambda, \quad \bar{F}_{nm} = \bar{S}_{n|m|}, \quad m < 0\end{aligned}\quad (7.2)$$

$\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$ 为完全规格化缔合 Legendre 函数; n 为球谐系数的阶, m 为球谐系数的次。

面球函数 \bar{E}_{nm} 也可定义在半径为 \mathcal{R} 的 Bjerhammar 球面上 (Bjerhammar 球仅是习惯说法, 与 Bjerhammar 边值理论无关, 这里的 $\mathcal{R} \in (a - \delta, a + \delta)$, $\delta \ll a$), 显然有 $a^n \bar{F}_{nm} = \mathcal{R}^n \bar{E}_{nm}$, 因而地面负荷等效水高 $h_w(\mathbf{x})$, 也可用 Bjerhammar 球面上的面球函数 \bar{E}_{nm} 表示为:

$$h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{n=2}^N \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{E}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \quad (7.3)$$

另一方面, 地面负荷等效水高 $h_w(\mathbf{x})$ 还可表示为 K 个 Bjerhammar 球面上球面径向基函数 (Spherical Radial Basis Functions, SRBF) 的线性组合

$$h_w(\mathbf{x}) = a \sum_{k=1}^K d_k \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) \quad (7.4)$$

式中: $\mathbf{x}_k = \mathcal{R}\mathbf{e}_k$ 是定义在 Bjerhammar 球面上的 SRBF 节点, 也称为 SRBF 中心或极点; d_k 为 SRBF 系数, K 为 SRBF 节点数, 即 SRBF 系数的个数; $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 为负荷等效水高的球面径向基函数, 可简写为 $\Phi_k(\mathbf{x}) = \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

球面径向基函数 $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 可进一步展开成 Legendre 级数形式

$$\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \sum_{n=2}^N \phi_n P_n(\psi_k) = \sum_{n=2}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.5)$$

式中: ϕ_n 为 SRBF 的 n 阶 Legendre 系数, 它表征了 SRBF 形状, 基本决定 SRBF 的空域和谱域性质, 也称形状因子; 在不强调谱域阶数 n 时, 也称 B_n 为 SRBF 的 Legendre 系数; $\mu = \mathcal{R}/r$ 因与径向基函数 $\Phi_k(x)$ 的谱域带宽有关, 也称为宽度参数。

将 (7.5) 式代入 (7.4) 得:

$$\begin{aligned}h_w(\mathbf{x}) &= \frac{r}{4\pi} \sum_{n=2}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{k=1}^K d_k P_n(\psi_k) \\ &= \frac{r}{4\pi} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k)\end{aligned}\quad (7.6)$$

顾及球谐函数加法定理:

$$P_n(\psi_k) = P_n(\mathbf{e}, \mathbf{e}_k) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (7.7)$$

$$\text{则 (7.5) 式可写为: } h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{n=2}^N B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \sum_{k=1}^K d_k \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (7.8)$$

比较 (7.1)、(7.3) 与 (7.8) 式得:

$$\bar{F}_{nm} = \left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right)^n \bar{E}_{nm} = B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right)^n \sum_{k=1}^K d_k \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (7.9)$$

利用式 (7.9), 可由球面径向基函数系数 d_k 计算负荷等效水高球谐系数 \bar{F}_{nm} 。SRBF 中心 \mathbf{x}_k 在 Bjerhammar 球面上的位置、分布和数量, 是球面径向基函数逼近的关键性指标, 决定了负荷形变场 (时变重力场) 的空间自由度 (空间分辨率) 和空域特征, 等效于全球负荷球谐系数模型的阶数。

8.7.2 适合负荷形变场监测的球面径向基函数

用于负荷形变场 (时变重力场) 逼近的径向基函数应满足 Laplace 方程。常见的点质量核函数, Poisson 核函数、径向多极子核函数和 Poisson 小波核函数都是具有调和性质的径向基核函数。令 \mathbf{x} 为地球外部计算点, \mathbf{x}_k 为 Bjerhammar 球面 Ω_R 上的 SRBF 节点。

(1) 点质量核函数。由 Hardy (1971) 提出的一种逆多面函数 (IMQ), 是引力位积分公式 $V = G \iiint \frac{dm}{L}$ 的核函数, 其解析表达式为:

$$\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{L} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|} \quad (7.10)$$

