

重力场及大地水准面精化系统

PALGrav3.0

用户操作手册

中国测绘科学研究院

二〇一八年十二月

摘 要

重力场及大地水准面精化系统 PALGrav3.0, 主要用于地面、海洋及近地空间重力场数据处理, 地面及地球外部各类场元多种性质地形影响的精密计算, 复杂多源重力场数据融合, 各类重力场积分正反算, 稳态重力场与大地水准面精化, 以及区域高程基准优化、质量评估与应用计算等工作。

为满足复杂多源重力场数据深度融合与 1cm 精度水平大地水准面精化的技术要求, PALGrav3.0 通过统一地面、海洋及地球外部各类场元多种性质地形影响算法, 全面提升不同高度处、多种类型、多源异质重力场数据处理与集成能力; 严格依据边值条件构造各种扰动场元严密积分算法, 精细处理奇异积分核函数, 大幅提高重力场逼近性能与精度水平; 采用重力场积分运算代替微分运算, 有效提升重力场数据处理的算法稳定性与误差抑制能力; 在统一的重力场框架中, 设计大地水准面逐级控制方案, 精化区域高程基准, 全面提升其可靠性、精度水平与应用服务能力。

PALGrav3.0 采用积木式模块构架, 用户可根据工程和研究需要, 设计个性化流程, 灵活组织有关功能模块, 完成地面、航空与海洋重力数据处理, 重力场逼近与大地水准面精化, 以及高程基准优化、评估与应用计算等工作。

PALGrav3.0 适用于局部重力场逼近、稳态大地水准面精化, 以及区域高程基准优化、评估与应用。与之配套的固体潮与负荷形变场精化系统 ETideLoad3.0, 适用于大地测量潮汐计算、时变重力场及负荷形变场精化, 与地球动力环境监测应用。这两套软件系统可作为大地测量、地球物理、环境灾害、地球科学等专业数据处理、分析研究和工程培训工具, 也可作为高年级大学生和研究生的教学软件。

关键词: 大地水准面; 高程基准; 重力场积分; 地形影响; 重力数据; 地球外部空间; GNSS 水准; 深度融合; 精度评估。

技术支持: 章传银/柯宝贵/蒋涛
中国测绘科学研究院, 100036
北京市海淀区 莲花池西路 28 号
010-63880705/0703 13240330136
13241136502 / 13910496532

目 录

第一章 系统性能与有关约定	1
1.1 系统主要性能.....	1
1.2 主要文件格式.....	4
1.3 系统参数设置.....	6
1.4 系统有关约定.....	7
1.5 重要概念解析.....	9
第二章 重力场数据处理	16
2.1 扰动重力场元点值计算.....	16
2.2 正常重力场元点值计算.....	17
2.3 模型重力场元点值计算.....	18
2.4 椭球面或球面边值校正.....	20
2.5 Molodensky 边值校正.....	21
2.6 扰动场元正常椭球变换.....	23
2.7 不同高度多种场元融合.....	24
2.8 径向梯度法解析延拓.....	26
2.9 格网水平梯度向量估计.....	27
2.10 格网数据低通滤波运算.....	28
2.11 文件数据统计信息提取.....	30
第三章 地球外部地形影响	31
3.1 局部地形影响数值积分.....	31
3.2 局部地形影响积分 FFT	33
3.3 陆海重力平面布格影响.....	34
3.4 球壳地形质量影响计算.....	35
3.5 局部地形质量补偿积分.....	35
3.6 局部地形质量补偿 FFT	37
3.7 海水完全布格影响积分.....	39
3.8 海水完全布格影响 FFT	40
3.9 江河湖库布格影响积分.....	42
3.10 陆海地面重力均衡影响.....	43
3.11 陆海地形质量球谐分析.....	43

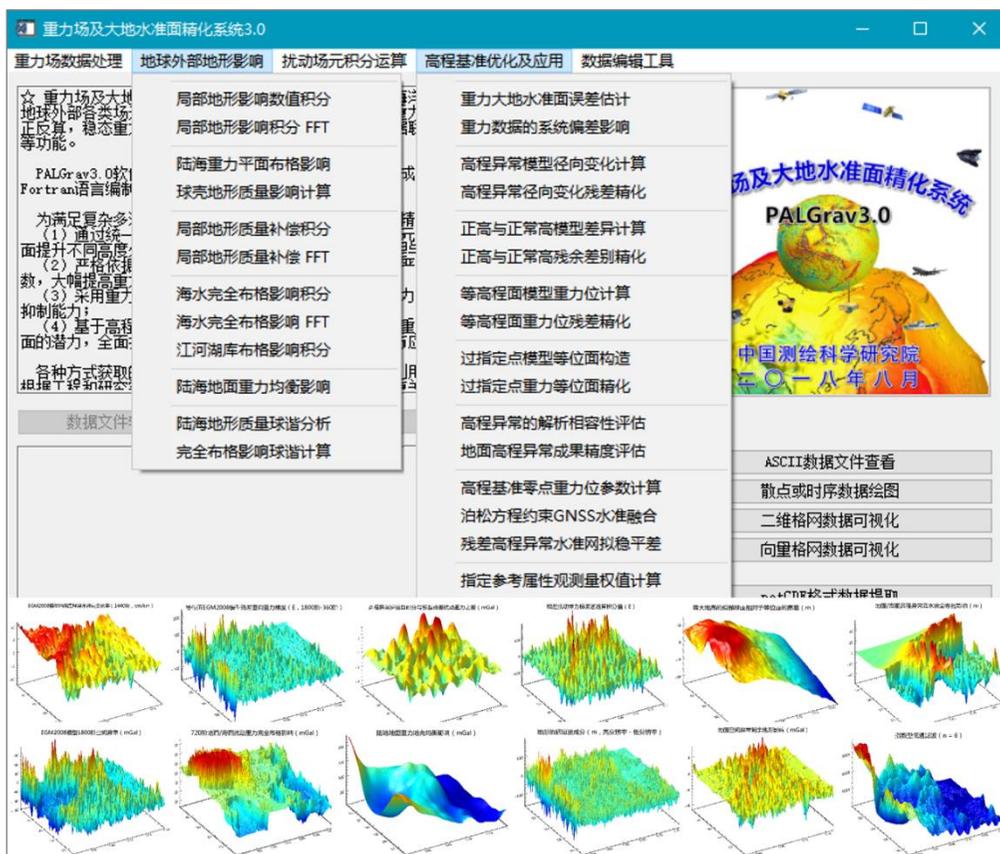
3.12 完全布格影响球谐计算.....	45
3.13 地球外部剩余地形影响.....	46
第四章 扰动场元积分运算	49
4.1 广义 Stokes 数值积分.....	49
4.2 广义 Stokes 积分 FFT.....	51
4.3 广义 Hotine 数值积分	53
4.4 广义 Hotine 积分 FFT.....	55
4.5 广义 V_M 空间异常积分	57
4.6 广义 V_M 空间异常 FFT.....	59
4.7 广义 V_M 扰动重力积分	61
4.8 广义 V_M 扰动重力 FFT.....	63
4.9 高程异常逆远算数值积分.....	64
4.10 高程异常逆远算积分 FFT	66
4.11 垂线偏差逆远算数值积分	68
4.12 垂线偏差逆远算积分 FFT	70
4.13 场元径向梯度数值积分.....	72
4.14 场元径向梯度积分 FFT	73
4.15 场元 Poisson 数值积分	75
4.16 扰动重力梯度的积分运算.....	76
4.17 扰动重力梯度积分逆运算.....	78
第五章 高程基准优化及应用	80
5.1 重力大地水准面误差估计.....	80
5.2 重力数据的系统偏差影响.....	81
5.3 高程异常模型径向变化计算.....	82
5.4 高程异常径向变化残差精化.....	83
5.5 正高与正常高模型差别计算.....	84
5.6 正高与正常高差别区域精化.....	85
5.7 等高程面模型重力位计算.....	86
5.8 等高程面重力位残差精化.....	87
5.9 过指定点模型等位面构造.....	89
5.10 过指定点重力等位面精化.....	91
5.11 高程异常的解析相容性评估	92

5.12 地面高程异常成果精度评估.....	93
5.13 高程基准零点重力位参数计算.....	95
5.14 泊松方程约束 GNSS 水准融合.....	97
5.15 残差高程异常水准网拟稳平差.....	99
5.16 指定参考属性观测量权值计算.....	100
5.17 GNSS 代替水准测量计算器.....	101
5.18 GNSS 代替水准批量点计算.....	102
第六章 数据编辑工具箱.....	103
6.1 点值文件格式标准化.....	103
6.2 标准化格网格值构造.....	104
6.3 点值属性间加权运算.....	105
6.4 两格网格值加权运算.....	105
6.4 系列同规格格网累加.....	105
6.6 两向量格网乘积运算.....	106
6.7 向量格网的两分量分解.....	107
6.8 两格网合并为向量格网.....	107
6.9 向量格网形式相互转换.....	107
6.10 向量格网转为离散点值.....	107
6.11 两组球谐系数模型运算.....	107
6.12 格网内插离散点属性.....	108
6.13 点值简单内插格网化.....	108
6.14 高分点直接平均格网化.....	109
6.15 指定参数克里金格网化.....	109
6.16 加权基函数插值格网化.....	109
6.17 插值法改变格网分辨率.....	110
6.18 按经纬度范围提取数据.....	111
6.19 按属性条件提取点记录.....	112
6.20 点位相同的两文件合并.....	112
6.21 格网陆地海洋数据分离.....	113
6.22 参考面支持的粗差探测.....	113
第七章 典型作业流程与方案.....	114
7.1 不同类型场元多种性质地形影响的计算.....	114

7.2 地面船测航空多源重力场数据融合流程.....	118
7.3 重力大地水准面及高程异常的精化流程.....	121
7.4 全国重力场框架中大地水准面逐级精化.....	123
7.5 坐标框架中大地水准面与水准网的统一.....	125
第八章 主要公式及算法.....	128
8.1 空间任意点正常重力场参数计算.....	128
8.2 重力场位系数模型场元计算公式.....	129
8.3 缔合勒让德函数及其导数算法.....	130
8.4 椭球与球边界面的边值校正公式.....	131
8.5 地球外部扰动场元地形影响算法.....	131
8.6 局部地形补偿与 Helmert 凝聚.....	134
8.7 陆海地形面密度球谐分析与综合.....	135
8.8 广义 Stokes 与 Hotine 积分公式.....	136
8.9 广义 Vening-Meinesz 积分公式.....	136
8.10 扰动重力场元逆运算积分公式.....	138
8.11 场元 Poission 与径向梯度积分.....	139
8.12 扰动重力梯度积分正反算公式.....	140
8.13 高程异常的解析相容性评估算法.....	140
8.14 大地水准面成果的精度评估方法.....	140

第一章 系统性能与有关约定

重力场及大地水准面精化系统 PALGrav3.0, 主要包括地面、海洋及近地空间重力场数据处理, 地球外部各类场元多种性质的地形影响计算, 多源异质重力场数据集成, 各类重力场积分正反算, 稳态重力场与大地水准面精化, 以及区域高程基准优化、评估与应用计算等功能。PALGrav3.0 由 80 余个主模块和 500 多个子模块构成, 这些功能模块主要采用 Intel Fortran 语言编制, 用户界面 (如图) 采用 IDL 语言编制。



各种方式获取的多源重力场数据, 经预处理后, 均可利用 PALGrav3.0 进行处理。用户可根据工程和研究需要, 设计个性化的作业流程, 灵活组织有关功能模块, 完成地面、航空、船测重力及卫星测高, 甚至其他卫星重力数据处理与计算分析工作, 能有效综合复杂多源异质重力场数据, 确定高精度陆海统一的重力场及大地水准面, 精化区域高程基准, 开展重力场及高程基准应用服务计算及分析工作。

1.1 系统主要性能

为满足复杂多源重力场数据深度融合与 1cm 精度水平大地水准面精化的技术要求, PALGrav3.0 系统通过统一地面、海洋及地球外部各类场元多种性质的地形影响算法, 全

面提升不同高度处、多种类型、多源异质重力场数据处理与集成能力；严格依据重力场边值条件构造各种扰动场元积分严密算法，精细处理奇异积分核函数，大幅提高重力场逼近性能与精度水平；采用重力场积分运算代替微分运算，有效提升重力场数据处理的算法稳定性与误差抑制能力；在统一的重力场框架中，设计大地水准面逐级控制方案，优化高程基准，提升高程基准的可靠性、精度水平与应用服务能力。

(1) 采用相同的地形数据和完全相容的方法，统一处理不同位置、各种类型扰动场元、多种性质的地形影响

多源重力场数据集成的前提条件是，采用完全相容的算法和相同的地形数据，统一处理不同位置、不同类型场元、多种性质的地形影响。传统的重力归算将地面重力值通过地形影响处理后归算到大地水准面上，归算对象仅局限于地面重力观测量。

PALGrav3.0 能够统一处理地球外部任意高度、陆地或海洋上各类重力场元多种性质的地形影响。重力场元可以在地面、海洋、航空或卫星高度上，场元类型可以是扰动位、扰动重力、空间异常、高程异常、垂线偏差或重力梯度，地形影响性质可以是局部地形影响、海水完全布格影响、地形 Helmert 凝聚或陆海剩余地形影响。

PALGrav3.0 能确保不同类型场元地形影响之间的解析相容性。系统计算的扰动重力、空间异常、高程异常、垂线偏差或重力梯度等各类场元的地形影响，相互之间严格满足重力场边值问题解的要求和场元积分关系。

例如，高程异常地形影响等于扰动重力地形影响的 Hotine 积分，在实现高程异常和扰动重力地形影响算法时，系统保证了他们之间的 Hotine 积分关系不变；再如，地球外部任意点的空间异常、扰动重力与高程异常之间满足重力测量基本方程，系统能保证这些场元的地形影响之间也满足重力测量基本方程。

为实现陆地、海洋以及地球外部不同高度处地形影响之间的空间相容性，PALGrav3.0 系统采用完全相容或一致的算法，计算陆地、海洋和航空高度处的地形影响，确保了扰动场元地形影响在整个地球外部空间的重力场解析性质，能大大提高多源重力场数据融合的抗差能力、算法性能和精度水平。

例如，地面、航空、海洋的地形影响采用统一的算法公式，能大大提升复杂多源陆海重力场集成能力；再如，系统能有效计算卫星测高垂线偏差的陆地地形影响、海岸带陆地重力的海水完全布格影响，有利于探测与分离近海边界流的影响，提高海岸带陆海重力场融合的精度水平。

(2) 具有功能较为完备的重力场积分算法体系，能实现地球外部任意高度上各种类型场元的正反积分运算与向上向下解析延拓

PALGrav3.0 构建了适用地球外部任意高度、功能较为完备的重力场积分算法体系，能灵活方便地由某一边界面上某一种类型扰动重力场元格网，精确计算地球外部空间其他各种类型的扰动重力场元。

例如，系统能由地球外部某一边界面（等位面）上的空间异常、扰动重力、垂线偏

差、高程异常或重力梯度等扰动场元格网，精密确定地球外部空间任意一点的空间异常、扰动重力、垂线偏差、高程异常与扰动重力梯度值，精密确定地面高程异常（似大地水准面高）和大地水准面高。

PALGrav3.0 充分利用重力场逼近及边值理论，推导扰动重力场元微分运算的积分算法，实现重力场积分运算全面代替微分运算，避免直接微分运算导致的误差放大和算法稳定性降低等问题。

例如，由高程异常计算垂线偏差时，不采用直接微分运算，而是采用高程异常逆运算积分算法；计算各种扰动场元的径向梯度时，以某一边界面上的扰动场元为被积场元，进行积分运算。

系统能实现地球外部任意高度上高程异常、扰动重力、重力异常、垂线偏差与重力梯度的正反积分运算，确定任意高度各类场元的径向梯度，实现多种类型场元的向上向下解析延拓。用户利用这些功能，可有效实现重力场元计算与解析延拓一体化，减少重力场积分运算次数，避免多次运算导致的重力场高频信息损失和精度下降。

(3) 能严格构造重力场元积分条件，实现超高精度的重力场逼近与大地水准面计算。可根据工程和研究需要，灵活构造设计个性化的作业方案

Stokes 边值问题要求边界面是等位面，由于大多数用于重力场及大地水准面精化的重力场积分公式，是基于 Stokes 边值问题导出的，自然也要求边界面是等位面。如广义 Vening-Meinesz 积分、各类场元积分逆运算、径向梯度积分等等算法公式，都是基于 Stokes 边值问题导出，因而要求边界面是等位面。

PALGrav3.0 提供了地球外部重力等位面构造、重力场元积分、地形影响处理、解析延拓等较为完备的重力场运算功能，能够严格构造重力场元积分条件，实现超高精度的重力场数据处理与逼近。

