球面径向基函数重力场逼近理论与算法

地球外部空间点x的扰动位$T(x)$可表示为规格化面谐基函数的线性组合：

$$T(x)=\frac{GM}{r}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\sum_{m=-n}^{n}\bar{F}_{nm}\bar{Y}_{nm}(e) \quad (10.1)$$

式中：$x=r\cdot e=r(sin\theta cos\lambda,sin\theta sin\lambda,cos\theta)$；$r,\lambda,\theta$分别是地球外部点$x$的地心距、经度和地心余纬；$\bar{F}_{nm}$为完全规格化的 Stokes 系数（位系数）；$a$为地球长半轴，表示规格化的面谐函数$\bar{Y}_{nm}$定义在半径等于$a$的球面上，且：

$$\begin{aligned}&\bar{Y}_{nm}(e)=\bar{P}_{nm}(cos\theta)cosm\lambda,\quad \bar{F}_{nm}=\delta\bar{C}_{nm},\quad m\geq 0\\&\bar{Y}_{nm}(e)=\bar{P}_{n|m|}(cos\theta)sin|m|\lambda,\quad \bar{F}_{nm}=\bar{S}_{n|m|},\quad m<0\end{aligned} \quad (10.2)$$

$\bar{P}_{nm}(cos\theta)$为完全规格化缔合 Legendre 函数；n为位系数的阶，m为位系数的次。

将面谐函数$\bar{E}_{nm}$定义在半径为$\mathcal{R}$的 Bjerhammar 球面上，有$a^{n}\bar{F}_{nm}=\mathcal{R}^{n}\bar{E}_{nm}$，则式（10.1）变为：

$$T(x)=\frac{GM}{r}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n}\sum_{m=-n}^{n}\bar{E}_{nm}\bar{Y}_{nm}(e) \quad (10.3)$$

7.10.1 外部扰动位的球面径向基函数表示

地球外部空间点x扰动位$T(x)$也可表示为K个球面径向基函数（SRBF）的线性组合：

$$T(x)=\frac{GM}{r}\sum_{k=1}^{K}d_{k}\Phi_{k}(x,x_{k}) \quad (10.4)$$

式中：$x_{k}=\mathcal{R}\cdot e_{k}$是定义在 Bjerhammar 球面上的 SRBF 节点，也称为 SRBF 中心或 SRBF 极点；d_{k}为 SRBF 系数，K为 SRBF 节点数，即 SRBF 系数个数；$\Phi_{k}(x,x_{k})$为扰动位的球面径向基函数，可简写为$\Phi_{k}(x)=\Phi_{k}(x,x_{k})$。

球面径向基函数$\Phi_{k}(x,x_{k})$可进一步展开成 Legendre 级数形式：

$$\Phi_{k}(x,x_{k})=\sum_{n=2}^{N}\phi_{n}P_{n}(\psi_{k})=\sum_{n=2}^{N}\frac{2n+1}{4\pi}B_{n}\left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n}P_{n}(\psi_{k}) \quad (10.5)$$

式中：ϕ_{n}为 SRBF 的n阶 Legendre 系数，它表征了 SRBF 形状，基本决定了 SRBF 的空域和谱域性质，也称形状因子，在不强调谱域阶数n时，也称B_{n}为 SRBF 的 Legendre 系数。$\mu=\mathcal{R}/r$因与径向基函数$\Phi_{k}(x)$的谱域带宽有关，也称为宽度参数。

将（10.5）式代入（10.4）得：

$$\begin{aligned}T(x)&=\frac{GM}{4\pi r}\sum_{n=2}^{N}(2n+1)B_{n}\left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n}\sum_{k=1}^{K}d_{k}P_{n}(\psi_{k})\\&=\frac{GM}{4\pi r}\sum_{k=1}^{K}d_{k}\sum_{n=2}^{N}(2n+1)B_{n}\left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n}P_{n}(\psi_{k})\end{aligned} \quad (10.6)$$

顾及球谐函数加法定理：

$$P_{n}(\psi_{k})=P_{n}(e,e_{k})=\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n}\bar{Y}_{nm}(e)\bar{Y}_{nm}(e_{k}) \quad (10.7)$$

则（10.5）式可写成

$$T(x)=\frac{GM}{r}\sum_{n=2}^{N}B_{n}\left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{K}d_{k}\bar{Y}_{nm}(e)\bar{Y}_{nm}(e_{k}) \quad (10.8)$$

