# 地球外部重力场元地形影响算法

地球重力场理论指出，地球外部任意类型扰动场元都可以表示为同一高度等位面上扰动位、扰动重力或其对位置偏导数的线性组合，如垂线偏差可用扰动位的当地水平偏导数表示，扰动重力梯度可以用扰动重力的垂向导数表示。顾及正常重力场不存在地形影响问题，因此，若解决了扰动位和扰动重力的地形影响问题，也就自然解决了其他各种类型重力场元的地形影响问题。

### 7.5.1 陆域地形场-陆地完全布格影响

陆域地形引力场也称为陆域地形完全布格影响，定义为大地水准面以上地形质量对地球重力场（各种场元）的影响。

（1）扰动位的地形影响-完全布格影响

忽略大气质量影响，则地球外部计算点实际扰动位$T$可表示为地形质量引力位$T^t$（完全布格影响）与扣除地形后的扰动位$T^{NT}$之和：

$$T = T^{NT} + T^t = T^{NT} + T^B + T^R \tag{5.1}$$

式中：$T^t$为全部地形质量对计算点产生的引力位，称为扰动位的地形影响或完全布格影响；$T^R$为局部地形质量对计算点产生的引力位，称为扰动位的局部地形影响；$T^B$为厚度等于地形高度的球壳质量对计算点产生的引力位，称为扰动位的球壳布格影响。

由实际扰动位$T$在地球外部的调和性质可知，扰动位的完全布格影响、局部地形影响和球壳布格影响在地球外部均是调和的。

球近似下，地球外部（$r \geq R + h$，$R$为地球平均半径）近地空间扰动位的完全布格影响可展开为：

$$T^t = T^B + T^R = 4\pi G \rho_0 \frac{R^2 h}{r}\left(1 + \frac{h}{R} + \frac{h^2}{3R^2}\right) + T^R \tag{5.2}$$

式中：$G$为万有引力常数；$h$为地球外部计算点正下方的地形高程；$r$为计算点的地心距；$\rho_0$为地面到大地水准面间地形的几何平均密度，取地形密度$\rho_0$ =2.67×10³kg/m³。

（2）扰动重力的完全布格影响

将（5.1）式代入扰动重力定义式，可得球近似下地球外部任意高度上：

$$\delta g = -\frac{\partial T^{NT}}{\partial r} - \frac{\partial T^t}{\partial r} = \delta g^{NT} + \delta g^t = \delta g^{NT} + \delta g^B + \delta g^R \tag{5.3}$$

式中：$\delta g^t$称为扰动重力的完全布格影响；$\delta g^B$称为扰动重力的球壳布格影响；$\delta g^R$称为扰动重力的局部地形影响。

球近似下，地球外部近地空间扰动重力的完全布格影响：

$$\delta g^t = \delta g^B + \delta g^R = 4\pi G \tilde{\rho} \frac{R^2 h}{r^2}\left(1 + \frac{h}{R} + \frac{h^2}{3R^2}\right) + \delta g^R \tag{5.4}$$

式（5.2）、（5.4）截断到$h/R$的二次项，因此只适合地面及近地空间（如航空高度），

但不适合卫星高度。

### 7.5.2 地球外部局部地形影响积分公式

（1）扰动位局部地形影响

根据定义，仅考虑地表密度$\rho$，扰动位的局部地形影响可表示为：

$$T^R=\gamma\zeta^R=G\rho\iint_s\int_{R+h}^{R+h'}L^{-1}(r,\psi,r')\,dr'\,ds \tag{5.5}$$

式中：$ds=r'^2cos\varphi'd\varphi'd\lambda'$为地面积分面元；$L=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'cos\psi}$为流动点（即积分体元$dV=dr'ds$）到计算点的空间距离。

$$\int L^{-1}(r,\psi,r')\,dr'=ln(r'-rt+L)+C \tag{5.6}$$

式中，$t=cos\psi$，$C$为积分常数；。

当计算点与流动点位置相同时，扰动位局部地形影响积分奇异：

$$T^R|_0=\frac{1}{6}G\rho_0A_0\sqrt{A_0/\pi}\left(h_{xx}+h_{yy}\right) \tag{5.7}$$

式中：$\rho_0$为计算点的地形密度；$A_0$为计算点积分面元的面积；$h_{xx},h_{yy}$为计算点的地形在北方向$x$和东方向$y$的二阶水平偏导数。