不同来源的地球重力场数据，经预处理后，都可利用 PALGrav3.0 进行统一处理或分析。重力场元计算不再局限在地面、海面或大地水准面上，可以是地球外部任意高度；场元类型不再局限于空间异常、扰动重力，可以是垂线偏差、高程异常、重力梯度等任何实际可能存在的扰动重力场元；还可以是某种类型场元的多尺度分量、地球部分质量生成的重力场元，甚至是虚拟质量生成的重力场元。

用户可根据工程和研究需要，灵活构造设计个性化的技术方案和作业流程，完成重力场及大地水准面精化的分析计算和理论方法的测试研究工作。

(4) 在统一的重力场框架中，逐级控制各级大地水准面，优化与评估区域高程基准，全面提升其可靠性、精度水平与应用服务能力

PALGrav3.0 系统采用相同的重力场数据和完全相容的方法，同时精化大地水准面和地面高程异常，保证了正高系统、正常高系统与重力位数系统之间，及其在重力场外部边值问题中的解析相容性。基于重力大地水准面精度中长波与 GNSS 水准高程异常高精度短波的频域误差性质，优化 GNSS 水准与重力大地水准面融合算法，提高大地水准

面成果的重力场性能和精度水平。

系统通过创建 GNSS 水准与重力大地水准面误差估计算法，实现了大地水准面、区域高程基准成果的精度评估，能有效发挥重力场成果的高精度中长波优势，控制水准路线高程传递的误差累积，精密计算高程异常径向变化率、等高面的重力位差、重力等位面的高差等，大幅提升高程基准成果的可靠性、精度水平与应用服务能力。

通过优化作业流程，系统能在统一的重力场框架中，充分发挥全国重力场高精度中长波优势，逐级控制省级、地市及局部地区重力大地水准面精化，避免大地水准面中长波精度损失与局部变形，消除各级大地水准面的边缘效应和拼接问题，实现任意大小和形状的大地水准面局部更新，有效提升各级大地水准面精化与维持的作业效率，提高重力大地水准面的精度水平，维持高程基准的全国统一性，保证不同时期高程基准成果及应用服务的有效继承与衔接。

(5) 能构造各种性质地形影响的移去恢复算法方案，全面提升重力场数据处理与逼近的精度水平、算法稳定性和抗差及误差抑制能力

传统的层间改正破坏了重力场的调和性质，难以从实际地球重力场中有效分离出地形影响。PALGrav3.0 通过直接计算地面及地球外部各类场元多种性质的地形影响，能保证扣除地形影响后，剩余扰动重力场的调和不变性，从而为利用重力场理论和公式，分析处理地形影响及其移去前后的扰动场元提供理论依据。

类似于参考重力场移去恢复法分离重力场的中长波成分，地形影响移去恢复法的实质是分离地形短波和超短波成分。重力场数据处理前，先移去源重力场元的地形影响，然后进行所需的各种数据处理运算，最后再恢复目标重力场元的地形影响。其中，地形影响可选用局部地形影响、剩余地形影响或地形 Helmert 凝聚。

地形影响移去恢复法能用于归算、延拓、拼接、融合、积分和格网化等重力场数据处理和大地水准面精化计算，可提高重力场数据的抗差能力，抑制地形代表性误差，以及运算过程中的高频信息损失。

在重力场数据处理与大地水准面计算时，为既能处理远区效应又能抑制高频信息损失，可采用“地形影响+参考重力场”组合移去恢复法。

1.2 主要文件格式

(1) 离散点值文件格式

◎点值文件有多个记录组成，每个记录的属性依次为：点号(点名)，经度(度小数)，纬度(度小数)，大地高(米)，属性5，……，属性 n 。如图。

◎属性约定为数值格式，属性数 n 的最大值为40，属性之间用空格隔开。

◎点值文件容许有多行头文件，头文件内容和格式不受限制。

◎Fortran 语言的记录读取语句为

```
read(fileno,*)(record(i),i=1,n) ! record(n)为文件记录数组
```

1	1	102.392927	24.494402	2227.4900	25.8548	22.8415	2210.7385	22.9157
2	2	102.395920	24.508898	2169.5000	19.2278	23.3482	2220.1556	23.1268
3	3	102.392718	24.529614	2012.6300	-2.5982	23.5704	2112.7810	23.1433
4	4	102.396602	24.545253	2121.8000	8.5305	22.2493	2071.2506	22.4506
5	5	102.396873	24.563563	1970.5800	-7.6153	21.1752	2045.8186	20.8999
6	6	102.393754	24.581317	1939.6100	-9.4593	19.2625	1962.1555	19.1874
7	7	102.395223	24.603553	1964.8800	-7.7358	16.3706	1985.6935	16.3132
8	8	102.393104	24.617811	1997.0200	-5.1529	14.5630	1978.1810	14.6096
9	9	102.393520	24.638369	1915.4500	-11.6028	12.4719	1947.9042	12.4048
10	10	102.397107	24.653500	2009.9700	-0.2375	10.8712	1974.4709	10.9325
11	11	102.396963	24.675343	1945.3300	-7.3841	9.6422	1981.4985	9.5877
12	12	102.395819	24.692939	1980.3300	-3.7480	9.0670	1966.7684	9.0868
13	13	102.395371	24.708913	2029.0300	2.5687	8.8403	1957.6558	8.9453
14	14	102.395350	24.727566	1902.2900	-12.2454	9.0661	1903.0214	9.0650
15	15	102.396700	24.745993	1869.7500	-15.8731	8.9810	1891.7180	8.9468
16	16	102.395841	24.764933	2083.6400	7.3406	8.5926	2073.5757	8.6092
17	17	102.393966	24.781787	2268.9800	26.9402	8.1585	2196.5105	8.2855
18	18	102.394006	24.801727	1938.9900	-7.5474	7.5344	2020.5270	7.3956
19	19	102.398417	24.817405	1904.2900	-10.6788	4.8800	1984.9395	4.7832
20	20	102.396456	24.874484	1880.3900	-11.4857	-2.6543	1930.2448	-2.6614
21	21	102.398266	24.891162	1969.3900	-2.0935	-5.2254	1963.8178	-5.2272
22	22	102.393680	24.908450	1916.1700	-7.3287	-6.7659	1915.9157	-6.7661
23	23	102.398757	24.926186	1896.3400	-10.4453	-8.3279	1904.3094	-8.3204
24	24	102.393964	24.943174	1889.6500	-12.5493	-8.7808	1917.5348	-8.7505
25	25	102.399133	24.963027	2246.2000	19.3802	-7.6022	2108.9308	-7.7343

(2) 格网值文件格式

⊙格值文件以格网形式存放，文件的开头有一行头文件。头文件的格式为：最小、最大经度，最小、最大纬度，格网的经度间隔、纬度间隔。单位都是度小数，如图。

1	104.000000	114.000000	25.000000	34.000000	0.04166667	0.04166667
2	1880.6233	1872.6612	1910.7203	1931.7653	1992.7665	1897.7199
3	1579.5158	1478.5360	1457.5736	1610.5877	1703.5435	1392.4407
4	1127.0862	1141.1257	1156.1979	1181.3065	1335.4466	1400.5901
5	530.3264	562.3283	484.3702	478.4546	553.5518	717.6379
6	642.5849	575.7052	629.8202	654.9330	694.0609	807.1985
7	726.9670	439.0212	598.0862	604.1542	596.2404	510.3528
8	820.4032	667.4105	588.4110	585.4184	661.4350	557.4490
9	494.4559	433.5850	353.7288	430.9312	723.1754	821.3956
10	128.9223	219.0560	175.1799	152.2779	137.3618	113.4669
11	456.2471	331.3871	360.5383	451.7036	575.8641	698.9905
12	151.7805	150.9271	208.1027	343.2925	296.4793	343.6893
13	220.4542	560.7228	752.9326	548.0788	375.1834	295.2821
14	267.7073	300.9139	596.1386	576.3569	569.5556	559.7308
15	466.1608	254.1723	224.2118	236.2868	250.4018	331.5582
16	509.1123	504.2678	607.4595	873.6999	972.9491	777.1609
17	129.8216	112.8806	145.9967	223.1369	239.2738	219.4003
18	1868.6248	1859.6737	1903.7419	2051.7911	2088.7992	1910.7605
19	1475.5124	1382.5200	1476.5441	1626.5437	1580.4903	1318.3843
20	1155.2158	1193.2735	1209.3569	1255.4640	1365.5851	1386.7009
21	603.2370	489.2430	499.3152	525.4287	630.5491	820.6481
22	436.4368	493.5515	611.6602	584.7656	649.9001	678.0571
23	810.9687	592.0663	740.1506	699.2175	528.2842	489.3798
24	846.3914	704.4151	612.4340	629.4463	664.4447	527.4279
25	535.4974	512.6069	399.7202	349.8989	588.1524	826.4035

⊙格网的格值按行纬度、列经度递增方式依次存放，直到放完全部数据。格值之间用空格隔开。

⊙格值文件的整个格网数据 Fortran 读取程序为：

```

open(unit=fileno,file=filename,status="old")
read(fileno,*)(hd(i),i=1,6)      ! hd(6)为头文件
nlon=nint((hd(2)-hd(1))/hd(5))  ! nlon 为格网列数
nlat=nint((hd(4)-hd(3))/hd(6))  ! nlat 为格网行数
do i=1,nlat
  read(fileno,*)(gr(i,j),j=1,nlon) ! gr(nlat,nlon)为存放格网数据的二维数组
enddo

```

⊙格值代表格网平均值。数值积分运算时，取格网中心点位置作为平均被积场元的位置，计算面元的积分距离。

(3) 向量格值文件格式

⊙向量格值文件是在标准格值文件的基础上，增加一个无头文件的、格网范围和分辨率完全相同的格网数据。

⊙系统中的垂线偏差向量、水平梯度向量等格网，采用向量格值文件形式存放。

(4) 地球重力场位系数模型文件格式

①头文件占住一行，由两个属性数据构成，即地心引力常数 $GM(\times 10^{14}m^3/s^2)$ 、椭球长半轴 $a(m)$ 。

⊙位系数值与 GM 、 a 对应，不同的位系数模型， GM 、 a 不一定相同。位系数值与地球动力学形状因子 J_2 和地球平均自转角速度 ω 无关。

⊙PALGrav3.0 在利用位系数计算模型重力场元时，将 GM 、 a 统一到与系统默认正常椭球中的 GM 、 a 一致。

②位系数数据有若干个记录组成，每个记录的属性格式如下：

⊙阶 n ，次 m ，球谐系数 C_{nm} ， S_{nm} （ C_{nm} 中误差， S_{nm} 中误差）。

⊙每个记录的属性之间用空格隔开。

PALGrav3.0 不要求位系数阶次按顺序排列，容许阶次不充分。对于非充分阶次的位系数文件，系统自动将非充分阶次的位系数值置零。

1.3 系统参数设置

(1) 设置或重置用于表达扰动地球重力场的正常地球椭球参数。

⊙正常地球椭球是扰动地球重力场参数的参考物理基准。选择不同的正常地球椭球，扰动重力场参数对应不同的表示值。

⊙正常地球椭球由 4 个参数唯一充分表达：地心引力常数 $GM(\times 10^{14}m^3/s^2)$ 、椭球长半轴 $a(m)$ 、地球动力学形状因子 $J_2(\times 10^{-3})$ 和地球平均自转角速度 $\omega(\times 10^{-5}/s)$ 。

⊙按重力场边值问题确定或精化的重力大地水准面，是重力位等于正常椭球面正常重力位 U_0 的重力等位面。

(2) 设置全球大地位 W_0 。

⊙全球大地位可理解为全球高程基准零点重力位，即全面高程基准面（全球零高程面）为重力位等于全球大地位的重力等位面。

⊙全球大地位与正常椭球面正常重力位之差 $\delta W = W_0 - U_0$ ，等于其与大地水准面重力位 W_G 之差 $\delta W = W_0 - W_G$ ，为常数。

⊙对重力大地水准面高，增加位差 δW 改正，可将其转换到由全球大地位 W_0 表达的全球高程基准中。

(3) 设置或重置用户作业范围和工作目录。默认工作目录为 C:\PALGrav3.0\user。



(4) 指定或重新指定作为参考全球重力场的地球重力场位系数模型文件。

(5) 设置或重置奇异积分核函数的细化参数 n 。

⊙对于大部分重力场积分公式，如地形影响积分、Stokes 积分等，当流动点与计算点重合时，积分奇异。

⊙当流动点与计算点的空间距离（一般大于球面距离）小于球面流动格网边长的 1/4 时，系统自动按奇异积分处理。

⊙当计算点格网与流动点格网规格相同时，系统在奇异积分点上，将球面流动格网分辨率提高 $2n$ ($1 \leq n \leq 7$) 倍，从而避开奇异积分，采用常规积分方法，计算源格网大小的奇异积分值。

⊙当计算点与流动点格网规格不同，或计算点不规则分布时，若经核函数细化处理后，还存在奇异积分时，系统在核函数细化处理的基础上，进一步调用奇异积分解析逼近算法，计算格网细化后的奇异积分值。

⊙各种重力场积分的奇异积分解析逼近公式，见第八章 8.5~8.12 节。

(6) 点击“参数设置/重置”按钮后，当前的设置或重置参数会立即生效。

在运行系统的功能模块前，请注意检查参数设置是否合适，若不合适，可在不退出主界面的情况下及时调整，再运行功能模块。

1.4 系统有关约定

(1) 模型、实测、剩余和残差扰动场元

⊙扰动重力场是实际地球重力场与其正常重力场之间的差异。扰动重力场通常用扰动位（高程异常/大地水准面高）、扰动重力、空间异常、垂线偏差或扰动重力梯度等参数表示。相对于实际地球重力场，这些扰动重力场参数都是小量。

⊙为方便描述，PALGrav3.0 将这些扰动重力场参数也称为扰动重力场元、重力场元、扰动场元或场元。

⊙将由参考重力场（如地球重力场位系数模型）计算的扰动场元统称为模型扰动场元，如模型高程异常、模型扰动重力等。

⊙将由直接观测量计算，且未移去地形影响和模型扰动场元的点值或格值，统称为

实测扰动场元，如实测扰动重力、实测垂线偏差等。

⊙将移去地形影响后的实测扰动场元，称为剩余扰动场元，如剩余空间异常、剩余垂线偏差。

⊙将移去模型扰动场元后的实测（或剩余）扰动场元，称为残差扰动场元，如残差高程异常、残差空间异常等。

(2) 扰动场元格式与地球外部约定

⊙扰动场元单位：高程异常/大地水准面高（m，米），扰动重力、空间异常（mGal，毫伽， $1\text{mGal} = 1 \times 10^{-5} \text{m/s}^2$ ），垂线偏差（s/as，"/秒/角秒），重力梯度（E，厄缶， $1\text{E} = 1 \times 10^{-9} \text{/s}^2$ ），扰动位/重力位（ m^2/s^2 ）

⊙离散场元点值和场元网格值的有效数字为 4。

⊙为直观起见，系统也将垂线偏差子午圈方向分量称为垂线偏差南向分量，将其卯酉圈方向分量称为其西向分量。

⊙将水平重力梯度在当地水平坐标系中的x方向分量，称为水平重力梯度北向分量，将其y方向分量称为其东向分量。

⊙地球外部约定为地面、海洋及地球重力场作用范围内的地球外部空间。在未直接处理地形质量的情况下，地球外部也代表大地水准面及其外部空间。

(3) 重力场积分半径与数值积分约定

⊙PALGrav3.0 的各类重力场积分半径在边界面上（即被积场元所在面）上定义，约定为流动积分点（流动积分面元网格中心点）到沿椭球法线方向投影到边界面上计算点之间的直线距离（严格意义上不等于球面距离）。

⊙积分半径大小用于约束边界面上参与积分计算的流动面元范围，而实际数值积分计算时，积分距离用流动点到计算点的空间距离精确表示。

⊙流动面元面积计算：以格网中心点地心距为半径，按球面实际面积计算。

(4) 离散扰动场元网格化约定

⊙离散场元网格化是一种几何插值运算，网格化过程难以保证重力场解析不变性，为此，PALGrav3.0 要求：类似于网格化的非解析数据处理，应在重力等位面上进行。

⊙离散重力场网格化通常与地形影响移去恢复法、重力场解析延拓相结合。

(5) 传统重力归算概念的淡化处理

⊙为满足地球外部各种类型场元多种性质地形影响精密处理的需要，PALGrav3.0 在全面继承传统重力场数据处理方法的基础上，依据重力场逼近理论，对某些传统概念进行拓展，严格区分不同位置处、不同类型场元、不同性质的地形影响。