比较（10.1）、(10.3）与（10.8）式，可得：

$$\bar{F}_{nm}=\left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right)^n\bar{E}_{nm}=B_n\left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right)^n\sum_{k=1}^{K}d_k\bar{Y}_{nm}(e_k) \tag{10.9}$$

利用式（10.9），就可由球面径向基函数系数d_k计算地球重力位系数$\bar{F}_{nm}$，$\bar{E}_{nm}$。之后，可采用地球重力位系数（全球重力位模型），计算地球外部各种重力场参数。

SRBF 节点（中心）x_k在 Bjerhammar 球面上的位置、分布和数量，是球面径向基函数重力场逼近的关键性指标，决定了表达局部重力场的空间自由度（空间分辨率）和空域特征，对应全球重力位系数模型的阶数。

7.10.2 适合重力场逼近的球面径向基函数

重力场逼近基于大地测量边值理论，用于重力场逼近的径向基函数须满足 Laplace 方程。常见的点质量核函数，Poisson 核函数、径向多极子核函数和 Poisson 小波核函数都是具有调和性质的径向基核函数。

令x为地球外部计算点，x_k为 Bjerhammar 球面$\Omega_{\mathcal{R}}$上的 SRBF 节点。

（1）点质量核函数

点质量核函数由 Hardy（1971）提出的一种逆多面函数（IMQ），是引力位积分公式$V=G\iiint\frac{dm}{L}$的核函数，其解析表达式为

$$\Phi_{IMQ}(x,x_k)=\frac{1}{L}=\frac{1}{|x-x_k|} \tag{10.10}$$

式中：L为x与x_k为的空间距离。由于$\Delta(1/L)=0$，因此点质量核函数$\Phi_{IMQ}(x,x_k)$满足 Laplace 方程。

（2）Poisson 核函数

Poisson 核函数源于扰动重力场元的 Poisson 积分公式，其解析表达式为

$$\Phi_P(x,x_k)=-2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{L}\right)-\frac{1}{L}=\frac{r^2-r_k^2}{L^3} \tag{10.11}$$

（3）径向多极子核函数

径向多极子核函数的解析表达式为

$$\Phi_{RM}^m(x,x_k)=\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial r_k}\right)^m\frac{1}{L} \tag{10.12}$$

式中：m可称为径向多极子核函数的次（order），零次径向多极子核函数就是点质量核函数$\Phi_{IMQ}(x,x_k)=\Phi_{RM}^0(x,x_k)$。

（4）Poisson 小波核函数

Poisson 小波核函数的解析表达式为

$$\Phi_{PW}^m(x,x_k)=2(\chi_{m+1}-\chi_m),\quad \chi_m=\left(r_k\frac{\partial}{\partial r_k}\right)^m\frac{1}{L} \tag{10.13}$$

零次 Poisson 小波核函数就是 Poisson 核函数$\Phi_P(x,x_k)=\Phi_{PW}^0(x,x_k)$。

（5）球面径向基函数计算

为突出重力场元的谱域性质，通常将球面径向基函数解析表达式（10.10）~（10.13）表示成 Legendre 级数形式（10.5）后，按 Legendre 级数计算。

PAGrav4.5 将球面径向基函数$\Phi_k(x,x_k)$ 的 Legendre 级数进行归一化处理，计算归一化系数，用归一化后的 Legendre 级数展开式计算球面径向基函数。在处理多种类型观测场元时，将各种类型场元的球面径向基函数统一除以扰动位球面径向基函数的归一化系数，以维持不同类型场元之间的解析关系。

令x, x_k的球面角距$\psi_k = 0$，则$cos\psi_k = 1$，顾及$P_n(cos\psi_k) = P_n(1) = 1$，代入（10.5）式，得扰动位球面径向基函数归一化系数的通用表达式为：

$$\Phi^0 = \sum_{n=2}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n \tag{10.14}$$

归一化后的扰动位（高程异常）球面径向基函数 Legendre 级数为：

$$\Phi_k(x,x_k) = \frac{1}{\Phi^0} \sum_{n=2}^{N} \phi_n P_n(\psi_k) = \frac{1}{\Phi^0} \sum_{n=2}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n P_n(\psi_k) \tag{10.15}$$

PAGrav4.5 采用（10.15）式计算归一化后的球面径向基函数。上述四种形式的扰动位（高程异常）径向基函数及其对应的 Legendre 系数如表 2（已移去 Legendre 系数B_n中的常数因子4π）。