（2）扰动重力局部地形影响

根据扰动重力定义，可得扰动重力的局部地形影响：

$$\delta g^R=-T_r^R=-\frac{\partial T^R}{\partial r}=-G\rho\iint_s\int_{R+h}^{R+h'}\frac{\partial L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial r}dr'ds \tag{5.8}$$

式中：$\int\frac{\partial L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial r}dr'=-\int\frac{r-r't}{L^3}dr'=-\frac{r'}{rL}+C$ (5.9)

当计算点与流动点位置相同时，扰动重力局部地形影响积分奇异：

$$\delta g^R|_0=\frac{1}{2}G\rho_0\sqrt{\pi A_0}\left(h_x^2+h_y^2\right) \tag{5.10}$$

式中：$\left(h_x,h_y\right)$为计算点的地形坡度向量。

（3）垂线偏差局部地形影响

顾及$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=-cos\alpha$，$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=-cos\varphi sin\alpha$，有：

$$\xi^R=\frac{T_\theta^R}{\gamma r}=-\frac{\partial T^R}{\gamma r\partial\varphi}=-\frac{\partial T^R}{\gamma r\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=\frac{\partial T^R}{\gamma r\partial\psi}cos\alpha$$

$$=\frac{G\rho}{\gamma r}\iint_s\int_{R+h}^{R+h'}\frac{\partial L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial\psi}dr'cos\alpha ds \tag{5.11}$$

$$\eta^R=-\frac{T_\lambda^R}{\gamma rsin\theta}=-\frac{\partial T^R}{\gamma rcos\varphi\partial\lambda}=-\frac{\partial T^R}{\gamma rcos\varphi\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=\frac{\partial T^R}{\gamma rcos\varphi\partial\psi}cos\varphi sin\alpha$$

$$=\frac{G\rho}{\gamma r}\iint_s\int_{R+h}^{R+h'}\frac{\partial L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial\psi}dr'sin\alpha ds \tag{5.12}$$

式中：$\int\frac{\partial L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial\psi}dr'=\frac{r-r't}{Lsin\psi}+C$ (5.14)

$\alpha$是$\psi$的大地方位角，由球面三角公式可得：

$$sin\psi cos\alpha=cos\varphi sin\varphi'-sin\varphi cos\varphi'cos(\lambda'-\lambda) \tag{5.14}$$

$$sin\psi sin\alpha = cos\varphi' sin(\lambda' - \lambda) \tag{5.15}$$

（4）扰动重力梯度局部地形影响

$$T_{rr}^{R} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}T^R = G\rho\iint_s \int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial^2 L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial r^2}dr'\,ds \tag{5.16}$$

式中：$\int \frac{\partial^2 L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial r^2}dr' = \int\left[-\frac{1}{L^3} + \frac{3(r-r't)^2}{L^5}\right]dr' = \frac{r'}{r^2 L} + \frac{r'(r-r't)}{rL^3} + C$ （5.17）

（5）水平重力梯度局部地形影响

$$T_{NN}^{R} = \frac{1}{r}T_r^R + \frac{1}{r^2}T_{\theta\theta}^R = -\frac{1}{r}\delta g^R - \frac{1}{r^2}T_{\varphi\varphi}^R \tag{5.18}$$

$$T_{WW}^{R} = \frac{1}{r}T_r + \frac{1}{r^2}T_\theta ctg\theta + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}T_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{r}\delta g^R + \frac{\gamma}{r}\xi^R ctg\theta + \frac{1}{r^2 cos^2\varphi}T_{\lambda\lambda}^R \tag{5.19}$$

$$T_{\varphi\varphi}^{R} = \frac{\partial^2 T^R}{\partial\psi^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2},\quad T_{\lambda\lambda}^{R} = \frac{\partial^2 T^R}{\partial\psi^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} \tag{5.20}$$

将（5.14）式两边对$\varphi$求偏导，顾及$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -cos\alpha$，$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -cos\varphi sin\alpha$，有：

$-cos\psi cos^2\alpha + sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = -\sin\varphi sin\varphi' - cos\varphi cos\varphi' cos(\lambda' - \lambda)$，从而可得：

$$sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = -\sin\varphi sin\varphi' - cos\varphi cos\varphi' cos(\lambda' - \lambda) + cos\psi cos^2\alpha \tag{5.21}$$