⊙传统的重力归算与地形改正对象为地面重力值，这些传统概念已不适应全面处理地球外部各类场元多种性质地形影响的要求。PALGrav3.0 全面淡化重力归算、地形改正、空间改正、层间改正和均衡改正等传统概念。

⊙通常将地形质量对重力（空间异常/扰动重力）的影响称为直接地形影响，对扰动

位（大地水准面高/高程异常）的影响称为间接地形影响。这些概念同样也满足不了全面处理地球外部各类场元多种性质地形影响的需要。

⊙传统的“地形改正”，在 PALGrav3.0 中相当于移去地面扰动重力的局部地形影响，传统的空间改正相当于将地面空间异常解析延拓到大地水准面上。

（6）似大地水准面概念的淡化处理

似大地水准面可以看成是大地高等于地面高程异常的曲面，但地面只能用一定分辨率的数字高程模型表示，而实际测点/计算点一般不会正好落在某一空间分辨率的地面数字高程模型面上，计算点的高程异常一般不等于地面高程异常。这种差异在 1cm 精度水平上不能忽略。

PALGrav3.0 淡化似大地水准面概念，严格区分不同高度上的高程异常，并提供近地空间高程异常随高度变化的改正功能。

1.5 重要概念解析

（1）地球外部扰动场元的地形影响

⊙PALGrav3.0 将地形质量生成的地球外部引力场称为地形引力场，将地形引力场中的各种重力场元统称为该场元的地形影响。

⊙场元的类型不同，对应不同类型场元的地形影响。如空间异常、扰动重力、高程异常或垂线偏差的地形影响。

⊙场元的空间位置不同，对应不同空间点该场元的地形影响。如地面空间异常地形影响、海面垂线偏差地形影响或航空扰动重力地形影响等。

⊙地形或地壳按不同方式生成地形引力场，产生不同性质的地形影响。如局部地形影响、球壳布格影响、海水布格影响、地形 Helmert 凝聚或地壳均衡影响等。

（2）完全布格影响与剩余地形影响

⊙陆地完全布格影响：地面至大地水准面间的地形质量对地面、海洋及地球外部空间扰动场元的影响。即陆地完全布格影响定义为：地形质量按万有引力定律直接生成的地球外部引力场。

⊙球近似下，近地空间的陆地完全布格影响 = 局部地形影响 + 球壳布格影响。

⊙海水完全布格影响：将海水密度变为陆地地形密度后，其质量变化对地面、海洋及地球外部空间扰动场元的影响（参见 3.7、3.8）。

⊙陆海地形面密度：单位面积的陆地地形质量，称为陆地地形面密度；单位面积的海水补偿质量，称为海洋地形面密度。地形面密度单位为 kg/m^2 。

⊙利用球谐分析方法，可将全球陆地地形面密度、海洋地形面密度或陆海地形面密度用规格化球谐系数表示（参见 3.11）。

⊙已知地形面密度球谐系数，可计算地面、海洋及地球外部空间任意类型扰动场元的陆地、海水或陆海完全布格影响或剩余地形影响（参见 3.12）。

⊙剩余地形影响是高分辨率地形质量（海水质量变化）与低分辨率地形质量（海水质量变化）之差，对地面、海洋及地球外部空间扰动场元的影响。

(3) 扰动场元地形影响移去恢复法

⊙移去—“重力场解析关系式”—恢复法在各种形式的重力场数据处理、重力场逼近和大地水准面精化计算中有着广泛的应用。

⊙当移去量和恢复量为扰动重力场元的地形影响时，称为“地形影响移去恢复法”。当移去量和恢复量为模型重力场元时，称为“参考重力场移去恢复法”。

⊙移去恢复法应满足的条件：移去量与恢复量对应的引力场是调和的，且移去量与恢复量之间的关系严格满足“重力场解析关系式”。

⊙重力场解析关系式：各种重力场积分与解析延拓运算、球谐与局部谐分析等。

(4) 地球重力场外部边值问题解法

大地测量直接观测量大都以铅垂线和水准面为参考，为方便起见，PALGrav3.0 根据边界面的内法线是否与铅垂线重合，即界面是否为重力等位面，将所有重力场外部边值问题分成 Stokes 问题和 Molodensky 问题两大类。

①Stokes 问题。将界面是重力等位面、边界值为扰动位与其坐标偏导数任意线性组合的边值问题统称为 Stokes 问题。Stokes 问题的界面内法线与铅垂线重合。

②Molodensky 问题。将界面不是重力等位面、边界值为扰动位与其坐标偏导数任意线性组合的边值问题统称为 Molodensky 问题。Molodensky 问题的界面内法线与铅垂线不重合。

解 Stokes 问题需要具备如下两个条件：

⊙界面外部没有质量。若界面外部有质量，需要事先压缩到界面内部，压缩前后界面外部的扰动位保持不变。

⊙界面 S 的内法线与当地铅垂线重合。界面 S 的重力位为常数，即界面 S 是重力等位面。

当界面不是重力等位面时，可以采用如下 3 种方式中的任何某一种方式，来求解 Molodensky 边值问题：

⊙将界面重力场元如空间异常或垂线偏差等解析延拓到与界面接近的重力等位面上，此时界面转换为重力等位面，从而将边值问题变成 Stokes 问题，然后解 Stokes 问题。

⊙对界面重力场元施加由界面内法线方向到铅垂线方向的校正，从而将边值问题变成 Stokes 问题，然后解 Stokes 问题。

⊙在非重力等位面上直接解 Molodensky 边值问题（由于解算精度普遍不高，PALGrav3.0 不推荐使用）。

鉴于绝大部分重力场积分公式由 Stokes 边值问题解导出，因此，解 Stokes 边值问题的条件同样也是使用这些积分公式的条件，如 Hotine 积分、Vening-Meinesz 积分、场元

径向梯度积分等公式。

PALGrav3.0 系统强烈建议，重力场边值问题一律采用 Stokes 边值问题解法，而 Molodensky 边值问题理论主要用于重力场数据向重力等位面的归算处理，以及分析非等位面数据处理过程中重力场信息的近似程度等。

(5) 大地水准面的唯一性说明

利用位理论外部边值问题解重力场边值问题的必要条件是边界外部没有质量，以保证边界外部扰动位是调和函数。

Stokes 边值问题以大地水准面这个重力等面为边界，要求大地水准面外部没有质量，即理论上要求将地面至大地水准面间的地形质量按某种方法压缩到大地水准面或其内部。但无论采用何种地形压缩方式，外部边值问题解法都要求，地形压缩前后地面及其外部扰动位保持不变。

可见，Stokes 边值问题解法有 3 项基本要求（或称基本条件）：①边界是重力等位面；②边界外部没有质量；③边界及其外部扰动位保持不变。

分析重力大地水准面精化时常用的 Stokes-Helmert 方案是如何保证 Stokes 边值问题解法的基本要求。

第 1 步，将地面或地球外部空间异常解析延拓到大地水准面（重力等位面）。

第 2 步，将地形按 Helmert 凝聚法压缩至大地水准面，等效于移去空间异常的地形 Helmert 凝聚。此时地面及其外部扰动位被改变，重力场空间变为 Helmert 空间。

第 3 步，在 Helmert 空间中对空间异常进行 Stokes 积分，得到的大地水准面属于 Helmert 空间，称为 Helmert 大地水准面。

第 4 步，恢复扰动位（大地水准面）的地形 Helmert 凝聚（常见方式有附加改正、间接影响改正等），将大地水准面由 Helmert 空间恢复到实际重力场空间。

Stokes 边值问题解要求，第 2 步中空间异常的地形 Helmert 凝聚和第 4 步中扰动位的地形 Helmert 凝聚，满足 Stokes 积分，以保证扰动位最终能恢复到实际重力场空间中，达到满足“地面及其外部扰动位保持不变”要求。

存在一种 Stokes 边值问题解法（Stokes 边值问题的一种解析延拓解法，简称 Stokes 解析延拓法），解算过程中始终保持地面及其外部扰动位（固定）不变。这种解法只需两个步骤：第 1 步将地面或地球外部空间异常解析延拓到大地水准面；第 2 步直接进行 Stokes 积分，得到实际重力场空间中的大地水准面。

Stokes 解析延拓法，等价于在将地形质量移到大地水准面及其内部前后，严格保证了地面及其外部扰动位固定不变，其关键之处是求解过程无需知道地形质量如何移动，从而避开地形密度假设。

可见，“Stokes 理论需要地形密度假设”，是相应于 Stokes 边值问题某种解法而言，而不是 Stokes 边值问题的必然要求。

位理论外部边值问题保证，地面外部无质量且地面及其外部扰动位处处相等的大地水准面，是唯一的。因此，两种解法确定的大地水准面，必是同一个物理量。这个结论可

通过对比两种方法计算某区域大地水准面，直接验证。

重力场模型移去恢复法主要用于分离重力场中长波成分，技术上要求移去的模型空间异常与恢复的模型大地水准面高，满足 Stokes 积分。类似地，地形 Helmert 凝聚移去恢复法可分离重力场超高频成分，以提高大地水准面超短波性能。可以这样认为，地形 Helmert 凝聚移去恢复法是分离大地水准面超短波成分的一种技术策略，而不是 Stokes 边值问题解法的必然要求。

实际上，用于分离重力场超短波成分的地形影响，可以是地形 Helmert 凝聚，也可以是局部地形影响、剩余地形影响等。只要移去量的地形影响和恢复量的地形影响满足 Stokes 积分，就能保证大地水准面的唯一性。

大地水准面精化过程中移去恢复法的通用流程可表示为：重力场模型移去恢复法+Stokes 解析延拓解法+地形影响移去恢复法。

从技术流程上看，Stokes-Helmert 解法是 Stokes 解析延拓解法与地形 Helmert 凝聚移去恢复法的直接组合。

扰动位的球谐级数展开是 Stokes 积分式在频域内的等价表达。因此，只要采用的正常椭球一致，则由地球重力场位系数模型计算的大地水准面，就是 Stokes 边值问题解的大地水准面。

这表明，由卫星重力场确定、地球重力场模型计算与局部区域精化的大地水准面，都是同一个物理量。

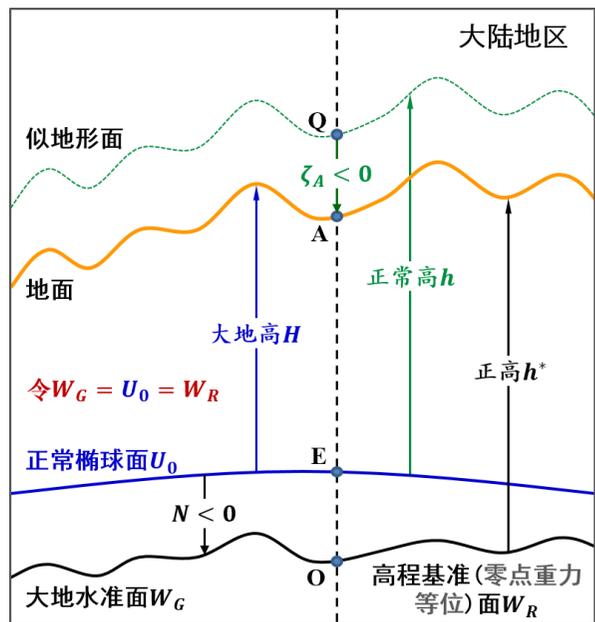
总之，大地水准面是满足“地形质量压缩到大地水准面及其内部前后，地面及其外部扰动位固定不变”条件下的 Stokes 边值问题唯一解。给定椭球面正常重力位，大地水准面就能唯一确定。

(6) 高程系统与重力场的关系

设地面点 A 的重力位为 W_A ，Q 点与 A 点经纬度相同，其正常重力位 U_Q 等于 W_A ，则 Q 位于 A 的似地形面上，QA 为 A 点的高程异常 ζ_A (箭头向下表示 $\zeta_A < 0$)，如图 1 (大陆高海拔地区，地面高程异常 $\zeta < 0$ ，似地形面在地面上方)。

若大地水准面是重力场边值问题解，则大地水准面重力位 W_G 等于正常椭球面的正常重力位 U_0 ，即 $W_G = U_0$ 。

令高程基准零点重力位 W_R 、大地水准面重力位 $W_G (= U_0)$ 正常椭球面正常重力位) 和全球大地位 W_0 (即高斯大地水准面的重力位，可理解为全球高程基准零点重力位) 完全相等，即：



$$W_0 = W_G = U_0 = W_R \quad (1)$$

此时，大地水准面是重力位等于椭球面正常位的封闭曲面，高程基准位差等于零，即 $\delta W_R = W_0 - W_R = 0$ 。高程基准零点重力位 W_R 与地面点 A 的重力位 W_A 之差，称为 A 点的重力位数 $c_A = W_R - W_A = W_0 - W_A$ 。

正高在地球重力场空间中定义，它是地面点 A 的重力位数 c_A 与地面点 A 到高程基准零点重力等位面 O 之间平均重力 \bar{g}_A 的比值：

$$h_A^* = \frac{c_A}{\bar{g}_A} = \frac{W_R - W_A}{\bar{g}_A} = \frac{W_0 - W_A}{\bar{g}_A} = \frac{1}{\bar{g}_A} \int_0^A g dn \quad (2)$$

式中： dn 为地面点 A 到高程基准零点重力等位面 O 之间的线元， g 为线元处的重力。

正常高在正常重力场空间中定义，它是地面点 A 处似地形面 Q 的正常重力位数（ $= U_0 - U_Q$ ）与似地形面 Q 到正常椭球面 E 之间平均正常重力 $\bar{\gamma}_Q$ 的比值：

$$h_A = \frac{U_0 - U_Q}{\bar{\gamma}_Q} = \frac{1}{\bar{\gamma}_Q} \int_E^Q \gamma dN \quad (3)$$

式中： dN 为似地形面 Q 到正常椭球面 E 之间的线元， γ 为线元处的正常重力。

Molodensky 条件假设 A 点处似地形面 Q 的正常重力位数等于 A 点的重力位数，即 $U_0 - U_Q = c_A = W_0 - W_A$ ，将其代入（3）式，就是 Molodensky 正常高：

$$h_A = \frac{U_0 - U_Q}{\bar{\gamma}_Q} = \frac{W_0 - W_A}{\bar{\gamma}_Q} = \frac{1}{\bar{\gamma}_Q} \int_0^A g dn \quad (4)$$

式（4）即为我国高程系统采用的正常高定义式。

（7）大地水准面、全球大地位与高程基准

①大地水准面重力位 W_G

按重力场边值问题，由重力数据确定或精化的重力大地水准面，是重力等位面，其重力位 W_G 等于正常椭球面的正常重力位 U_0 。

例如，PALGrav3.0 计算的模型全球重力大地水准面，或重力场积分方法精化的区域重力大地水准面，其重力位值都应严格等于正常椭球面（由系统参数设置/重置）的正常重力位。

②全球大地位 W_0

⊙全球大地位 W_0 约定为全球大地水准面的重力位。

⊙目前，大地水准面定义依然采用高斯定义（约定），即：大地水准面为封闭的重力等位面，该封闭曲面与全球平均海面最佳拟合。

⊙全球大地位 W_0 依据大地水准面的高斯定义，因此，可通过重力场与海平面观测数据综合确定。

⊙用 W_0 表示全球高程基准，就是将全球大地水准面作为全球零高程面，即全面零高程面的重力位等于全球大地位 W_0 。

⊙大地水准面的高斯定义实际上是一种约定。同样，全球大地位 W_0 值也是一种约定。

⊙既然大地水准面定义和全球大地位都只是一种人为约定，因此，讨论或研究大地水准面高斯定义的严密性和 W_0 的误差，一般没有实用意义。

③高程基准零点重力位

⊙高程基准可用其零点重力位唯一表示，精化高程基准面，就是精化过高程基准零点的重力等位面（一般用其大地高数字模型表示）。

⊙区域高程基准的零高程面是重力位等于零点重力位 W_R 的等位面，即过高程基准零点的大地水准面。

⊙全球高程基准的零高程面是重力位等于全球大地位 W_0 的重力等位面，即按高斯定义的全球大地水准面。

④区域高程基准零点（水准原点）及其重力位 W_R 客观存在，与全球大地位 W_0 和正常椭球参数的选择均无关， W_R 可持续精化。

PALGrav3.0 推荐用区域高程基准零点重力位 W_R 值表达区域高程基准。

⑤零正（常）高面

⊙按似地形面定义，正常椭球面是大地水准面的似地形面，大地水准面上的高程异常等于大地水准面高（如图1）。

⊙无论是全球高程基准，还是区域高程基准，零正常高面与零正高面都处处重合，统一于重力位等于高程基准零点重力位的重力等位面。

⊙零正（常）高面是重力等位面，是过高程基准零点的大地水准面。

⊙在全球任意地区，对于正高或正常高为零的空间点，其重力位恒等于高程基准零点的重力位。

高程基准应用时，确定/精化大地水准面，就是确定/精化高程基准零点重力位等位面的几何形状，即零点重力等位面的大地高数字模型。

⑤关于似大地水准面的问题

大地水准面(或高程基准零点重力等位面)，能通过其重力位值唯一确定或持续精化，将其作为高程基准面，符合大地测量基准的唯一性要求。

但是，若将似大地水准面视为正常高的起算（基准）面，在理论上是不严密的。这是因为：

⊙零正常高面是大地水准面（重力位等于高程基准零点重力位的等位面），并不是所谓的似大地水准面。

⊙经纬度相同、高度不等的两个点，高程异常不相等，因此，若认为正常高由似大地水准面起算，在垂直方向就存在两个不同的起算点。

⊙似大地水准面可看成是大地高等于地面高程异常的曲面，但地面永远无法用格网数字模型唯一表达，因此，描述似大地水准面存在不确定性。

在厘米级精度水平上，似大地水准面需要用地面高程异常与代表高程异常所在位置的地面高程数字模型来共同表达，两者不可或缺。

通常情况下，实际测点不会正好落在似大地水准面精化（或确定）时所选择的特定地面高程数字模型面上，在厘米级高程基准应用中，需要对似大地水准面成果，增加一项高程异常梯度（或扰动重力）改正，计算测点的高程异常 ζ' ：

$$\zeta' = \zeta + \int_h^{h'} \frac{\partial \zeta}{\partial h} dh = \zeta - \int_h^{h'} \frac{\delta g}{\gamma} dh \quad (5)$$