径向基函数	解析表达式$\Phi_k(x,x_k)$	第n阶形状因子ϕ_n	Legendre 系数B_n
点质量核函数	$\frac{1}{L} = \frac{1}{\lvert x - x_k \rvert}$	μ^n	$\frac{1}{2n+1}$
Poisson 核函数	$\frac{r^2 - r_k^2}{L^3}$	$(2n+1)\mu^n$	1
径向多极子核函数	$\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial r_k}\right)^m \frac{1}{L}$	$C_n^m \mu^{n-m}\ (n \geq m)$	$\frac{C_n^m}{2n+1}\mu^{-m}$
Poisson 小波核函数	$2(\chi_{m+1} - \chi_m)$ $\chi_m = \left(r_k \frac{\partial}{\partial r_k}\right)^m \frac{1}{L}$	$(-nln\mu)^m(2n+1)\mu^n$	$(-nln\mu)^m$

7.10.3 各种重力场元径向基函数级数表示

依据扰动重力场元定义，可由（10.6）扰动位的球面径向基函数展开式（最右边表达式）导出各种扰动场元的径向基函数参数化形式。

$$T(x) = \gamma\zeta(x) = \frac{GM}{4\pi r} \sum_{k=1}^{K} d_k \sum_n (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \tag{10.16}$$

$$\delta g(x) = -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{GM}{4\pi r^2} \sum_{k=1}^{K} d_k \sum_n (2n+1)(n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \tag{10.17}$$

$$\Delta g(x) = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2T}{r} = \frac{GM}{4\pi r^2} \sum_{k=1}^{K} d_k \sum_n (2n+1)(n-1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \tag{10.18}$$

$$\xi(x) = \frac{GM}{4\pi r^2 \gamma} \sum_{k=1}^{K} d_k\, cos\alpha_k \sum_n (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \tag{10.19}$$

$$\eta(x) = \frac{GM}{4\pi r^2 \gamma} \sum_{k=1}^{K} d_k\, sin\alpha_k \sum_n (2n+1) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \tag{10.20}$$

$$T_{rr}(x) = \frac{GM}{4\pi r^3} \sum_{k=1}^{K} d_k \sum_n (2n+1)(n+1)(n+2) B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \tag{10.21}$$

式中：α_k是ψ_k的大地方位角。

对于区域重力场逼近目的，通常借助参考全球重力位模型（如 EGM2008 模型），移

去中低阶扰动重力场的参考模型值，由区域重力场观测数据精化残差扰动重力场元。此时式（10.16）~（10.21）中阶数n的最小最大值范围（重力场的谱域带宽），与选择的参考重力场和目标区域重力场结构都密切相关，需采用实际数据测试分析后确定。

7.10.4 Reuter 格网构造与 SRBF 节点设计

PAGravf4.5 采用全球和区域一致的球面 Reuter 格网，根据给定的格网等级Q（界面输入参数），构造球面径向基函数 RBF 节点（中心），再通过自适应算法，依据给定的空间分布密度（界面输入参数），使得观测点空间分布与 RBF 节点空间分布处处一致。

（1）单位球面 Reuter 格网及有关参数算法

已知 Reuter 格网等级Q（偶数），则球坐标系中单位球面 Reuter 格网的地心纬度间隔$d\varphi$，单元格网i中心的地心纬度φ_i算法为

$$d\varphi = \frac{\pi}{Q}, \quad \varphi_i = -\frac{\pi}{2} + \left(i - \frac{1}{2}\right) d\varphi, \quad 1 \le i < Q \tag{10.22}$$

纬度φ_i处的平行圈方向单元格网数J_i，经度间隔$d\lambda_i$与边长dl_i算法为

$$J_i = \left[\frac{2\pi cos\varphi_i}{d\varphi}\right], \quad d\lambda_i = \frac{2\pi}{J_i}, \quad dl_i = d\lambda_i cos\varphi_i \tag{10.23}$$

不难发现，$dl_i \approx d\varphi$。记

$$\varepsilon_i = \frac{ds_i - ds}{ds} = \frac{dl_i - d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\lambda_i}{d\varphi} cos\varphi_i - 1 \tag{10.24}$$

式中：ds为赤道附近单元格网面积，ds_i为平行圈φ_i处单元格网面积，ε_i表示平行圈单元格网面积相对赤道附近单元格网面积的相对偏差。ε_i一般很小，约为万分之几，具体数值与 Reuter 格网等级Q有关。赤道附近单元格网面积$ds = d\varphi \cdot d\varphi$，单元格网面积相对偏差$\varepsilon_{Q/2} = 0$。