同理，将（5.15）式两边对$\lambda$求偏导，有：

$-cos\psi cos\varphi sin^2\alpha + sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} = -cos\varphi' sin(\lambda' - \lambda)$，从而可得：

$$sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} = -cos\varphi' sin(\lambda' - \lambda) + cos\psi cos\varphi sin^2\alpha \tag{5.22}$$

将扰动位局部地形影响积分式（5.5）两边对球面角距$\psi$求二阶偏导数，得：

$$\frac{\partial^2 T^R}{\partial\psi^2} = G\rho\iint_s \int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\frac{1}{L}dr'ds = G\rho\iint_s \int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'cos\psi}}dr'ds \tag{5.23}$$

$$\int\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\frac{1}{L}dr' = \frac{r'(6r^2+4r'^2+6r^2cos2\psi-rr'cos3\psi)-rt(4r^2+11r'^2)}{4L^3 sin^2\psi} \tag{5.24}$$

### 7.5.3 局部地形影响积分 FFT 快速算法

（1）扰动位局部地形影响快速算法

采用局部球面极坐标系，令$z$轴为地心向径方向（天顶方向），零点$z = 0$位于计算点正下方地形面，$\tilde{h}$为计算点相对地形面的高度，此时有$dz = dr'$，$d\tilde{h} = dr$，则扰动位局部地形影响积分式（5.5）式等价于：

$$T^R = G\rho\iint_s \int_0^{\Delta h}\frac{dz}{L}ds = G\rho\iint_s \int_0^{\Delta h}\frac{dz}{\sqrt{\left(\tilde{h}-z\right)^2+l^2}}ds$$

$$= G\rho\iint_s\left[ln\frac{\sqrt{(\tilde{h}-\Delta h)^2+l^2}-\tilde{h}+\Delta h}{\sqrt{(\tilde{h}-\Delta h)^2+l^2}+\tilde{h}-\Delta h} - ln\frac{\sqrt{\tilde{h}^2+l^2}-H}{\sqrt{\tilde{h}^2+l^2}+H}\right]ds \tag{5.25}$$

式中：$\Delta h$为地面流动积分面元$ds$相对于计算点正下方地形面的高差；$l = 2r_0 sin(\psi/2)$为流动面元到计算点的球面距离，$r_0$为计算点正下方地形面的地心距，$\psi$为流动点到计算点的球面角距。

将（5.25）式被积函数在$z=0$附近展开至 3 阶，得：

$$T^R=G\rho\iint_s\left[\frac{1}{\mathcal{L}}\Delta h+\frac{\tilde{h}}{2\mathcal{L}^3}\Delta h^2+\frac{2\tilde{h}^2-l^2}{6\mathcal{L}^5}\Delta h^3\right]ds \tag{5.26}$$

式中：$\mathcal{L}=\sqrt{\tilde{h}^2+l^2}$为$z=0$上的流动面元$ds$到计算点的空间距离（$\mathcal{L}\neq L$，而$L$为流动体元$dzds$到计算点的空间距离）。

顾及$\Delta h^2=h'^2-2h'h+h^2$，$\Delta h^3=h'^3-3h'^2h+3h'h^2-h^3$，（5.26）式右边每一项均可采用 FFT 算法进行快速计算。其中，$h$为计算点正下方的地形高度，$h'$为流动面元的地形高度。

（2）扰动重力局部地形影响快速算法

同理，扰动重力局部地形影响积分式（5.8）等价于

$$\delta g^R=\frac{G\rho}{r}\iint_s\left[\frac{(r_0+z)}{\sqrt{(\tilde{h}-z)^2+l^2}}\right]_0^{\Delta h}ds=\frac{G\rho}{r}\iint_s\left[\frac{r_0+\Delta h}{\sqrt{\left(\tilde{h}-\Delta h\right)^2+l^2}}-\frac{r_0}{\mathcal{L}}\right]ds \tag{5.27}$$

将（5.27）式被积函数在$z=0$附近展开至 4 阶，得：

$$\delta g^R=\frac{G\rho}{r}\iint_s\left[\begin{array}{c}\frac{r\tilde{h}+\mathcal{L}^2}{\mathcal{L}^3}\Delta h+\frac{2\tilde{h}\mathcal{L}^2+r_0\left(2\tilde{h}^2-l^2\right)}{2\mathcal{L}^5}\Delta h^2+\frac{2\tilde{h}^3r+\tilde{h}^2l^2-3r_0\tilde{h}l^2-l^4}{2\mathcal{L}^7}\Delta h^3\\+\frac{8r\tilde{h}^4-4\tilde{h}^3l^2-12\tilde{h}l^4-24r_0\tilde{h}^2l^2+3l^4r_0}{8\mathcal{L}^9}\Delta h^4\end{array}\right]ds \tag{5.28}$$