式中： h' 为测点高程， ζ 、 h 为投影到地面数字高程模型面上对应点的高程异常和高程。高程异常径向变化计算模块 5.3、5.4，可用于此项改正。

(8) 高程系统之间的严密解析关系

Stokes 边值问题解是大地水准面及其外部整个地球空间的扰动位，即 Stokes 边值问题同时确定了大地水准面和大地水准面外部空间的高程异常（广义 Stokes 公式）。可见，地面高程异常也是 Stokes 边值问题解。特别地，Stoke 边值问题解约束了地面高程异常 ζ 与大地水准面高 N 之间的严密解析关系：

$$\zeta = N + \Delta\zeta = N + \int_0^{h^*} \frac{\partial \zeta}{\partial h} dh = N - \int_0^{h^*} \frac{\delta g}{\gamma} dh \quad (6)$$

式中： dh 为地面到大地水准面之间的线元， δg 、 γ 分别为线元处的扰动重力（解析扰动重力）和正常重力。

式（6）中的 $\Delta\zeta$ 为高程异常与大地水准面高之差，也即正高与正常高之差。正高与正常高差别计算模块 5.5、5.6，可用于此项计算。

Stokes 边值问题解还指出，大地水准面上的高程异常 ζ_0 即为大地水准面高 N 。这是第（7）节中“零正常高面与零正高面处处重合”的地球重力场理论依据。

依据 Stokes 边值问题解基本条件，地面到大地水准面之间的重力，应等价于地面及其外部重力解析延拓到该点处的重力（简称解析重力 g^* ），而不是被地形质量包围的实际重力 g 。与 Stokes 边值问题解具有严密解析关系，是解析重力 g^* 。Stokes 边值问题解条件还要求，在地面及其外部，重力与解析重力处处相等。

在困难山区，通过联测地面点的重力，或利用局部重力场逼近方式精化积分线元上扰动重力梯度，可有效提高（5）式中 $\Delta\zeta = \zeta - N$ 的确定精度。

将正高定义式（2）中的平均重力和积分线元重力用解析重力替换，将 Molodensky 正常高定义式（4）中积分线元重力用解析重力替换，就得到满足 Stokes 边值问题解两项基本要求（上述“解析相容”的含义）的严密正（常）高定义：

$$h_A^* = \frac{1}{g_A^*} \int_0^A g^* dn, \quad h_A = \frac{1}{\gamma_0} \int_0^A g^* dn \quad (7)$$

零正高面与零正常高面重合，都是大地水准面。显然，有也仅有解析重力 g^* ，才能保证正高、正常高、高程异常、大地水准面及其相互关系，在 Stokes 边值问题中解析相容。PALGrav3.0 系统将这种类型的严密正高称为解析正高。

第二章 重力场数据处理

重力场数据处理主要用于地面及地球外部空间离散点扰动重力、正常重力场与模型重力场计算，椭球面/球面边值问题校正，任意形状地面及地球外部边界面 Molodensky 边值问题校正，扰动重力场元正常椭球变换，离散扰动场元解析延拓，格网格值的水平梯度向量估计与低通滤波，以及大地测量数据的统计信息提取等。



2.1 扰动重力场元点值计算

功能:采用严密的球谐级数公式,计算正常重力场参数值,进而由测点的重力(mGal)或重力梯度(E)观测值,计算其空间(重力)异常(mGal)、扰动重力(mGal)或(垂直)扰动重力梯度(E)值。

输入:地面或地球外部空间离散测点观测值文件。

参数设置:如图 1。

(1) 输入离散点观测记录在输入文件中的起始行号 n 。即 $1 \sim n - 1$ 行是输入文件的头文件。

(2) 输入高度(m)属性在记录中的序号。这里的高度是正高、正常高或大地高。当高度是正(常)高时,程序计算测点的空间异常值;当高度是大地高时,程序计算测点的扰动重力或扰动重力梯度值。

(3) 输入观测值属性在记录中的列序号。

输出：如图 2。

测点扰动重力场计算结果点值文件。测点空间异常、扰动重力或扰动重力梯度计算结果存放于文件记录的最后一列，保留 4 位有效数字。



说明：

- (1) 正常重力场采用“系统设置/重置”中的正常椭球参数。
- (2) 地面及地球外部垂线偏差的正常重力场参数值恒为零。参见第八章式 (1.6)、(1.7) 式。
- (3) 地面及地球外部水平重力梯度的正常重力场参数值恒为零。参见第八章式 (1.10)、(1.11) 式。

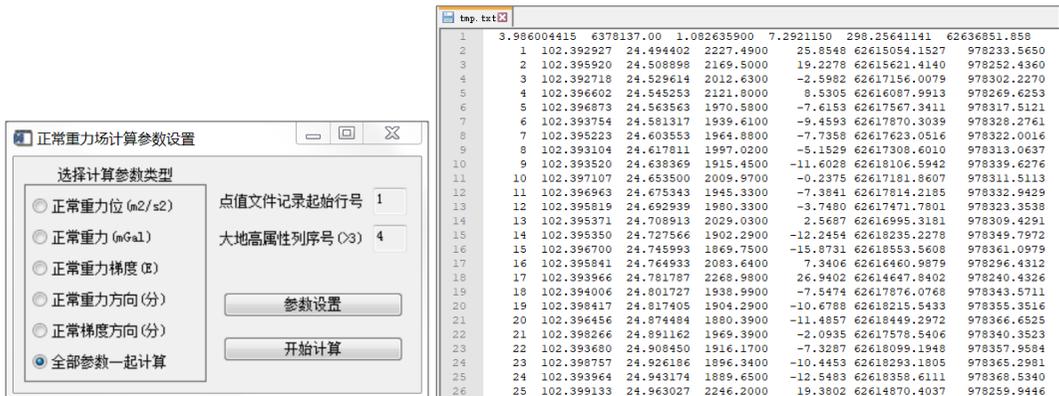
2.2 正常重力场元点值计算

功能：采用严密的球谐级数公式，计算地球空间点的正常重力位 (m^2/s^2)、正常重力 (mGal)、正常重力梯度值 (E)、正常重力线方向 (′, 用其相对于地心的北偏角表示) 或正常重力梯度方向 (′, 用其相对于地心的北偏角表示)。

输入：地面或地球外部空间计算点文件。

参数设置：如图 1。

- (1) 选择计算的正常重力场参数类型。
- (2) 输入计算点记录起始行号和大地高属性所在列序号。



输出：正常重力场参数计算结果点值文件，如图 2。

(1) 头文件为正常椭球参数，分别是地心引力常数 $GM(\times 10^{14}m^3/s^2)$ 、椭球长半轴 $a(m)$ 、地球动力学形状因子 $J_2(\times 10^{-3})$ 、地球平均自转角速度 $\omega(\times 10^{-5}/s)$ 、椭球扁率倒数 f 和正常椭球面正常重力位 $U_0(m^2/s^2)$ 。

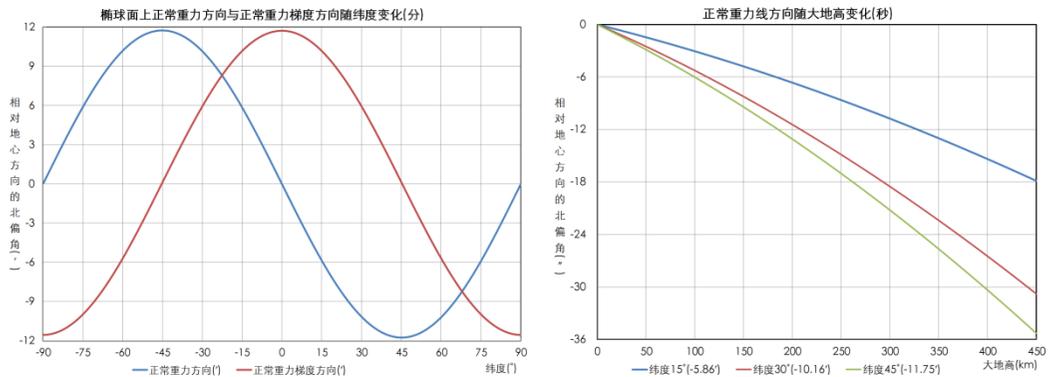
(2) 文件记录。在源计算点值文件记录的基础上增加一列或若干列正常重力场参数计算值，保留 4 位有效数字。

说明：

(1) 正常重力场采用“系统设置/重置”中的正常椭球参数。

(2) 正常重力场参数计算公式如第八章的 (1.1) ~ (1.18) 式。

(3) 在正常椭球面上，正常重力线方向相对地心向北偏转的角度，随纬度变化而变化，在纬度 $\pm 45^\circ$ 处达到极值，在赤道和两极处等于零。 $\pm 45^\circ$ 处正常重力线由地心方向向北偏转达到 $\pm 11.75'$ 。如图 3。



(4) 正常重力梯度方向相对地心向北偏转的角度，在赤道和两极都达到极值，为 $\pm 11.72'$ ，而在 $\pm 45^\circ$ 处等于零。如图 3。

(5) 除赤道和两极处外，其他地方的正常重力线都是弯曲的。

(6) 正常重力线方向随大地高变化而变化。在近地空间纬度 30° 处，大地高每增大 100km ，正常重力线方向变化约为 $3''$ ，如图 4，图例中括号内的数值为正常椭球面上正常重力线方向相对地心的北偏角。

(7) 正常椭球面正常重力位 U_0 就是重力大地水准面的重力位。即：

①由参考重力场位系数模型计算的模型大地水准面，其重力位恒等于 U_0 。

②积分方法精化的区域大地水准面，其重力位恒等于 U_0 。

2.3 模型重力场元点值计算

功能：由系统内部地球重力场位系数模型，计算地球空间任意点处的高程异常(m)、空间异常(mGal)、扰动重力(mGal)、垂线偏差向量(s, "/秒, 南向、西向)、(垂向)扰动重力梯度(E)、水平重力梯度向量(E, 北向、东向)或扰动位(m^2/s^2)模型值。

输入：地面或地球外部空间计算点文件。

参数设置：如图 1。

(1) 选择计算的模型重力场元类型。

(2) 输入计算点记录起始行号和大地高属性所在列序号。

(3) 输入重力场位系数模型最大计算阶数。程序自动选择地球重力场位系数模型最大阶数和输入最大阶数中的最小值作为计算阶数。

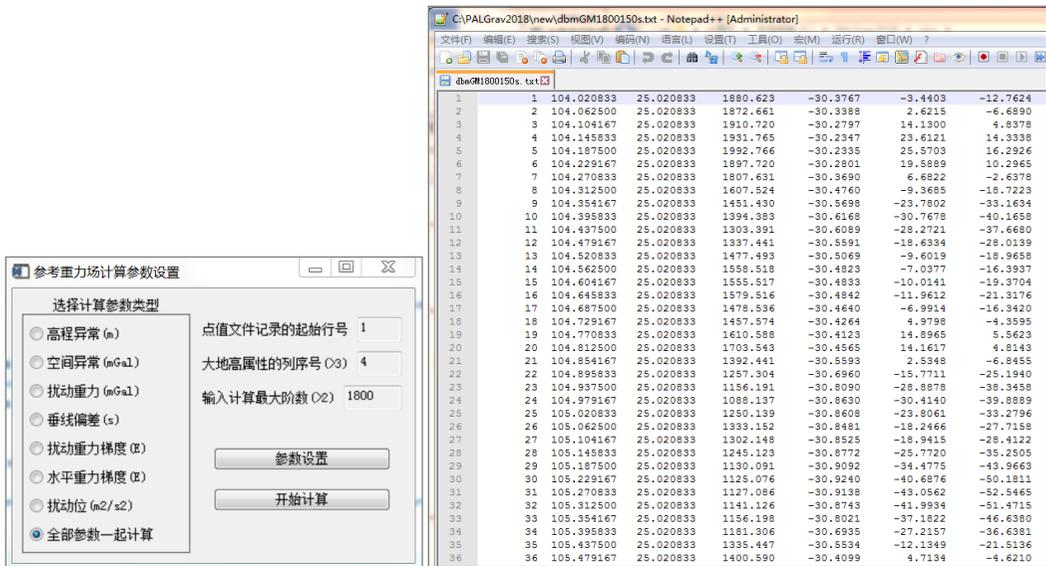
输出：如图 2。

模型重力场元计算结果点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加一列或若干列模型扰动重力场元计算值，保留 4 位有效数字。

说明：

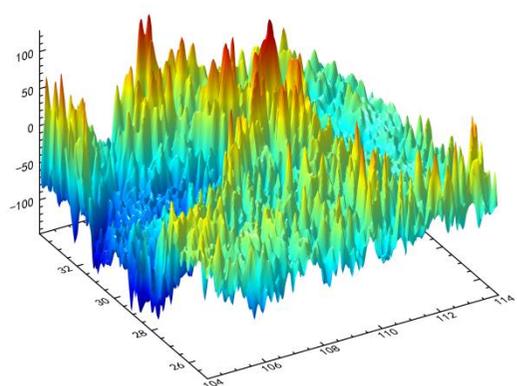
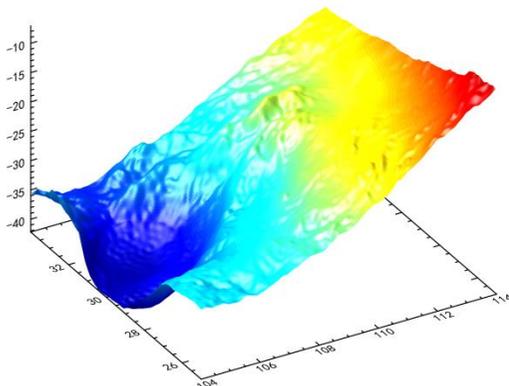
(1) 程序自动选择“系统设置”中的重力场位系数模型文件。用户可在“系统设置/重置”中指定其他重力场位系数模型。

(2) 正常重力场采用“系统设置/重置”中的正常椭球参数。



EGM2008模型地面高程异常 (1800阶, m)

EGM2008模型地面扰动重力 (1800阶, mGal)

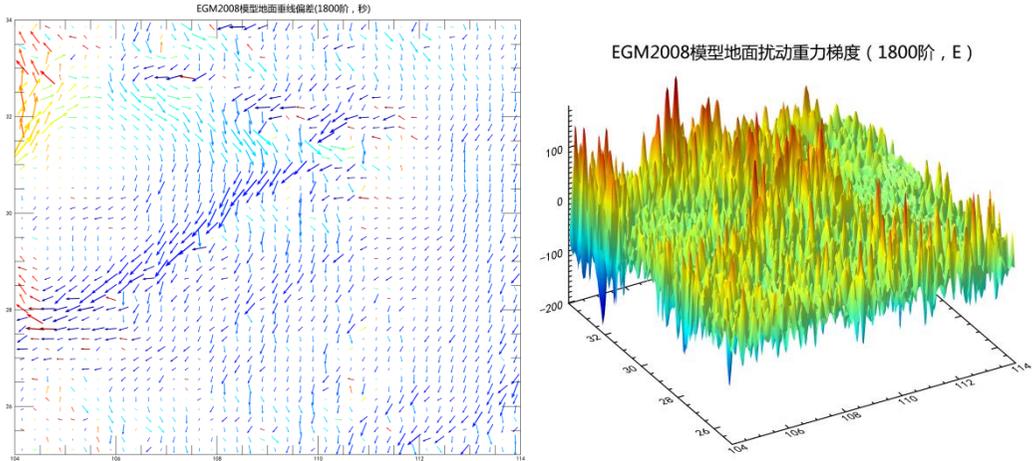


(3) 地球重力场元模型值计算公式如第八章的 (2.1) ~ (2.12)、(3.1)、(3.2)、(3.10)