式中: L 为 \mathbf{x} 与 \mathbf{x}_k 的空间距离。由于 $\Delta(1/L) = 0$, 因此点质量核函数 $\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 满足 Laplace 方程。

(2) Poisson 核函数。源于扰动重力场元 Poisson 积分公式, 其解析表达式为:

$$\Phi_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = -2r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{L} \right) - \frac{1}{L} = \frac{r^2 - r_k^2}{L^3} \quad (7.11)$$

(3) 径向多极子核函数的解析表达式为:

$$\Phi_{RM}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L} \quad (7.12)$$

式中: m 为径向多极子核函数的次 (order), 零次径向多极子核函数就是点质量核函数 $\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_{RM}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

(4) Poisson 小波核函数的解析表达式为:

$$\Phi_{PW}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = 2(\chi_{m+1} - \chi_m), \quad \chi_m = \left(r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L} \quad (7.13)$$

零次 Poisson 小波核函数就是 Poisson 核函数 $\Phi_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_{PW}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

(5) 球面径向基函数计算

为突出负荷及其形变场的谱域性质, 通常将 SRBF 解析表达式 (7.10) ~ (7.13), 表示成 Legendre 级数形式 (7.5) 后, 按 Legendre 级数计算。

ETideLoad4.5 将球面径向基函数 $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 的 Legendre 级数进行归一化处理, 计算归一化系数, 用归一化后的 Legendre 级数展开式计算 SRBF。令 \mathbf{x}, \mathbf{x}_k 的球面角距 $\psi_k = 0$, 则 $\cos\psi_k = 1$, 顾及 $P_n(\cos\psi_k) = P_n(1) = 1$, 代入 (7.5) 式, 可得 SRBF 归一化系数的通

用计算表达式:

$$\Phi^0 = \sum_{n=2}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n \quad (7.14)$$

归一化后的球面径向基函数 Legendre 级数为:

$$\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{\phi_0} \sum_{n=2}^N \phi_n P_n(\psi_k) = \frac{1}{\phi_0} \sum_{n=2}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n P_n(\psi_k) \quad (7.15)$$

上述四种形式的 SRBF 及其对应的 Legendre 系数如表 7.1。

表 7.1 负荷等效水高径向基函数及其 Legendre 系数

径向基函数	解析表达式 $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$	第 n 阶形状因子 ϕ_n	Legendre 系数 B_n
点质量核函数	$\frac{1}{L} = \frac{1}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}_k }$	μ^n	$\frac{4\pi}{2n+1}$
Poisson 核函数	$\frac{r^2 - r_k^2}{L^3}$	$(2n+1)\mu^n$	4π
径向多极子核函数	$\frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L}$	$C_n^m \mu^{n-m} \quad (n \geq m)$	$\frac{4\pi C_n^m}{2n+1} \mu^{-m}$
Poisson 小波核函数	$2(\chi_{m+1} - \chi_m)$ $\chi_m = \left(r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L}$	$(-n \ln \mu)^m (2n+1) \mu^n$	$4\pi (-n \ln \mu)^m$

(6) 单位球面 Reuter 格网及有关参数算法

已知 Reuter 格网等级 Q (偶数), 则球坐标系中单位球面 Reuter 格网的地心纬度间隔 $d\varphi$, 单元格网 i 中心的地心纬度 φ_i 算法为:

$$d\varphi = \frac{\pi}{Q}, \quad \varphi_i = -\frac{\pi}{2} + \left(i - \frac{1}{2} \right) d\varphi, \quad 1 \leq i < Q \quad (7.16)$$

纬度 φ_i 处的平行圈方向单元格网数 J_i , 经度间隔 $d\lambda_i$ 与边长 dl_i 算法为:

$$J_i = \left\lceil \frac{2\pi \cos \varphi_i}{d\varphi} \right\rceil, \quad d\lambda_i = \frac{2\pi}{J_i}, \quad dl_i = d\lambda_i \cos \varphi_i \quad (7.17)$$

不难发现, $dl_i \approx d\varphi$ 。记

$$\varepsilon_i = \frac{ds_i - ds}{ds} = \frac{dl_i - d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\lambda_i}{d\varphi} \cos \varphi_i - 1 \quad (7.18)$$