其中，$\Delta h^4=h'^4-4h'^3h+6h^2h'^2-4h'h^3+h^4$。

式（5.28）右边各项均可用快速 FFT 算法计算。

（3）垂线偏差局部地形影响快速算法

将垂线偏差局部地形影响积分公式中被积函数在$z=0$附近展开至 3 阶：

$$\int_{R+h}^{R+h'}\frac{\partial L^{-1}(r,\psi,r')}{\partial\psi}dr'$$
$$=-\frac{r^2sin\psi}{\mathcal{L}^3}\Delta h-\frac{3\tilde{h}r^2sin\psi}{2\mathcal{L}^5}\Delta h^2-\left[\frac{r^2sin\psi}{3\mathcal{L}^5}+\frac{5r^2sin\psi(2\tilde{h}^2-l^2)}{6\mathcal{L}^7}\right]\Delta h^3 \tag{5.29}$$

将（5.29）分别代入（5.11）（5.12）式，就可实现 FFT 算法快速计算垂线偏差局部地形影响。

（4）扰动重力梯度局部地形影响快速算法

扰动重力梯度局部地形影响积分式（5.16）等价于

$$T_{rr}^R=G\rho\iint_s\left[\frac{\tilde{h}-\Delta h}{((\tilde{h}-\Delta h)^2+l^2)^{3/2}}-\frac{\tilde{h}}{\mathcal{L}^3}\right]ds \tag{5.30}$$

将（5.30）式被积函数在$z=0$附近展开至 3 阶，得：

$$T_{rr}^R=G\rho\iint_s\left[\begin{array}{l}\frac{2\tilde{h}^2-l^2}{\mathcal{L}^5}\Delta h-\frac{3\tilde{h}\left(2\tilde{h}^2-3l^2\right)}{2\mathcal{L}^7}\Delta h^2+\\\frac{4\tilde{h}^4+6r^4-12\tilde{h}^2l^2-(6r^4+3r^2l^2)t}{\mathcal{L}^9}\Delta h^3\end{array}\right]ds \tag{5.31}$$

（5）水平重力梯度局部地形影响快速算法

式（5.23）中被积函数等价于

$$\int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\frac{1}{L}dr' = \int_0^{\Delta h} \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\frac{1}{\sqrt{\left(\tilde{h}-z\right)^2+4r_0^2 sin^2(\psi/2)}}dz$$

$$= \frac{1}{8sin^2\frac{\psi}{2}}\left[\frac{\tilde{h}\left(2\mathcal{L}^2+r_0^2 sin^2\psi\right)}{\mathcal{L}^3} - \frac{(\tilde{h}-\Delta h)(2\mathcal{L}^2+r_0^2 sin^2\psi-4\tilde{h}\Delta h+2\Delta h^2)}{(\mathcal{L}^2-2\tilde{h}\Delta h+\Delta h^2)^{3/2}}\right] \tag{5.32}$$

在$z = 0$附近展开至 3 阶，得:

$$\int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\frac{1}{L}dr' = -\frac{2(\tilde{h}^2+2r_0^2)cos\psi+r_0^2(-5+cos2\psi)}{2L^5}r_0^2\Delta h$$
$$+\frac{6(\tilde{h}^2+2r_0^2)cos\psi+3r_0^2(-7+3cos2\psi)}{4\mathcal{L}^7}\tilde{h}r_0^2\Delta h^2$$
$$+\frac{(8\tilde{h}^4+12\tilde{h}^2r_0^2-19r_0^4)cos\psi-r_0^2(36\tilde{h}^2-18r_0^2-(24\tilde{h}^2-2r_0^2)cos2\psi+3r_0^2cos3\psi)}{4\mathcal{L}^9}r_0^2\Delta h^3 \tag{5.33}$$

若计算点也在地面上，则有$\tilde{h} = 0$，$\mathcal{L} = l$，公式（5.25）~（5.33）因此能得到大幅度简化。