~ (3.15) 式。

(4) 利用 EGM2008 重力场模型和系统默认的正常椭球参数，最大计算阶数取 1800 阶，计算模型地面高程异常 (m)、模型地面扰动重力 (mGal)、模型地面垂线偏差 (") 和模型地面 (垂向) 扰动重力梯度 (E) 格网，如图 3-6。

(5) 由扰动引力位的 Laplace 方程可知：地球外部任意点的扰动重力梯度、水平重力梯度北向和东向分量之和，恒等于零。



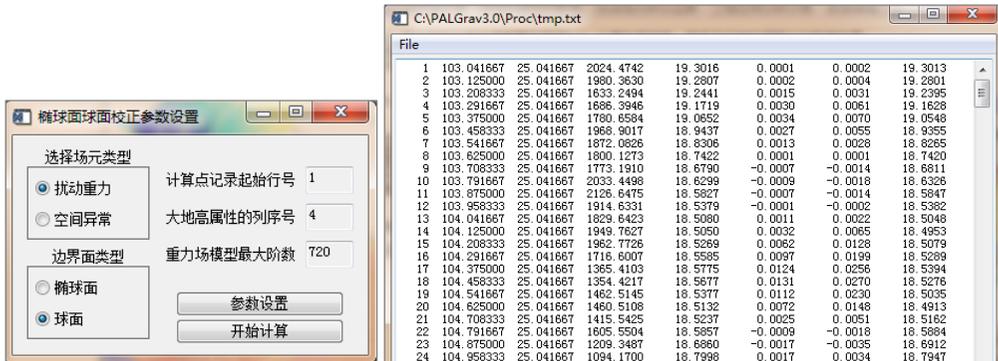
2.4 椭球面或球面边值校正

功能：利用地球重力场位系数模型，计算扰动重力或空间异常由非等位的球面或椭球边界面到重力等位面的校正值 (mGal)，从而将 Molodensky 边值问题转换为 Stokes 边值问题。

输入：球面或椭球面上计算点文件。

参数设置：如图 1。

- (1) 选择待校正的扰动重力场元类型和边界面类型。
- (2) 输入计算点记录起始行号和大地高属性所在的列序号。
- (3) 输入大地高属性在记录中的列序号。
- (4) 输入重力场位系数模型最大计算阶数。



输出：

(1) 当边界面为椭球面时，程序在源计算点值文件记录的基础上，增加 1 列重力的垂线偏差校正值。

(2) 当边界面为球面时，程序在源计算点值文件记录的基础上，增加 4 列校正值，如图 2。第 1 列为 3 项改正数之和，第 2~4 列分别是重力的垂线偏差校正，重力由正常重力方向到地心方向的校正值，以及正常重力由正常重力方向到地心方向的校正值。

说明：

(1) 扰动场元边值校正条件：当场元位于椭球面或球面上，且需要在 Stokes 框架中进一步进行重力场积分或（椭）球谐分析时，需要将以椭球面或球面为非等位边界面的 Molodensky 问题，通过边值校正，转为 Stokes 问题。

(2) 椭球面边值校正只有一项：即将重力由当地铅垂线方向校正到正常重力方向，此项校正也称重力的垂线偏差校正。

(3) 球面边值校正由 3 项组成：①重力的垂线偏差校正；②重力由正常重力方向到地心方向校正；③正常重力由正常重力方向到地心方向校正。

(4) 由于椭球面边值问题只需对重力校正，因此，空间异常和扰动重力的椭球面边值校正相等。

(5) 空间异常和扰动重力的正常重力点位置不同，因此，空间异常和扰动重力的球面边值校正不严格相等。

(6) 程序自动选择“系统参数设置”中的重力场位系数模型文件。用户可在“系统设置/重置”中指定其他重力场位系数模型。

(7) 扰动重力或空间异常的椭球面边值校正，主要用于全球重力场椭球谐分析。

(8) 扰动重力或空间异常的球面边值校正，通常用于 Bejharmmar 边值问题计算。

2.5 Molodensky 边值校正

功能：由地面或地球外部非等位的边界面上空间异常或扰动重力（mGal）格网、边界面模型高程异常格网、边界面大地高数字模型、等位面大地高数字模型，计算边界面上离散点空间异常或扰动重力的 Molodensky 边值改正数，从而将 Molodensky 边值问题，转换为 Stokes 边值问题。

输入：

(1) 边界面（非重力等位面）上待计算的点值文件。

(2) 格网规格相同的边界面大地高数字模型、等位面大地高数字模型文件。等位面大地高数字模型可由“5.7 过指定点的模型等位面构造”生成。

(3) 边界面空间异常或扰动重力（mGal）格网和模型高程异常格网文件。格网规格与边界面大地高数字模型相同。

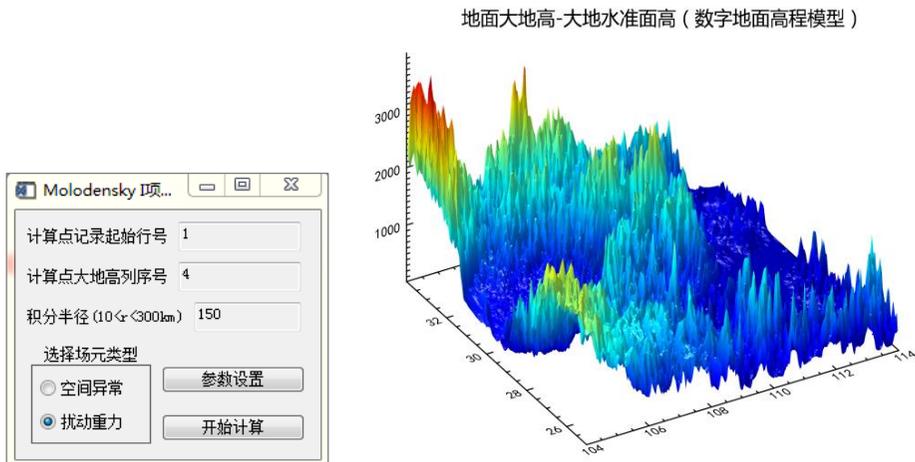
参数设置：如图 1。

(1) 输入边界面计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。

(2) 选择扰动重力场元类型。程序要求选择的扰动场元类型，与输入的边界面扰动场元类型一致。

(3) 输入积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

输出：Molodensky 边值改正数点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加一列该点的 Molodensky 边值改正数，保留 4 位有效数字。

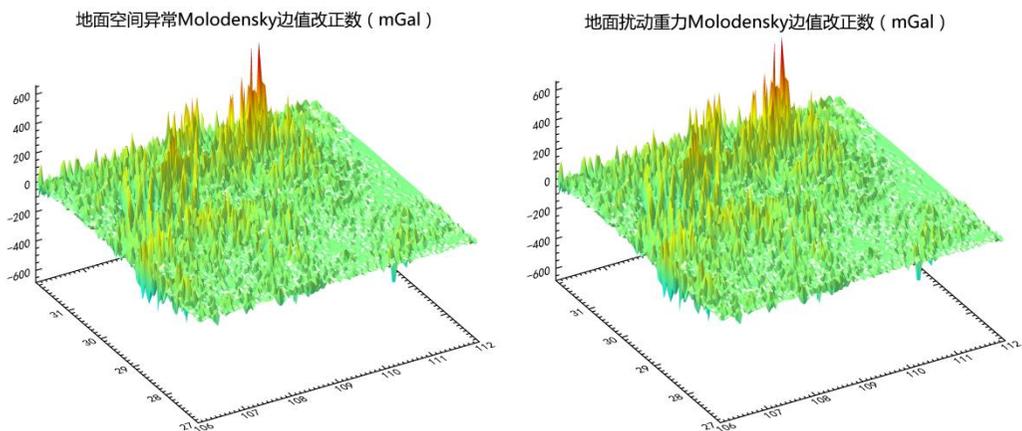


说明：

(1) 相对于“2.4 椭球面或球面边值校正”，本程序具有更广泛普遍意义。这里的边界面容许是任意几何形状，边界面可以位于地面或地球外部任意高度上。

(2) 以地面为边界面，大地水准面为等位面。利用 EGM2008 重力场模型，取最大计算阶数 1800 阶，计算 2.5'×2.5' 地面空间异常、地面扰动重力和地面高程异常格网。由于选择大地水准面为等位面，因此，地面大地高格网与大地水准面高格网之差构成地面数字高程模型（如图 2）。

(3) 采用 150km 积分半径，计算地面空间异常和地面扰动重力 Molodensky 边值改正数格网，如图 3、4。

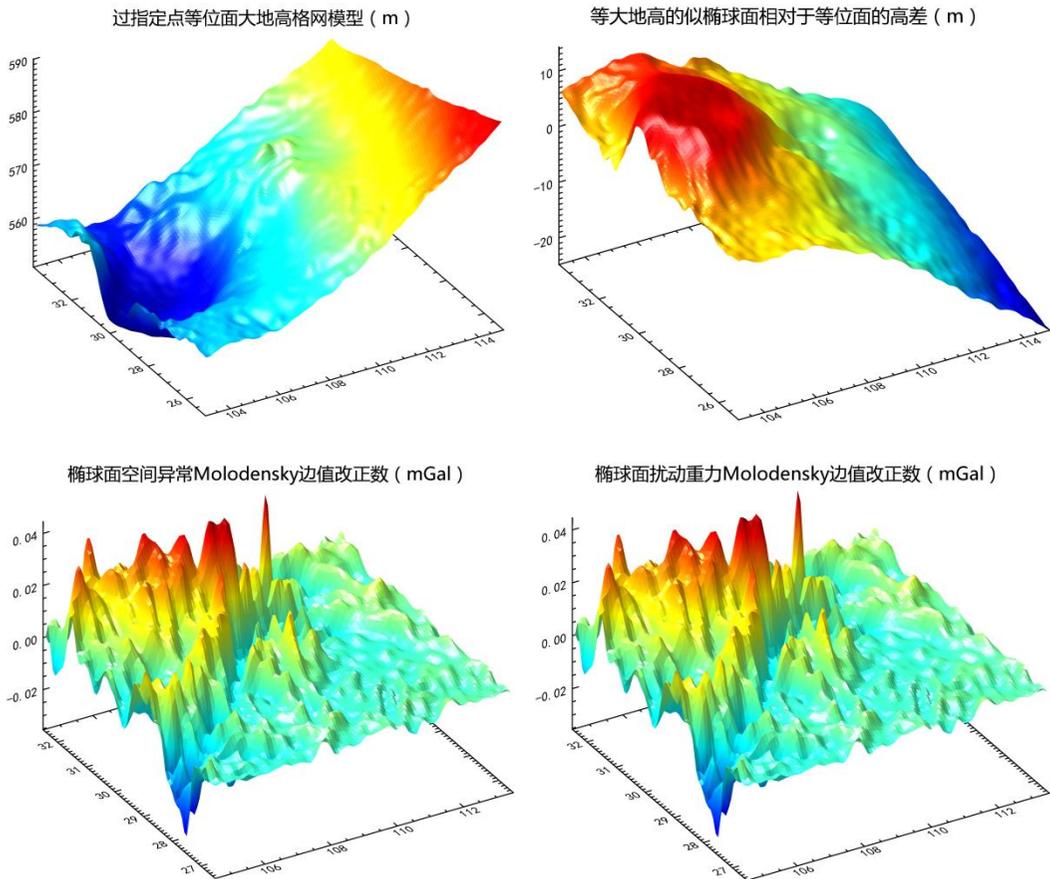


(4) 以过地面点(109.0°, 29.5°, 565.267m)的等大地高面(即大地高恒等于565.267

m 的近似椭球面)为边界面,过该点等位面大地高格网模型由“5.9 过指定点的模型等位面构造”生成,如图 5。

(5) 利用 EGM2008 重力场模型,取最大计算阶数 1080 阶,计算 5'×5'椭球面空间异常、椭球面扰动重力和椭球面高程异常格网。采用 150km 积分半径,计算椭球面空间异常和椭球面扰动重力 Molodensky 边值改正数格网,如图 6、7。

(6) 图 6、7 实质上是过地面点椭球面的椭球边值校正。由于椭球面相对于等位面地形起伏很小,与“2.4 椭球面或球面边值校正”一样,椭球面边值改正数很小。



(7) “2.4 椭球面或球面边值校正”是本程序的特殊情况。利用本程序,能以更高精度实现“2.4 椭球面或球面边值校正”功能。

2.6 扰动场元正常椭球变换

功能:按用户输入的正常椭球长半轴和地球动力学形状因子,计算由系统正常椭球变换到目标正常椭球后,高程异常 (mm)、空间异常 (μGal)、扰动重力 (μGal)、垂线偏差 (ms, 毫秒)或重力梯度 (10^{-3}E)等扰动重力场元所需增加的改正数。

输入:地面或地球外部空间计算点文件。

参数设置:如图 1。

- (1) 选择待改正的扰动重力场元类型。
- (2) 输入计算点记录起始行号和大地高属性所在列序号。
- (3) 输入目标正常椭球的长半轴与地球动力学形状因子。

说明：

(1) 垂线偏差西向分量的正常椭球变换改正恒为零，空间异常与扰动重力的正常椭球变换改正基本相等。



(2) 地球外部重力位或其导数的任意线性组合，是客观存在且可观测的物理量，其数值大小与采用何种正常椭球无关。程序中扰动重力场元的正常椭球变换算法，就是基于此原则导出的。

(3) 程序令地心引力常数 GM 和地球自转平均角速率 ω 为常数，因此即使椭球长半轴发生较大变化（如 1m），扰动重力场元椭球变换的量级都很小，在局部重力场及区域大地水准面精化时可以忽略，如图 2。

Line	Lat	Lon	Height	Value 1	Value 2	Value 3	Value 4	Value 5	Value 6	Value 7	Value 8
1	103	041667	25	041667	2024.4742	9.0786	-4.1873	-4.1873	1.4523	0.0000	-0.0261
2	103	125000	25	041667	1960.3630	9.0787	-4.1874	-4.1874	1.4518	0.0000	-0.0261
3	103	208333	25	041667	1833.2494	9.0792	-4.1883	-4.1883	1.4526	0.0000	-0.0261
4	103	291667	25	041667	1686.3946	9.0791	-4.1881	-4.1881	1.4526	0.0000	-0.0261
5	103	375000	25	041667	1780.6584	9.0790	-4.1879	-4.1879	1.4522	0.0000	-0.0261
6	103	458333	25	041667	1968.9017	9.0787	-4.1874	-4.1874	1.4522	0.0000	-0.0261
7	103	541667	25	041667	1872.0826	9.0789	-4.1877	-4.1877	1.4524	0.0000	-0.0261
8	103	625000	25	041667	1800.1273	9.0790	-4.1878	-4.1878	1.4522	0.0000	-0.0261
9	103	708333	25	041667	1773.1910	9.0790	-4.1879	-4.1879	1.4522	0.0000	-0.0261
10	103	791667	25	041667	2033.4498	9.0788	-4.1872	-4.1872	1.4521	0.0000	-0.0261
11	103	875000	25	041667	2126.8475	9.0785	-4.1870	-4.1870	1.4520	0.0000	-0.0261
12	103	958333	25	041667	1914.8331	9.0788	-4.1875	-4.1875	1.4522	0.0000	-0.0261
13	104	041667	25	041667	1829.6423	9.0789	-4.1878	-4.1878	1.4522	0.0000	-0.0261
14	104	125000	25	041667	1949.7627	9.0787	-4.1875	-4.1875	1.4523	0.0000	-0.0261
15	104	208333	25	041667	1962.7726	9.0787	-4.1874	-4.1874	1.4523	0.0000	-0.0261
16	104	291667	25	041667	1716.6007	9.0791	-4.1861	-4.1861	1.4522	0.0000	-0.0261
17	104	375000	25	041667	1385.4103	9.0796	-4.1890	-4.1890	1.4523	0.0000	-0.0261
18	104	458333	25	041667	1354.4217	9.0796	-4.1890	-4.1890	1.4526	0.0000	-0.0261
19	104	541667	25	041667	1462.5145	9.0794	-4.1887	-4.1887	1.4524	0.0000	-0.0261
20	104	625000	25	041667	1460.5108	9.0794	-4.1887	-4.1887	1.4524	0.0000	-0.0261
21	104	708333	25	041667	1415.5425	9.0795	-4.1889	-4.1889	1.4523	0.0000	-0.0261
22	104	791667	25	041667	1605.5504	9.0792	-4.1884	-4.1884	1.4526	0.0000	-0.0261

2.7 不同高度多种场元融合

功能：由地面、海面或近地空间等不同高度空间点的（残差）扰动重力（mGal）、高程异常（m）或垂线偏差（s）等多种类型场元观测量，以扰动重力场积分方程为约束，确定指定等位面上（残差）扰动重力（mGal）格网模型，实现不同高度、多种类型、交叉分布等复杂情形下离散场元的数据融合。

输入：如图 1。

(1) 离散扰动场元观测量点值文件。记录格式为：场元类型，经度（度小数），纬度，大地高，场元观测量，权值，...