对于局部区域，给定区域经纬度范围，可直接按（10.22）式确定i的最小最大值，再按（10.23）式计算每个平行圈处的最大J_i，从而确定格网等级为Q的区域 Reuter 格网，无需计算全球格网。

（2）自适应观测点分布的 RBF 中心点设计

PAGravf4.5 提出一种简易的 Reuter 格网套合算法，设计自适应观测点空间分布的 SRBF 中心点。先由格网等级 Q 构造区域 Reuter 格网，然后统计每个基函数中心点（节点）所在单元 Reuter 格网内的有效观测点数J，当J小于格网最少观测点数时（将最少观测点数作为输入参数），剔除该 SRBF 中心点，遍历所有 Reuter 格网后，就可得到适应观测点空间分布的 SRBF 网络（SRBF 中心点集）。

显然，当观测点为规则格网时，RBF 节点也呈现规则分布；当观测点分布不规则时，RBF 节点分布也不规则，测点分布密度大的地方，RBF 节点分布密度也大。即 RBF 中心点空间分布与观测点空间分布密度处处一致。

7.10.5 抑制边缘效应的 SRBF 系数参数估计

移去常数因子$GM/(4\pi)$后，不改变扰动重力场元之间的解析关系，（10.16）~

（10.21）式因此改写为：

$$\zeta(x)=\frac{1}{r\gamma}\sum_{k=1}^{K}d_k\sum_n(2n+1)B_n\mu^nP_n(\psi_k) \quad (10.25)$$

$$\delta g(x)=\frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{K}d_k\sum_n(2n+1)(n+1)B_n\mu^{n-1}P_n(\psi_k) \quad (10.26)$$

$$\Delta g(x)=\frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{K}d_k\sum_n(2n+1)(n-1)B_n\mu^{n-1}P_n(\psi_k) \quad (10.27)$$

$$\xi(x)=\frac{1}{r^2\gamma}\sum_{k=1}^{K}d_k\,cos\alpha_k\sum_n(2n+1)B_n\mu^n\frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial\psi_k} \quad (10.28)$$

$$\eta(x)=\frac{1}{r^2\gamma}\sum_{k=1}^{K}d_k\,sin\alpha_k\sum_n(2n+1)B_n\mu^n\frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial\psi_k} \quad (10.29)$$

$$T_{rr}(x)=\frac{1}{r^3}\sum_{k=1}^{K}d_k\sum_n(2n+1)(n+1)(n+2)B_n\mu^{n-1}P_n(\psi_k) \quad (10.30)$$

将表 2 中径向基函数对应的球面径向基函数勒让德系数B_n代入上述各式，就是以（残差）扰动重力场元$F(x_i)$为观测量，球面径向基函数系数d_k为未知数的 SRBF 重力场逼近基本观测方程：

$$L=\{F(x_i)\}^T=A\{d_k\}^T+e \quad (i=1,\cdots,M;k=1,\cdots,K) \quad (10.31)$$

式中：A为$M\times K$设计矩阵，e为$M\times 1$观测量误差向量；M为观测数，K为 SRBF 极点数即未知数d_k个数；x_i为观测点位置。

PAGravf4.5 提出了一种通过抑制边缘效应来提高 SRBF 系数参数估计性能的算法。当 SRBF 节点v位于计算区域边缘时，令其对应的系数等于零即$d_v=0$作为观测方程，以抑制边缘效应，提升 SRBF 系数$\{d_k\}$参数估计的稳定性和可靠性。PAGravf4.5 采用附加抑制边缘效应的法方程为：

$$[A^TPA+\epsilon\Xi]\{d_k\}^T=A^TPL \quad (10.32)$$

式中：Ξ为对角线矩阵，当且仅当其下标对应的 SRBF 中心位于区域边缘时等于 1，其余为零，ϵ为协因数阵对角线标准差。

为保持重力场逼近性能的空间一致性，PAGravf4.5 在构建观测方程（10.31）过程中，要求所有 SRBF 中心的作用距离dr（也称影响半径）相等。这里的作用距离dr相应于 SRBF 自变量的定义域，因此任一观测量仅用半径dr范围内 SRBF 节点球面径向基函数的线性组合表示。SRBF 中心作用距离dr等效于局部重力场的积分半径。

引入边缘效应抑制方法后，法方程不再需要正则化，从而有效避免各种场元及其相互之间的解析关系受观测量误差影响。法方程（10.32）求解，可视观测条件，选择 LU 三角分解法（平方根法）、Cholesky 分解法或未知数最小范数法。