式中: ds 为赤道附近单元格网面积; ds_i 为平行圈 φ_i 处单元格网面积; ε_i 表示平行圈单元格网面积相对赤道附近单元格网面积的相对偏差。 ε_i 一般很小, 约为万分之几, 数值与 Reuter 格网等级 Q 有关。赤道附近单元格网面积 $ds = d\varphi \cdot d\varphi$, 单元格网面积相对偏差 $\varepsilon_{Q/2} = 0$ 。

对于局部区域, 给定区域经纬度范围, 可直接按 (7.16) 式确定 i 的最小最大值, 再按 (7.17) 式计算每个平行圈处的最大 J_i , 从而确定格网等级为 Q 的区域 Reuter 格网, 无需

计算全球格网。

8.7.3 负荷及形变效应径向基函数参数形式

依据负荷形变球谐级数展开式 (2.8) ~ (2.20), 可由 (7.6) 地面负荷球面径向基函数展开式 (最右边表达式), 导出各种地面负荷形变效应径向基函数级数参数化形式如下:

$$\Delta h_w(\mathbf{x}) = r \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.19)$$

$$\Delta \zeta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n (1+k'_n) \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.20)$$

$$\Delta g^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1) \left(1 + \frac{2}{n} h'_n - \frac{n+1}{n} k'_n\right) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (7.21)$$

$$\Delta g^\delta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1) (1+k'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (7.22)$$

$$\Delta \xi^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n (1+k'_n - h'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.23)$$

$$\Delta \eta^s = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n (1+k'_n - h'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.24)$$

$$\Delta \xi = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.25)$$

$$\Delta \eta = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.26)$$

$$\text{水平东向} \Delta e = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n l'_n B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.27)$$

$$\text{水平北向} \Delta n = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n l'_n B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (7.28)$$

$$\text{径向位移} \Delta r = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n h'_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.29)$$

$$\text{正(常)高变化} \Delta h = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e \gamma r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=2}^N B_n (h'_n - k'_n - 1) \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (7.30)$$

$$\Delta T_{rr} = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^3} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (n+1)(n+2)(1+k'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (7.31)$$

$$\Delta T_{NN} = \frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^3} \sum_{k=1}^K d_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \varphi_k^2} \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial^2 P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k^2} \quad (7.32)$$

$$\Delta T_{WW} = -\frac{3\rho_w GM}{\rho_e r^3 \cos^2 \varphi} \sum_{k=1}^K d_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \lambda_k^2} \sum_n (1+k'_n) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial^2 P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k^2} \quad (7.33)$$

与空域负荷格林函数积分法一样, 若已知区域地表负荷等效水高 h_w , 可按 (7.19) 式对负荷等效水高 h_w 进行 SRBF 谱域分析, 求解 SRBF 系数模型 (这个过程可称为负荷 SRBF 逼近或 SRBF 分析), 进而按 SRBF 系数模型的系数综合算法, 由 (7.20) ~ (7.33) 式计算

区域全要素负荷形变场。这个过程可称为负荷效应 SRBF 综合。

为考察球面径向基函数的近区性质，选择点质量函数为球面径向基函数，最小阶数和最大阶数分别为 90 和 1800 阶，令 Bjerhammar 球埋藏深度 5km，SRBF 中心最大作用距离 150km，计算与图 7.1 类型相同的重力、垂线偏差、地面水平位移和径向位移负荷效应的 SRBF 空域曲线，如图 7.2。