⊙场元类型: 1 扰动重力, 2 高程异常, 3 垂线偏差北南分量, 4 垂线偏差东西分量。

(2) 等位面大地高数字格网模型。等位面大地高数字模型可由“5.7 过指定点的模型等位面构造”生成。

⊙等位面大地高格网分辨率约为扰动场元测点平均间距的 1/3~3 倍为宜。

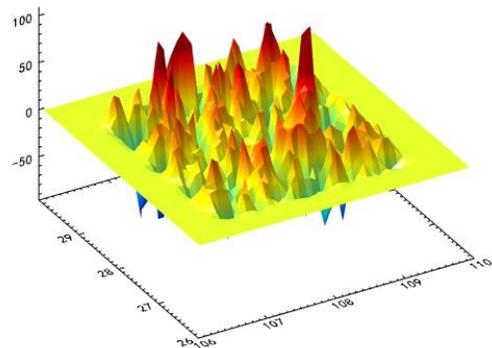
参数设置: 如图 3。

(1) 输入离散扰动场元观测量文件记录的起始行号, 大地高、场元观测量和权值所在的列序号。

(2) 输入积分半径 dr (单位: km)。

(3) 输入迭代计算次数 k ($1 < k < 20$)。

行号	场元类型	大地高	场元观测量	权值
1	1	106.020833	26.020833	1398.605
2	1	106.062500	26.020833	1248.667
3	1	106.104167	26.020833	1220.714
4	1	106.145833	26.020833	1263.773
5	2	107.875000	28.875000	1002.2628
6	2	108.125000	28.875000	888.6580
7	2	108.375000	28.875000	724.4078
8	2	108.625000	28.875000	845.9834
9	2	108.875000	28.875000	803.4017
10	3	107.125000	27.125000	949.6249
11	3	107.375000	27.125000	1045.1647
12	3	107.625000	27.125000	984.7107
13	3	107.875000	27.125000	871.3819
14	3	108.125000	27.125000	859.1236
15	4	108.625000	28.125000	820.4981
16	4	108.875000	28.125000	733.3193
17	4	107.125000	28.375000	978.9071
18	4	107.375000	28.375000	960.6300
19	1	106.187500	26.020833	1210.852
20	1	106.229167	26.020833	1209.943
21	1	106.270833	26.020833	1265.035
22	1	106.312500	26.020833	1237.125
23	1	106.354167	26.020833	1280.203
24	1	106.395833	26.020833	1286.261
25	1	106.437500	26.020833	1179.288
26	1	106.479167	26.020833	1078.294
27	1	106.520833	26.020833	1016.312
28	1	106.562500	26.020833	972.373



数据文件输入
结果文件输出
设置与计算

⊙多种不同高度场元融合:

- 打开多种扰动场元观测量点值文件 dbmchl.txt
- 打开等位面大地高格网数字模型文件 dwmhgt150s2.dat
- 扰动重力格网模型保存为 multi.dat
- 扰动场元残差点值保存为 multich.txt
- 迭代过程统计: 均值 标准差 最小值 最大值 (第0次迭代为原观测量统计)
- 迭代 0 扰动重力: 0.46 17.23 -44.47 77.48
- 迭代 0 扰动高程异常: 0.003 0.166 -0.289 0.593
- 迭代 0 扰动北西分量: 0.18 2.43 -5.69 5.84
- 迭代 0 扰动东西分量: 0.47 2.85 -5.15 7.37
- 迭代 1 扰动重力: -0.60 17.99 -41.75 80.22
- 迭代 1 扰动高程异常: -0.124 0.345 -0.886 0.681
- 迭代 1 扰动北西分量: 0.08 2.63 -5.94 6.19
- 迭代 1 扰动东西分量: 0.48 3.09 -5.22 7.86
- 迭代 2 扰动重力: -1.09 7.37 -24.32 36.30
- 迭代 2 扰动高程异常: -0.064 0.088 -0.216 0.086
- 迭代 2 扰动北西分量: 0.36 4.40 -10.10 10.41
- 迭代 2 扰动东西分量: 0.21 0.86 -1.52 2.51
- 迭代 3 扰动重力: -1.15 4.51 -21.03 26.15
- 迭代 3 扰动高程异常: -0.017 0.053 -0.133 0.083

多种不同高度场元...

观测量文件记录的起始行号

大地高属性所在列序号(>3)

扰动场元观测量列序号(>3)

场元观测量权值列序号(>3)

残差场元积分半径(25<r<220km)

迭代计算次数(1<k<20)

输出:

(1) 界面输出迭代过程中每种类型观测量残差值的统计信息, 如图 3。

(2) 输出等位面上与其大地高格网规格相同的(残差)扰动重力格网模型, 如图 2。

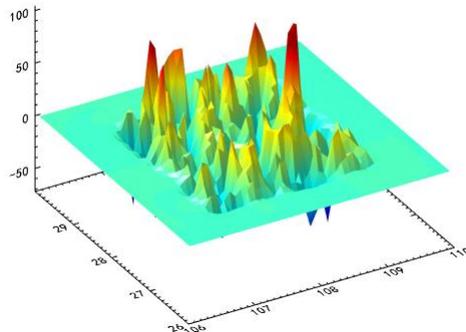
(3) 生成离散场元观测量残差点值文件。在源离散扰动场元观测量文件记录的基础上, 增加一列离散场元观测量残差值, 如图 4。

⊙残差点值文件头文件共 $k + 1$ 行。第一行为源观测量统计信息, $2 \sim k + 1$ 行为 $1 \sim k$ 次迭代过程中残差值的统计信息。

⊙统计信息内容：扰动重力残差值的平均值、标准差、最小值、最大值，高程异常残差值的平均值、标准差、最小值、最大值。

⊙若源观测量文件中没有（残差）扰动重力或高程异常观测量，则该项残差值统计信息显示全为零。

multitask test									
1	0.455	17.234	-44.469	77.479	0.003	0.166	-0.289	0.593	
2	-0.597	17.988	-41.750	80.217	-0.124	0.345	-0.896	0.651	
3	-1.091	7.371	-24.323	36.295	-0.064	0.088	-0.216	0.086	
4	-1.147	4.513	-21.026	26.152	-0.017	0.053	-0.133	0.083	
5	-1.277	3.821	-22.341	23.945	-0.000	0.058	-0.110	0.149	
6	-1.393	3.915	-24.114	23.511	0.016	0.056	-0.083	0.186	
7	-1.512	4.038	-25.775	23.560	0.023	0.050	-0.073	0.156	
8	1.106.020833	26.020833	1399.605	14.4382	1	14.4382	14.4382	14.4382	
9	1.106.042500	26.020833	1246.667	6.5438	1	6.5438	6.5438	6.5438	
10	1.106.104167	26.020833	1220.714	-2.9350	1	-2.9350	-2.9350	-2.9350	
11	1.106.145833	26.020833	1263.773	-7.7061	1	-7.7061	-7.7061	-7.7061	
12	2.107.875000	28.875000	1002.2628	0.159	1	0.2312	0.0262	-0.0423	
13	2.108.125000	28.875000	889.6580	0.166	1	0.1805	-0.0012	-0.0371	
14	2.108.375000	28.875000	724.4078	-0.124	1	-0.1214	-0.1813	-0.1327	
15	2.108.625000	28.875000	845.9834	0.237	1	0.2316	-0.1323	-0.1271	
16	2.108.875000	28.875000	803.4017	0.229	1	0.2570	-0.1244	-0.0610	
17	3.107.125000	27.125000	944.4249	-0.141	1	0.3095	-0.0416	0.0468	
18	3.107.375000	27.125000	1045.1647	-1.688	1	-0.4366	-3.9841	-4.7236	
19	3.107.625000	27.125000	984.7107	-1.052	1	0.3381	-1.4683	-1.6659	
20	3.107.875000	27.125000	871.3819	0.823	1	1.5107	0.5784	0.3875	
21	3.108.125000	27.125000	859.1236	5.837	1	6.1897	10.4106	12.1826	
22	4.108.625000	28.125000	820.4981	-4.389	1	-4.8725	-0.7166	0.1078	
23	4.108.875000	28.125000	733.3193	5.715	1	6.0802	1.0272	-1.6897	
24	4.107.125000	28.375000	978.9071	3.251	1	3.8090	0.2303	-0.3149	
25	4.107.375000	28.375000	960.6300	0.074	1	1.2521	1.1126	1.3380	
26	1.106.187500	26.020833	1210.852	-7.3513	1	-7.3513	-7.3513	-7.3513	
27	1.106.229167	26.020833	1209.943	-4.6969	1	-4.6969	-4.6969	-4.6969	
28	1.106.270833	26.020833	1245.605	-2.1268	1	-2.1268	-2.1268	-2.1268	
29	1.106.312500	26.020833	1237.125	0.4042	1	0.4042	0.4042	0.4042	
30	1.106.354167	26.020833	1280.203	2.7853	1	2.7853	2.7853	2.7853	
31	1.106.395833	26.020833	1286.261	2.5528	1	2.5528	2.5528	2.5528	
32	1.106.437500	26.020833	1379.288	-3.1504	1	-3.1504	-3.1504	-3.1504	
33	1.106.479167	26.020833	1078.294	-13.6423	1	-13.6423	-13.6423	-13.6423	
34	1.106.520833	26.020833	1016.312	-22.4675	1	-22.4675	-22.4675	-22.4675	
35	1.106.562500	26.020833	976.373	-22.3950	1	-22.3950	-22.3950	-22.3950	
36	1.106.604167	26.020833	1000.483	-12.5545	1	-12.5545	-12.5545	-12.5545	
37	1.106.645833	26.020833	1147.612	-0.6532	1	-0.6532	-0.6532	-0.6532	
38	1.106.687500	26.020833	1221.724	5.1071	1	5.1071	5.1071	5.1071	
39	1.106.729167	26.020833	1145.612	3.7262	1	3.7262	3.7262	3.7262	
40	1.106.770833	26.020833	1161.393	0.7305	1	0.7305	0.7305	0.7305	
41	1.106.812500	26.020833	1186.989	3.1275	1	3.1275	3.1275	3.1275	
42	1.106.854167	26.020833	1195.096	10.9588	1	10.9588	10.9588	10.9588	
43	1.106.895833	26.020833	1290.180	16.8429	1	16.8429	16.8429	16.8429	
44	1.106.937500	26.020833	1345.214	13.6766	1	13.6766	13.6766	13.6766	
45	1.106.979167	26.020833	1153.203	1.5103	1	1.5103	1.5103	1.5103	



说明：

(1)（残差）扰动重力模型结果格网外围积分半径范围内，由于积分不充分，存在边缘效应，格网边缘结果不可用，如图 2。

(2) 首先，选择较大迭代次数，运行程序试算，观察迭代过程中统计信息（如图 3、4），根据迭代过程中多种场元统计信息的变化特点，确定最后的迭代次数 k 。

(3) 采用最后的迭代计算次数，再次运行程序，得到最终的（残差）扰动场元格网模型（图 6）和离散场元观测量残差点值（图 5）文件。

⊙本例中，试算时迭代次数选为 6，最终计算迭代次数为 4。

(4) 程序要求作为观测量的各种类型（残差）扰动场元必须是解析的（即具备重力场积分条件）。如可以是扰动重力、高程异常，但不能是平面布格异常，因为任何重力场参数的积分都不可能直接得到平面布格异常值。

(5) 最后一次迭代产生的场元残差量，是程序分离出的场元观测量之间，不满足重力场积分方程约束的部分，因此，可用于定量评估不同高度上离散扰动场元观测量的质量（粗差、可靠性等）与精度水平。

2.8 径向梯度法解析延拓

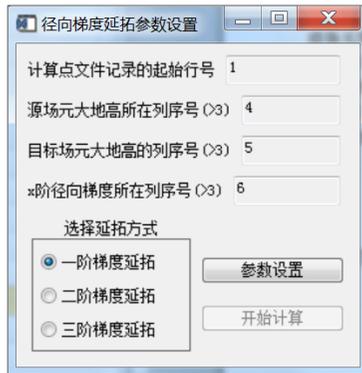
功能：由地球外空间某一高度面上任意类型场元的 1~3 阶径向梯度（单位分别为 $/\text{km}$ 、 $/\text{km}^2$ 和 $/\text{km}^3$ ），实现近距离向上或向下解析延拓。

输入：包含场元径向梯度值的空间点值文件。记录含源场元高度和目标场元高度的大

地高属性值。

参数设置：如图 1。

- (1) 选择场元梯度延拓方式。
- (2) 指定文件记录起始行号 n （即第 1 至 $n - 1$ 行是头文件）。
- (3) 源场元大地高（m）、目标场元大地高（m）和径向梯度（/km，/km² 或/km³）属性所在列序号。



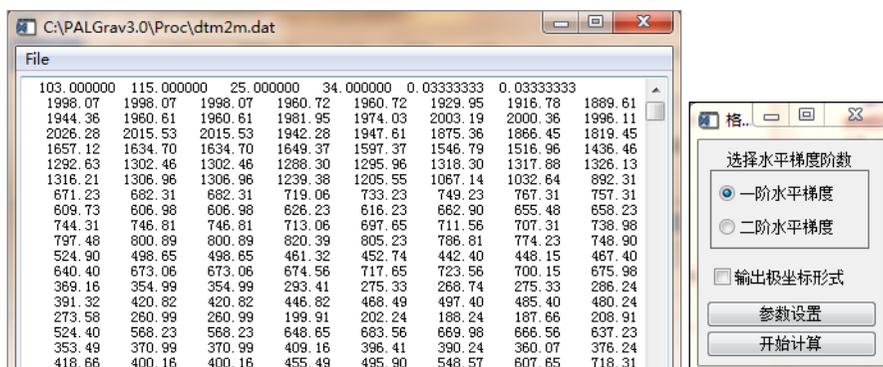
输出：计算结果点值文件。在源文件记录的基础上增加一列梯度延拓改正值，保留 4 位有效数字。延拓改正数单位与源场元单位一致。

2.9 格网水平梯度向量估计

功能：采用最小二乘参数估计法，估计格网数字模型格值的 1 阶或 2 阶水平梯度向量（1 阶水平梯度单位为 /m，2 阶水平梯度单位为 /m²），结果以向量格网形式存储。