7.10.6 多种异构观测系统径向基函数逼近

融合各种手段获取的多种类型扰动重力场元观测数据，实现区域重力场高精度建模，一直是物理大地测量的热点和难点问题。如同扰动重力场元的面谐系数展开，各种类型扰动重力场元都可以用球面径向基函数级数表示，如式（10.25）~（10.30），通过估计球面径向基函数系数，可以实现多种扰动场元融合的重力场建模。

（1）多种场元径向基函数逼近关键问题

由重力场逼近基本要求可知，多种观测场元球面径向基函数逼近需要把握三个核心问题：①不同类型观测场元的球面径向基函数表示，应严格保持场元之间的解析关系不变。②确定不同类型观测场元对球面径向基函数系数$\{d_k\}$贡献的权比关系。③径向基函数谱域中心及带宽与观测场元、目标场元谱域中心及带宽的关系。

对于第一个关键问题，通常只对扰动位/高程异常的径向基函数 Legendre 级数进行归一化处理，将其他类型扰动重力场元的径向基函数 Legendre 级数除以扰动位径向基函数归一化系数，就可维持不同类型扰动重力场元之间的解析关系。

第二个关键问题，可通过引入与观测场元误差或观测点空间分布有关的参数，采用法方程组合方法来实现。PAGravf4.5 通过引入只与观测场元空间分布有关的参数实现组合，以避免算法的解析性能受场元观测误差影响。

第三个问题可调用程序[谱域 SRBF 重力场逼近及性能指标测评]，全面测试径向基函数及其重力场逼近算法的空域、谱域和解析性质。考察观测场元、径向基函数与目标场元的谱域中心及带宽，以充分解析目标场元谱结构为原则，结合实际观测条件，优化设计径向基函数重力场最佳逼近方案。

（2）观测场元贡献调节与边缘效应抑制

PAGravf4.5 提出了一种可同时抑制边缘效应和调节某一指定类型观测系统贡献的径向基函数重力场逼近方法。其法方程为：

$$\sum_i^{i\neq j}\left(\frac{1}{\varepsilon_i}A_i^TP_iA_i\right)+\frac{\kappa^2}{\varepsilon_j}A_j^TP_jA_j+\epsilon\Xi\{d_k\}^T=\sum_i^{i\neq j}\left(\frac{1}{\varepsilon_i}A_i^TP_iL_i\right)+\frac{\kappa^2}{\varepsilon_j}A_j^TP_jL_j \qquad (10.33)$$

式中：ε_j为指定类型j可调控观测场元的法方程系数阵组合参数，ε_i为观测扰动场元$i(i\neq j)$的法方程系数阵组合参数；κ为可调控观测场元j的贡献率。

PAGravf4.5 将可调控观测场元的法方程系数矩阵$A_j^TP_jA_j$与常数项$A_j^TP_jL_j$分别乘以贡献率的平方κ^2，以提高（$\kappa>1$）或降低（$\kappa<1$）可调控观测场元的贡献率。

例如，若观测场元中存在 GNSS 水准残差高程异常时，可通过将其设置为可调控观测场元，调节κ值，提升 GNSS 水准与其他多种场元解析融合的性能与水平。若某种观测场元数据质量低，可将其选为可调控的，指定贡献率$\kappa<1$，如海岸带多源数据重力场逼近时，可选择近岸测高重力场元为可调控的。

（3）多种异构观测系统融合法 SRBF 参数估计

对于不同大地测量技术，观测量的类型、空间分布和观测系统的大地测量性质一般不同，通过规范化不同组的法方程，可有效控制各组不同类型观测量在协方差结构上的深度融合。组合后的法方程可表示为：

$$\sum_s\left(\frac{w_s}{Q_s}\boldsymbol{A}_s^T\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{A}_s\right)\boldsymbol{X}=\sum_s\left(\frac{w_s}{Q_s}\boldsymbol{A}_s^T\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{L}_s\right) \qquad (10.34)$$

式中：$s=1,\cdots,S$，S为观测量分组数；$\boldsymbol{X}$为待估参数向量；$\boldsymbol{A}_s,\boldsymbol{L}_s,\boldsymbol{P}_s$分别为第$s$组观测方

程的设计矩阵、观测向量与观测量权阵，第s组观测量的$\boldsymbol{P}_s$仅用于区别第s组内观测量之间的精度差异，与其他组观测量误差完全无关；Q_s为第s组法方程规范化参数，取第s组法方程系数阵$\boldsymbol{A}_s^T\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{A}_s$对角线非零元素均方根；$w_s$为第$s$组权值，仅用于区别不同组的观测质量，由于分组数一般不大（如个位数），容易进一步按常规统计迭代方案优化。