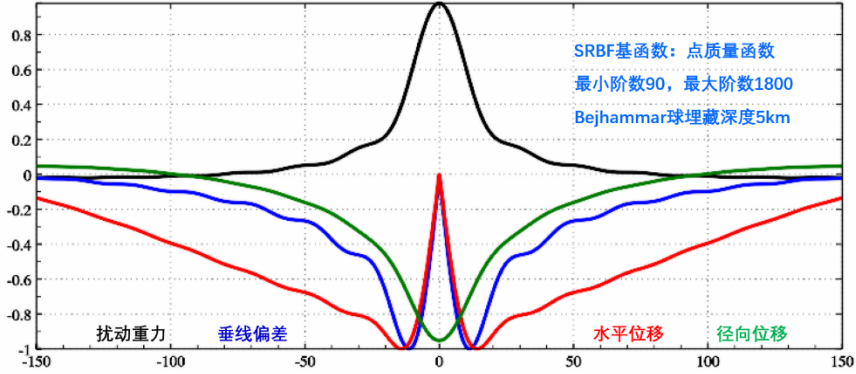


图 7.2 扰动位微分量负荷效应 SRBF 近区性质

比较图 7.1 和图 7.2 可以看出，即使是地面大地高负荷效应，近区 SRBF 函数的收敛性质也明显优于负荷格林函数。扰动重力、垂线偏差、水平位移负荷效应的 SRBF 函数在 20km 内的近区都是单调收敛的。采用负荷 SRBF 逼近及负荷形变场 SRBF 综合法代替，能有效解决负荷格林函数在近区的高阶振荡与不收敛问题。

8.7.5 球面角距 ψ 的水平一阶、二阶偏导数

地面负荷形变效应径向基函数的算法公式，需要球面角距 ψ 的水平一、二阶偏导数，下面给出球坐标系中的推导过程。

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos \alpha, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos \varphi \sin \alpha \quad (7.34)$$

式中： α 是球面角距 ψ 的大地方位角，由球面三角公式可得：

$$\sin \psi \cos \alpha = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (7.35)$$

$$\sin \psi \sin \alpha = \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) \quad (7.36)$$

将 (7.35) 式两边对 φ 求偏导，顾及 (7.34) 式，有

$$-\cos \psi \cos^2 \alpha + \sin \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\sin \varphi \sin \varphi' - \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (7.37)$$

$$\text{从而可得: } \sin \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\sin \varphi \sin \varphi' - \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) + \cos \psi \cos^2 \alpha \quad (7.38)$$

同理，将 (7.36) 式两边对 λ 求偏导，有

$$-\cos\psi\cos\varphi\sin^2\alpha + \sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} = -\cos\varphi'\sin(\lambda' - \lambda) \quad (7.39)$$

$$\sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} = -\cos\varphi'\sin(\lambda' - \lambda) + \cos\psi\cos\varphi\sin^2\alpha \quad (7.40)$$

8.7.6 区域高分负荷形变场 SRBF 逼近与综合

类似于负荷球谐系数模型参考场与残差负荷格林积分组合的局部负荷形变场逼近方法，区域高分负荷形变场 SRBF 逼近也可采用负荷球谐系数模型参考场与残差负荷 SRBF 谱域逼近的组合方案，即用残差负荷 SRBF 谱域逼近代替残差负荷格林积分。

8.7.6.1 负荷 SRBF 逼近与负荷形变场 SRBF 综合

与全球负荷球谐分析与负荷形变场球谐综合计算流程一样，残差负荷 SRBF 谱域逼近方案也由两个大步骤构成。第一步，依据区域地表负荷 SRBF 谱域展开式 (7.19)，由区域残差负荷等效水高变化，按照最小二乘法，估计球面径向基函数系数 $\{d_k\}$ ，我们称此步骤为区域负荷 SRBF 分析及逼近；第二步，依据区域负荷形变场 SRBF 综合算法公式 (7.20) ~ (7.33)，由球面径向基函数系数 $\{d_k\}$ ，计算各种大地测量要素的残差负荷形变效应。我们称此步骤为区域负荷形变场 SRBF 综合。

类似于球谐分析法估计全球负荷球谐系数方案，可以采用迭代累积 SRBF 分析法，提高地面负荷的 SRBF 逼近水平。

8.7.6.2 移去恢复法区域高分负荷形变场 SRBF 逼近计算

区域高分负荷形变场 SRBF 逼近，也可采用移去恢复法，即将“移去-负荷格林函数积分-恢复”方案中的“负荷格林函数积分”替换成“负荷 SRBF 谱域逼近”。其中，“负荷 SRBF 谱域逼近”，采用较小的 SRBF 中心作用距离（作用类似于格林函数积分半径），通过区域负荷 SRBF 分析及逼近，与区域负荷形变场 SRBF 综合，获取高分辨率负荷形变场格网的残差值。该移去恢复方案可称为“移去-负荷 SRBF 谱域逼近-恢复”方案。