输入：源格网数字模型文件（如图 1），及其所在面的大地高格网数字模型文件（格网规格与源格网文件完全相同）。

设置：如图 2。



(1) 计算一阶水平梯度时，程序一次估计 2 个待估参数；计算二阶水平梯度时，程序一次估计 5 个待估参数。

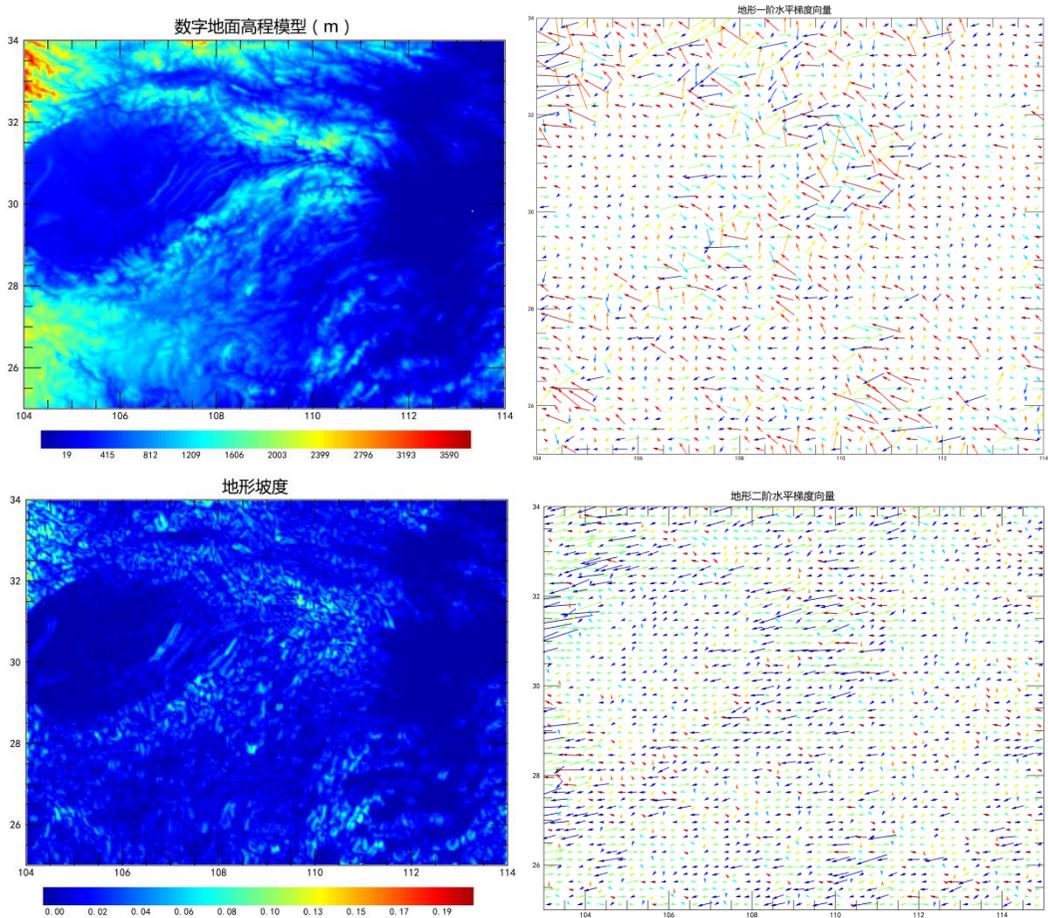
(2) 当选择“采用极坐标表示水平梯度向量”时，输出格网文件的向量格式为极坐标格式；否则，输出格网文件的向量格式为北东当地平面坐标格式。

说明：

(1) 程序以格网点格值的水平梯度为待估参数，由其前、后、左、右与对角线上的 9 个格值，组成 8 个观测方程，按到格网中心点距离反比对观测量赋权，采用加权最小二乘法估计格网点的水平梯度向量值。

(2) 计算地面数字高程模型一、二阶水平梯度，一阶分别以北东当地平面坐标和极坐标形式输出，二阶以北东当地平面坐标形式输出，如图 3~6。

(3) 场元或地形的水平梯度数据通常用于重力场或地形影响奇异积分运算。



2.10 格网数据低通滤波运算

功能：采用滑动平均、高斯、指数型或巴特沃斯等低通滤波器，对格网数据进行低通滤波。滤波前后，格网的规格（范围和分辨率）不变。

输入：待滤波的格网数字模型文件，如图 1。

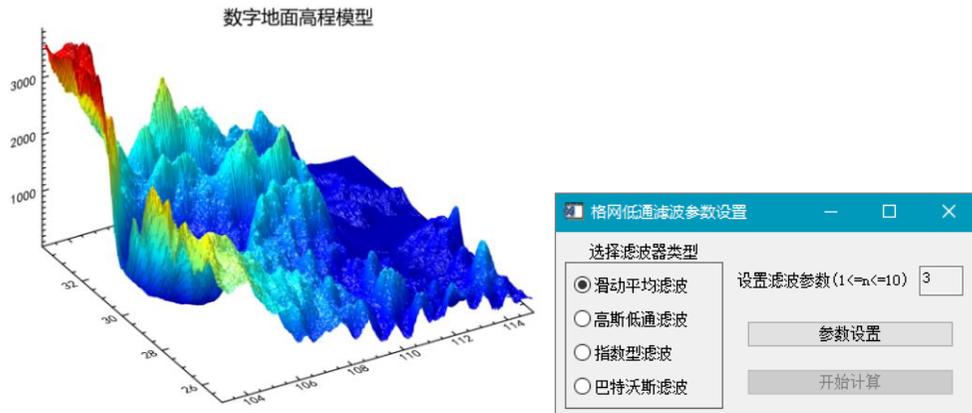
参数设置：如图 2。

- (1) 选择低通滤波器类型，设置滤波参数 $1 \leq n \leq 10$ 。
- (2) 当选择“高斯低通滤波”时，忽略滤波参数。

(3) 对于滑动平均滤波器，滤波窗口大小为 $(2n + 1) \times (2n + 1)$ ，且 n 越大滤波强度越大。

(4) 对于“指数型”或“巴特沃斯”滤波器， n 越小滤波强度越大。

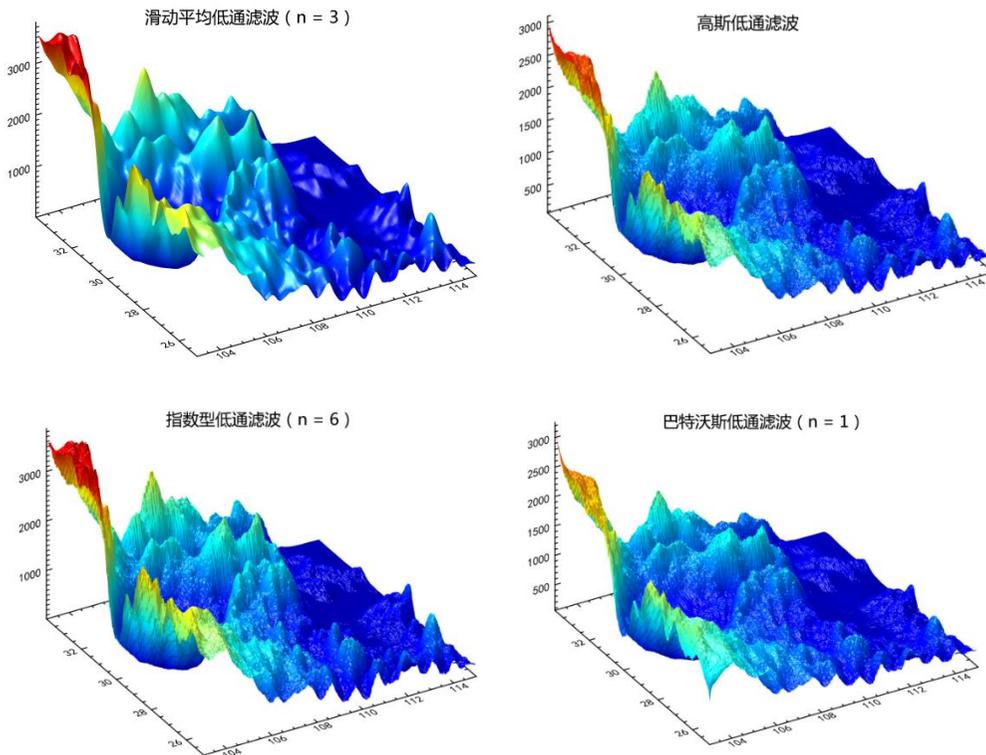
输出：与输入格网同规格的低通滤波格网。



说明：

(1) 选择不同类型滤波器，对地面数字高程格网（如图 1）分别进行低通滤波，结果如图 3~6。

(2) 采用滑动平均滤波，格网值空间变化量的保真度较高。



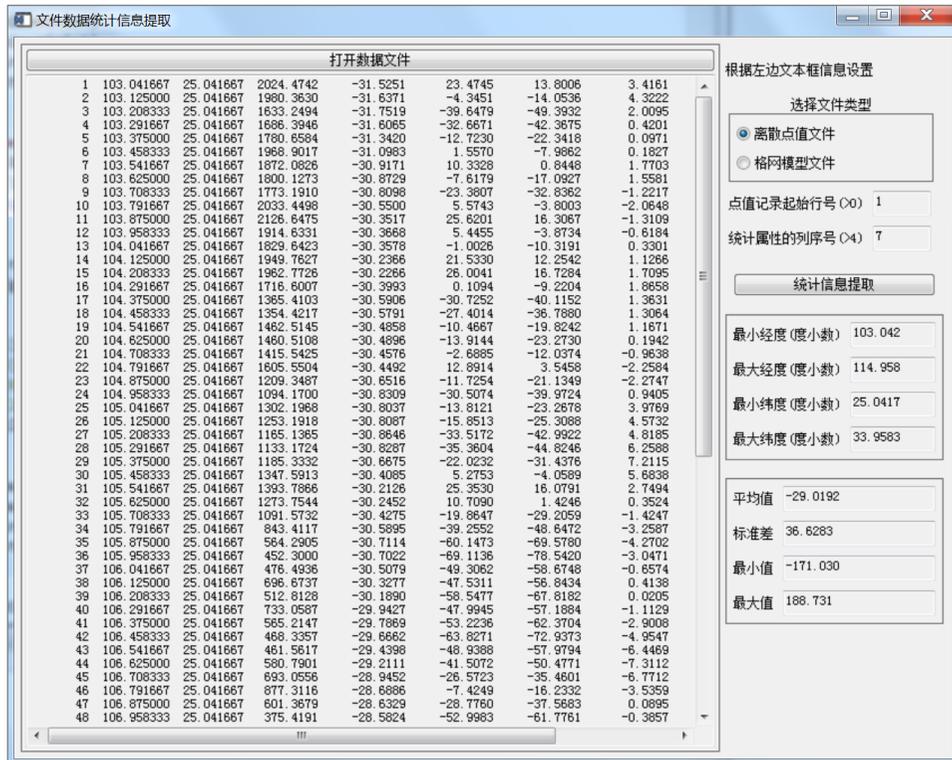
2.11 文件数据统计信息提取

功能：提取点值文件指定属性或格值文件格网数据的经纬度范围，平均值、标准差、最小值、最大值等统计信息。

输入：点击“打开数据文件”按钮，选择需要提取统计信息的数据文件，程序将文件内容（包含头文件）显示到左边的文本框中，如图。

参数设置：如图。

- (1) 根据左边文本框内容，选择文件类型。
- (2) 输入记录起始行号，指定统计属性所在的列序号。仅当文件类型为离散点值文件时有效。



输出：点击“统计信息提取”按钮，程序按用户要求提取统计信息，如图。

说明：

- (1) 可以多次打开不同文件，提取不同文件的统计信息。
- (2) 若打开的是离散点值文件，可以多次提取不同列属性的统计信息。
- (3) 此项功能与“6.14 按属性条件提取点记录”组合，可实现粗差探测与分离。

第三章 地球外部地形影响

为全面提升复杂多源重力场数据处理能力，PALGrav3.0 系统采用相同的标准和相容的方法，构建了一套较为完备的高精度地形影响算法体系，用于精密处理地面/海面及地球外部空间、各种类型场元、多种性质的地形影响。



3.1~3.2 主要用于计算地球外部各种类型场元的局部地形影响，3.3~3.4 用于处理地面至大地水准面间地形质量影响，3.5~3.6 用于确定地球外部各种类型场元的地形 Helmert 凝聚，3.7~3.8 用于计算地球外部各种类型场元的海水完全布格影响，3.11~3.12 用于全球陆海地形质量球谱分析以及地球外部（包括陆地、海洋、航空和卫星高度等）完全布格影响、剩余地形影响计算。

3.1 局部地形影响数值积分

功能：由地面数字高程模型、地面大地高数字模型，按严密积分公式，计算地面及地球外部点高程异常（m）、扰动重力（mGal）、空间异常（mGal）或扰动位（ m^2/s^2 ）的局部地形影响。

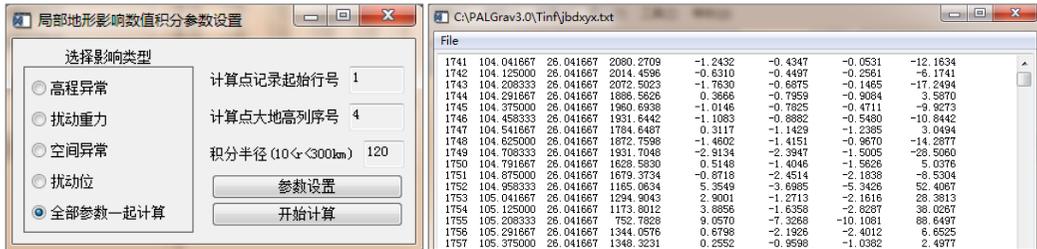
输入：

- （1）格网规格完全相同的地面数字高程模型、地面大地高数字模型，以及空间计算点文件。
- （2）空间计算点记录应含大地高属性值。程序由地面大地高模型格网构造流动点大

地坐标，将空间计算点的经纬度、大地高作为计算点大地坐标。

(3) 地面数字高程模型属正(常)高系统，地面数字高程模型格网在程序中用于表示地形起伏。

参数设置：如图 1。

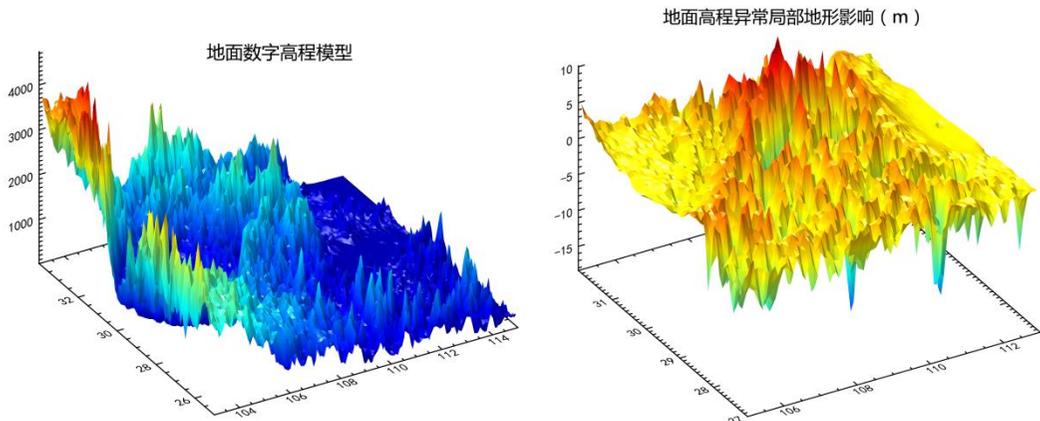


- (1) 选择计算局部地形影响的扰动重力场元类型。
- (2) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。
- (3) 输入局部地形影响积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

输出：局部地形影响计算结果点值文件（如图 2）。在源计算点值文件记录的基础上增加一列或若干列局部地形影响积分值，保留 4 位有效数字。

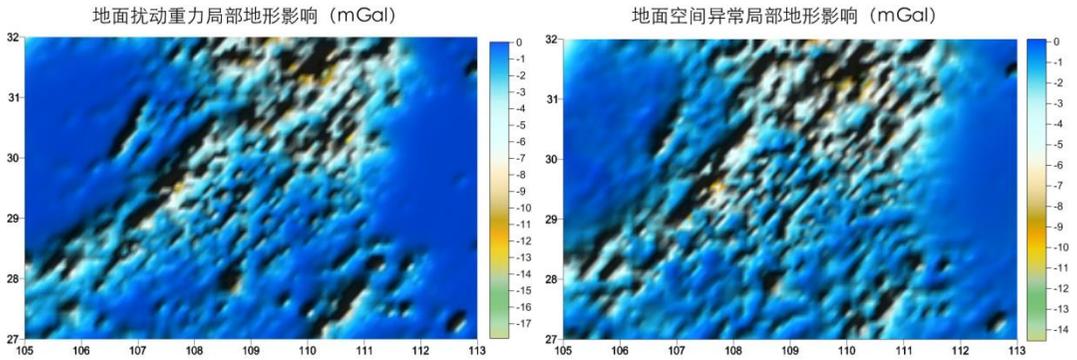
说明：

- (1) 由某地区 $5' \times 5'$ 地面数字高程模型（如图 3），采用 150km 积分半径，计算地面高程异常、地面扰动重力和地面空间异常的局部地形影响，如图 4~6。
- (2) 传统的地面重力地形改正，等于这里的地面扰动重力局部地形影响平面近似的负值。
- (3) 严密算法中，空间异常局部地形影响与扰动重力局部地形影响，在数值上存在一定差异。
- (4) 局部地形影响对近海海域与近地空间的各种类型扰动场元有贡献。在高精度陆海统一的重力场数据处理时应予以考虑。