组合参数$\delta_s = Q_s/w_s$，将观测系统模型（协方差结构）Q_s与观测质量w_s对组合参数δ_s的影响完全分离，使得融合过程不受观测量类型和空间分布差异的影响，因而有利于深度融合观测量类型多样、空间分布与观测系统结构迥异的空天地海重力场数据。

多种观测量融合的参数估计通常采用方差分量估计法。方差分量估计法 SRBF 系数参数估计需要迭代计算，算法性能严重依赖观测误差，不但存在没有稳定解的风险，还严重削弱了观测粗差探测能力。PAGravf4.5 推荐的多种异构观测系统深度融合方法（10.34），通过规范化不同组的法方程，可有效控制各组不同类型观测量在协方差结构上的深度融合，以实现多种异构观测系统联合的重力场解析逼近。该方法将观测系统模型（协方差结构）与观测质量（误差或粗差）的影响完全分离，使得融合过程不受观测量误差（粗差）、观测类型和测点空间分布差异的影响，从而有利于融合空间分布存在极端差异的多种类型观测场元（如极少数天文垂线偏差或 GNSS 水准点数据），有利于精准探测观测量粗差。

举个极端例子，若计算区域内除大量重力点外，还有 3~5 个高精度的天文垂线偏差数据，或 2~3 个 GNSS 水准点，且天文垂线偏差或 GNSS 水准数据有可能存在粗差。显然，方差分量估计法无法融合这类极少数的天文垂线偏差或 GNSS 水准数据，而 PAGravf4.5 的多源异质观测系统深度融合方法，不仅能有效融合这几个关键观测数据，而且由参数估计后的残差，很容易准确探测粗差，粗差剔除后有机会明显改善重力场逼近的性能。

（4）多次累积 SRBF 逼近法重力场最佳逼近

目标场元是观测场元与滤波器 SRBF 的卷积。当目标场元与观测场元类型不同时，一个 SRBF 难以同时与观测场元和目标场元的谱域中心及带宽有效匹配，导致目标场元的谱泄漏。而且，除埋藏深度（宽度参数）外，SRBF 类型、最小最大阶数与 SRBF 中心分布也都影响重力场逼近性能。因此，仅以埋藏深度为参数的 SRBF 系数最优估计，不足以保证重力场的最佳逼近。

为解决这一关键问题，PAGravf4.5 基于重力场的线性可加性，提出了多次累积 SRBF 逼近法重力场建模方案，代替以埋藏深度（或宽度参数）为参数的 SRBF 系数最优估计方案，且每次逼近不再要求确定最佳埋藏深度（宽度参数）。

当每次SRBF逼近采用不同谱域特征的SRBF，多次累积SRBF逼近通过组合多个SRBF谱域中心及带宽，可充分解析目标场元的谱域信号，避免谱泄漏，从而在空域中实现对目标场元的最佳恢复。

PAGravf4.5 给出单次 SRBF 逼近有效性的定量准则：①保证残差目标场元空间分布连续可微，让残差标准差尽量小；②残差统计平均值随累积次数增加趋于零，且不明显反号。

多次累积 SRBF 逼近法的每次残差逼近，本质是用上次逼近结果作参考重力场，按移去恢复法精化残差目标场元。

特别地，通过选择可调控观测场元及其贡献率κ，能有效处理极端空间分布、质量与精度差异大等异常复杂情况下高精度重力场逼近难题。$\kappa=0$时，可有效探测该类观测场元粗差，评估其质量与外部精度；$\kappa>1$时，可有效提升高精度观测场元的贡献，如高精度天文垂线偏差和 GNSS 水准；$\kappa<1$时，可有效抑制低质量观测场元的影响，如浅水卫星测高重力场。

SRBF 逼近程序的典型技术特色主要有：①观测场元、目标场元及其相互之间具有严密的解析关系，重力场逼近算法性能不受观测场元误差影响；②一步解析融合多种异质、不同高度、交叉分布和陆海共存的重力场观测量，无需归算、延拓及格网化；③同步实现大地水准面及其外部全要素重力场全空间解析建模，能有效融合极少天文垂线偏差或 GNSS 水准数据；④具备强大的重力场观测量粗差探测、外部精度指标及高程基准差异测定与计算性能控制能力。