下面以中国南部某区域 2018 年 5 月 30 日一个采样历元的 30"×30"陆地水等效水高变化格网 (cm) (以该区域陆地水变化 2018 年平均值为监测基准) 为例，说明移去恢复法区域高分负荷形变场 SRBF 逼近计算步骤和要点。这里的陆地水，仍然只包括了 4m 以浅土壤水、湿地及植被水含量，但不包括河流水和地下水。参考负荷形变场采用 4.2.6 节构造的 2018 年 5 月 30 日 360 阶全球陆地水变化球谐系数模型。

与移去-负荷格林函数积分-移去恢复方案一样，要求负荷等效水高格网数据的区域范围（数据区域），应在负荷形变场精化区域（成果区域）基础上向四周扩展 SRBF 中心作用距离，以抑制负荷 SRBF 逼近的边缘效应。本例数据区域 E97°~103°，N24°~29°，成果区域 E98.5°~101.5°，N25.5°~27.5°。

第一步：输入计算区域 $30'' \times 30''$ 零值格网（零值表示相对地面的高度等于零），由全球陆地水负荷球谐系数模型，选择最大计算阶数 360 阶，计算区域 $30'' \times 30''$ 陆地水负荷等效水高变化参考模型值格网，如图 7.3 中。

第二步：将 $30'' \times 30''$ 陆地水等效水高变化观测量格网（如图 7.3 左），减去其参考模型值

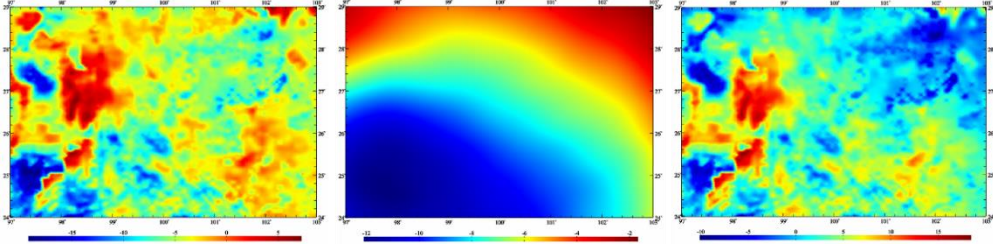


图 7.3 计算区域 $1' \times 1'$ 陆地水等效水高变化观测量、参考值与残差值 (cm) 格网

格网（图 7.3 中），生成 $30'' \times 30''$ 陆地水负荷等效水高变化残差值格网（图 7.3 右）。

第三步：依据区域地表负荷 SRBF 谱域展开式 (6.19)，由 $30'' \times 30''$ 陆地水负荷等效水高变化残差格网，按迭代最小二乘法，估计 SRBF 系数，以累积逼近陆地水负荷等效水高变化残差格网，进而由 SRBF 系数，依据区域负荷形变场 SRBF 综合算法公式 (7.20) ~ (7.33)，计算 $30'' \times 30''$ 陆地水变化负荷形变场残差值格网，如图 7.4。

第四步：输入成果区域 $30'' \times 30''$ 零值格网（零值表示相对地面的高度等于零），全球陆地水负荷球谐系数模型，选择最大计算阶数 360 阶，计算成果区域 $30'' \times 30''$ 陆地水变化负荷形变场参考模型值格网。

第五步：将成果区域 $30'' \times 30''$ 负荷形变场残差值格网，与陆地水变化负荷形变场参考模型值格网相加，获得成果区域 $30'' \times 30''$ 陆地水变化负荷形变场格网成果，如图 7.5。

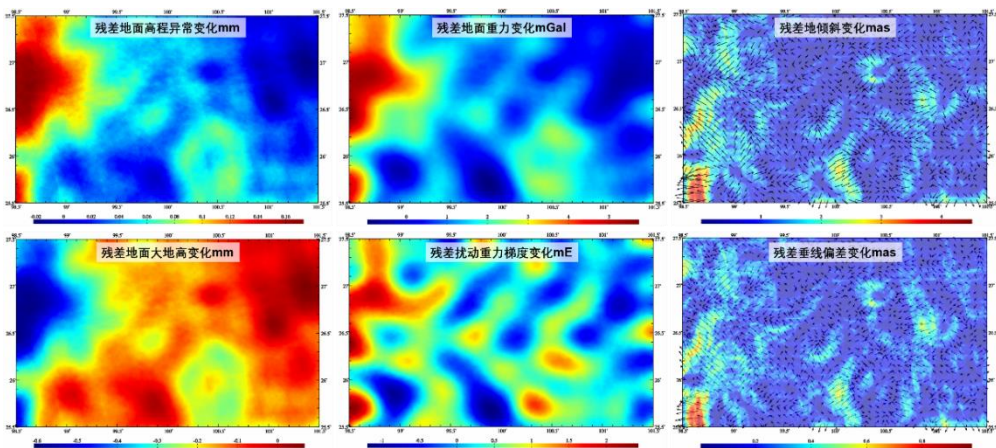


图 7.4 负荷 SRBF 谱域逼近的 $30'' \times 30''$ 残差陆地水变化负荷形变场格网

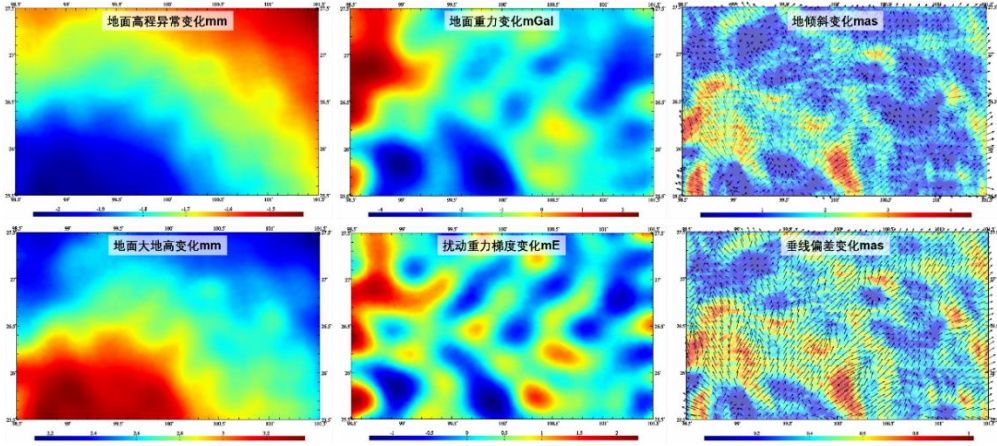


图 7.5 移去-负荷 SRBF 谱域逼近-恢复法计算的 30''×30'' 陆地水变化负荷形变场格网

与 8.5.5 节“移去-负荷格林函数积分-恢复”流程比较，不难发现，“移去-负荷 SRBF 谱域逼近-恢复”方案与“移去-负荷格林函数积分-恢复”方案，除第三步不同外，其余的第一、二、四、五步完全一样。

8.7.6.3 SRBF 系数参数估计技术

将表 7.1 中负荷等效水高径向基函数对应的球面径向基函数勒让德系数 B_n 代入 (7.19) 式，就是以残差地面等效水高变化 $\Delta\tilde{h}_w(\mathbf{x}_i)$ 为观测量，球面径向基函数系数 d_k 为未知数的地面负荷 SRBF 逼近基本观测方程

$$\mathbf{L} = \{\Delta\tilde{h}_w(\mathbf{x}_i)\}^T = \mathbf{A}\{d_k\}^T + \mathbf{e} \quad (i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, K) \quad (7.41)$$

式中： \mathbf{A} 为 $M \times K$ 设计矩阵， \mathbf{e} 为 $M \times 1$ 观测量误差向量； M 为观测量个数， K 为 SRBF 极点数即未知数 d_k 个数； \mathbf{x}_i 为观测量所在地面点的大地坐标。

当 SRBF 节点 $v \in (1, \dots, K)$ 位于计算区域边缘时，令其对应的 SRBF 系数等于零即 $d_v=0$ ，将其作为观测方程，可抑制边缘效应，从而提升 SRBF 系数 $\{d_k\}$ 参数估计的稳定性和可靠性。采用附加抑制边缘效应约束的法方程变为：

$$[\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} \mathbf{E}]\{d_k\}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (7.42)$$

式中： \mathbf{E} 为对角线矩阵，当且仅当其下标对应的 SRBF 中心位于区域边缘时等于 1，其余为零； \mathbf{Q} 为法方程系数阵 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ 对角线非零元素均方根。

为保持负荷形变场逼近性能的空间一致性，在构建观测方程 (7.41) 过程中，通常要求所有 SRBF 中心的作用距离 dr 相等。 dr 相应于 SRBF 自变量的定义域，即任一观测量仅用半径 dr 范围内 SRBF 节点球面径向基函数的线性组合表示。SRBF 中心作用距离 dr 等效于负荷格林函数的积分半径。

引入边缘效应抑制方法后，法方程不再需要正则化和迭代计算，从而避免负荷形变场

(时变重力场)的解析结构受测量误差影响, 可有效提高算法的普适性和可靠性。

残差负荷每次逼近等价于以上次累积的负荷为参考场, 按移去恢复法计算剩余残差负荷。通常一般累积 1~2 次可达到稳定解。残差负荷累积逼近有效性一般性原则: (1) 负荷形变场空间连续可微, (2) 负荷等效水高的残差标准差明显减小, 残差统计平均值趋于零。

实际计算时, 可先让累积逼近次数等于零, 优化调整首次逼近的合适参数, 再固定首次逼近参数, 优化调整累积逼近参数。

8.7.6.4 与“移去-负荷格林函数积分-恢复”法对比分析

将 8.7.6.2 节移去-负荷 SRBF 谱域逼近-恢复法计算流程的第三步, 换成负荷格林函数积分, 就变成“移去-负荷格林函数积分-恢复”流程。

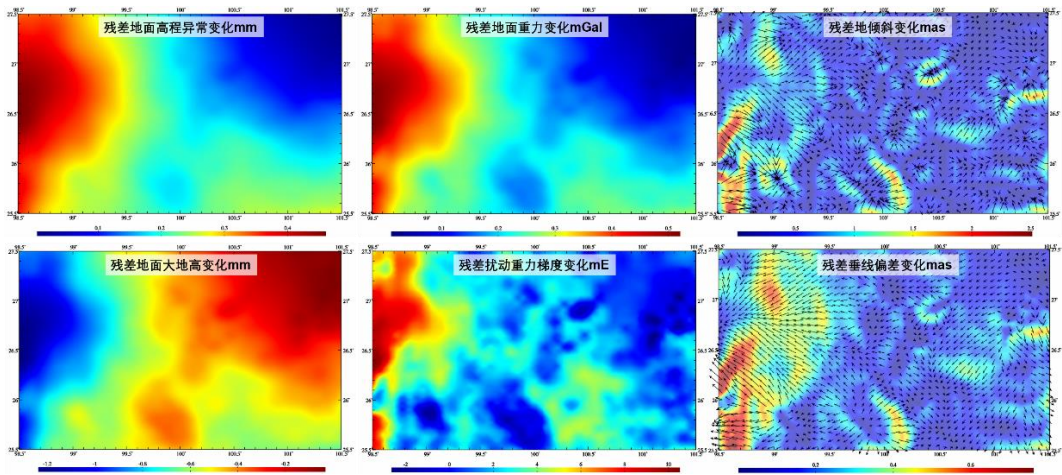


图 7.6 负荷格林函数积分计算的 30"×30"残差陆地水变化负荷形变场格网

第三步时, 输入成果区域 30"×30"零值格网 (零值表示相对地面的高度等于零), 选择积分半径 150km (约等于上述 SRBF 中心作用距离), 由计算区域 30"×30"陆地水负荷等效水高变化残差格网, 按负荷格林函数积分法, 直接计算成果区域 30"×30"负荷形变场残差值格网时间序列。结果如图 7.6。

比较图 7.4 和图 7.6 可以看出, 负荷格林函数积分与负荷 SRBF 谱域逼近计算的负荷形变场残差值格网, 各种要素变化的空间分布特征都相似, 在数值上负荷格林函数积分结果要大些, 而负荷谱域逼近结果的空间短波结构丰富。

同样, 将负荷格林函数积分成果区域 30"×30"负荷形变场残差值格网, 与陆地水变化负荷形变场参考模型值格网相加, 获得“移去-负荷格林函数积分-恢复”法成果区域 30"×30"陆地水变化负荷形变场格网成果。