(5) 当数字高程模型分辨率很高、程序难以有效运行时，可将数字高程模型格网分割成若干格网，用子格网分别积分计算局部地形影响，再将全部子格网计算的局部地形

影响相加，其结果与一次积分结果等价。



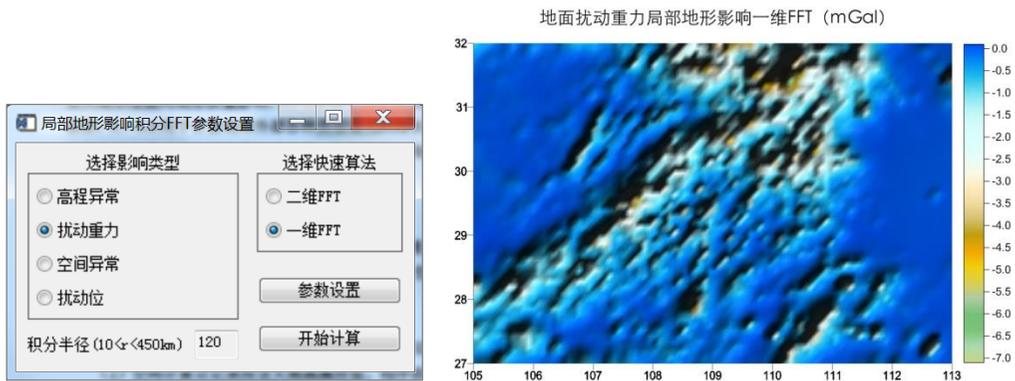
3.2 局部地形影响积分 FFT

功能：由地面数字高程模型、地面大地高数字模型，按 FFT 方法计算地面及地球外部某一边界面上高程异常、扰动重力、空间异常或扰动位的局部地形影响。

输入：网格规格完全相同的地面数字高程模型、地面大地高数字模型和计算边界面大地高数字模型文件。

参数设置：如图 1。

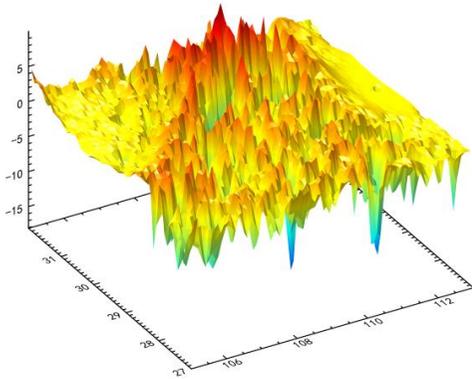
- (1) 选择计算局部地形影响的扰动重力场元类型和局部地形影响积分快速算法。
- (2) 输入局部地形影响积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300$ km。



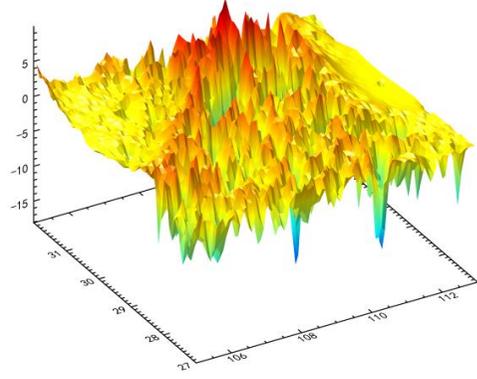
说明：

- (1) FFT 算法通过控制积分核函数的定义域，实现固定积分半径。
- (2) 局部地形影响结果格网外围积分半径范围内，由于积分不充分，存在边缘效应。
- (3) 在 FFT 算法中，核函数的构造采用边界面的平均地心距代替实际地心距，存在一定近似，计算精度要比严密数值积分略低。
- (4) 由某地区 $5' \times 5'$ 地面数字高程模型，采用 150km 积分半径，分别按二维 FFT、一维 FFT 算法，计算地面高程异常、地面扰动重力局部地形影响，如图 2~4。
- (5) 地面高程异常局部地形影响 FFT 算法、严密数值积分法的互差统计如表 1。

地面高程异常局部地形影响二维FFT积分 (m)



地面高程异常局部地形影响一维FFT (m)



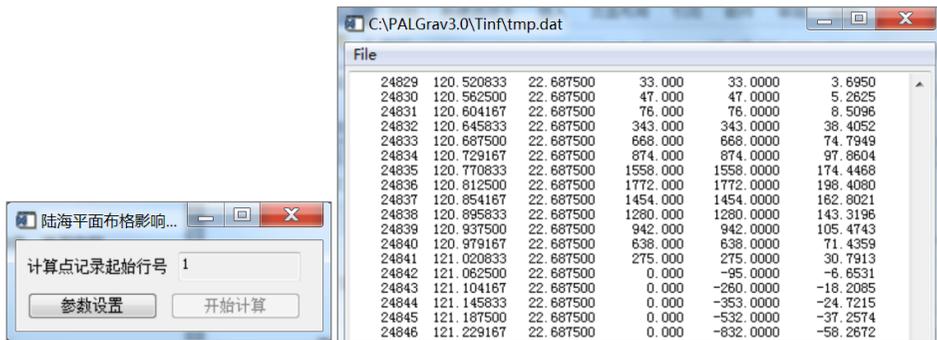
	一维 FFT/A	二维 FFT/B	数值积分/C	A-C	B-C	B-A
最大值 m	10.1520	9.9950	10.1200	0.1320	0.3740	0.5250
最小值 m	-18.4560	-18.0980	-18.3620	-0.1510	-0.2260	-0.3580
平均值 m	0.0430	0.0430	0.0424	0.0005	0.0005	0.0000
标准差 m	2.8054	2.7859	2.7994	0.0180	0.0398	0.0518

3.3 陆海重力平面布格影响

功能：计算地面重力平面布格影响或海面重力简单布格影响 (mGal)。

输入：地面/海面重力测点文件，与陆海数字高程模型文件。

参数设置：如图 1。



输出：在输入重力测点文件记录基础上，增加一列平面布格影响值，如图 2。

说明：

- (1) 在陆地，地面重力的平面布格影响等于重力层间改正的负值
- (2) 在海域，海面重力的平面布格影响等于重力简单布格改正的负值。
- (3) 海水布格影响是指，将海洋水体由海水密度填充至陆地地形密度后，导致海面重力的变化。

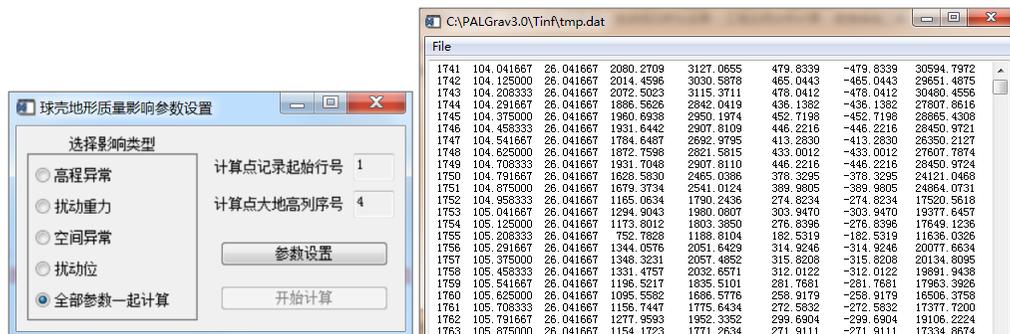
3.4 球壳地形质量影响计算

功能：由给定的地面数字高程模型，内插计算点正下方的地形高度，按严密公式计算球近似下近地空间任意高度、多种类型扰动重力场元的球壳布格质量影响。

输入：空间计算点文件，格网规格完全相同的地面数字高程模型和地面大地高数字模型文件。

参数设置：如图 1。

- (1) 选择计算球壳地形质量影响的扰动场元类型。
- (2) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。



输出：

(1) 球壳地形质量影响计算结果点值文件（如图 2）。在源计算点值文件记录的基础上增加一列或若干列球壳地形质量影响计算值，保留 4 位有效数字。

(2) 图 2 最后 4 列分别为高程异常（m）、扰动重力（mGal）、空间异常（mGal）和扰动位（ m^2/s^2 ）的球壳地形质量影响。

说明：

- (1) 扰动重力的球壳地形质量影响等于空间异常球壳地形质量影响的负值。
- (2) 近地空间任意类型扰动场元的（陆地）地形（质量）完全布格影响 = 局部地形影响 + 球壳地形质量影响。
- (3) 各类场元的球壳地形质量影响与完全布格影响，在高海拔地区会远大于扰动场元本身的量级。若直接用于局部重力场数据处理，由于难以顾及远区效应，容易导致重力场变形。
- (4) 球壳地形质量影响与完全布格影响一般不直接用于重力场数据处理，而是用于计算剩余地形影响。
- (5) 球壳地形质量影响，采用球近似算法，适合于近地空间（大地高 < 20km）。

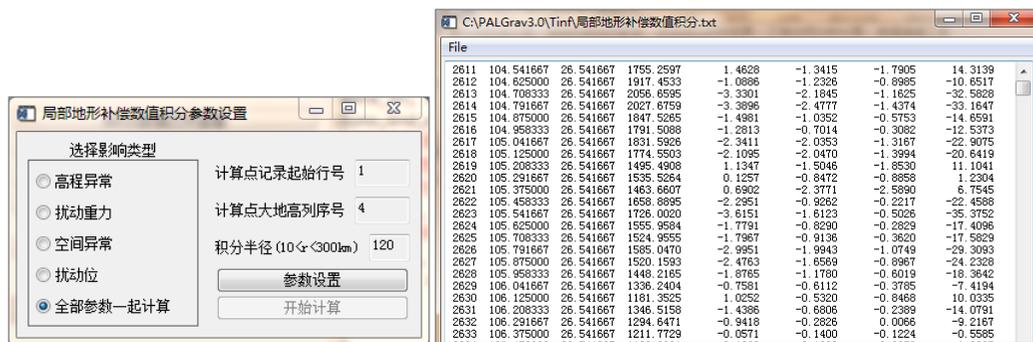
3.5 局部地形质量补偿积分

功能：由地面数字高程模型、地面大地高数字模型，按严密积分公式，计算地面及地球外部空间点高程异常（m）、扰动重力（mGal）、空间异常（mGal）或扰动位（ m^2/s^2 ）的局部地形（质量）补偿。

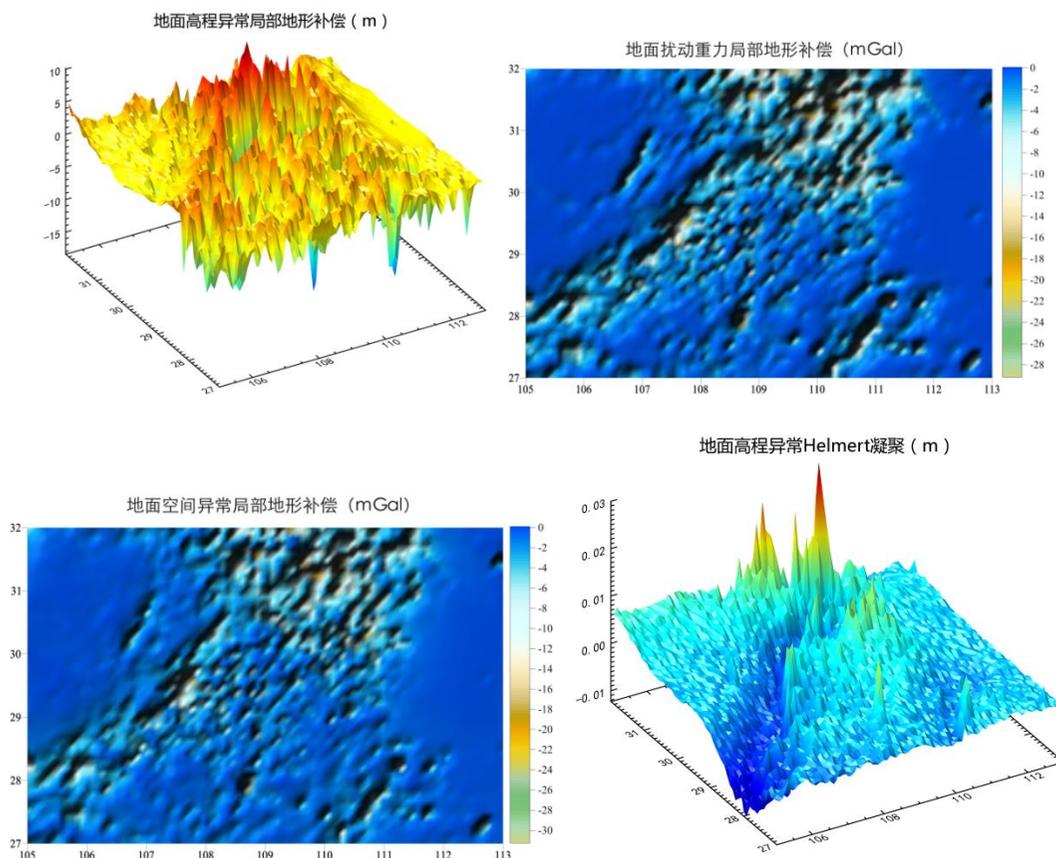
输入：格网规格完全相同的地面数字高程模型和地面大地高数字模型，以及空间计算点文件。

参数设置：如图 1。

- (1) 选择计算局部地形补偿的扰动重力场元类型。
- (2) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。
- (3) 输入局部地形补偿积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。



输出：局部地形补偿计算结果点值文件（如图 2）。在源计算点值文件记录的基础上增加一列或若干列局部地形补偿积分值，保留 4 位有效数字。

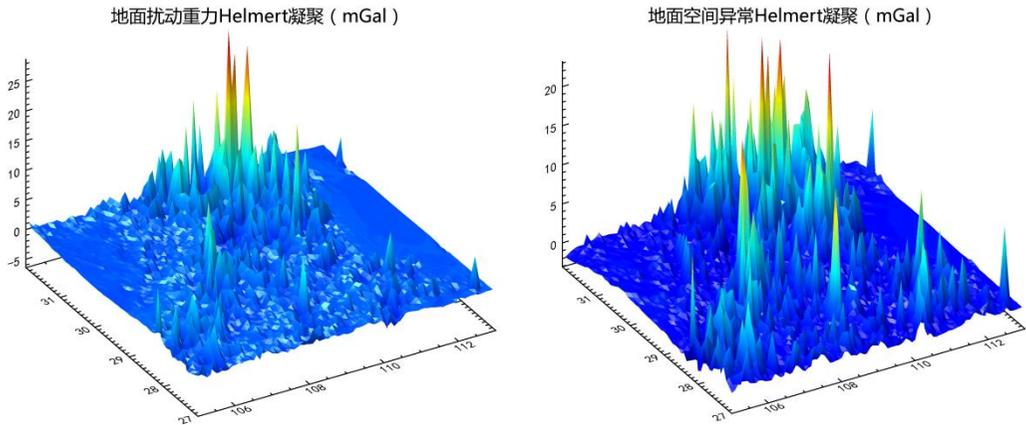


说明：

(1) 由某地区 5'×5' 地面数字高程模型，采用 150km 积分半径，计算地面高程异常、地面扰动重力和地面空间异常的局部地形补偿，如图 3~5。

(2) 地面或地球外部空间任意类型扰动场元的地形 Helmert 凝聚 = 局部地形补偿 - 局部地形影响。

(3) 地面高程异常、地面扰动重力和地面空间异常的 Helmert 凝聚，如图 6~8。



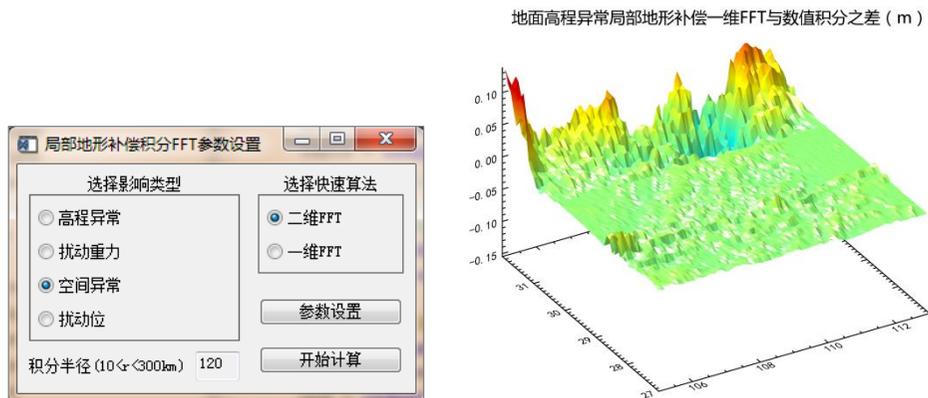
3.6 局部地形质量补偿 FFT

功能：由地面数字高程模型、地面大地高数字模型，按 FFT 方法计算地面及地球外部某一边界面上高程异常 (m)、扰动重力 (mGal)、空间异常 (mGal) 或扰动位 (m^2/s^2) 的局部地形质量补偿。

输入：格网规格完全相同的地面数字高程模型、地面大地高数字模型和计算边界面大地高数字模型文件。

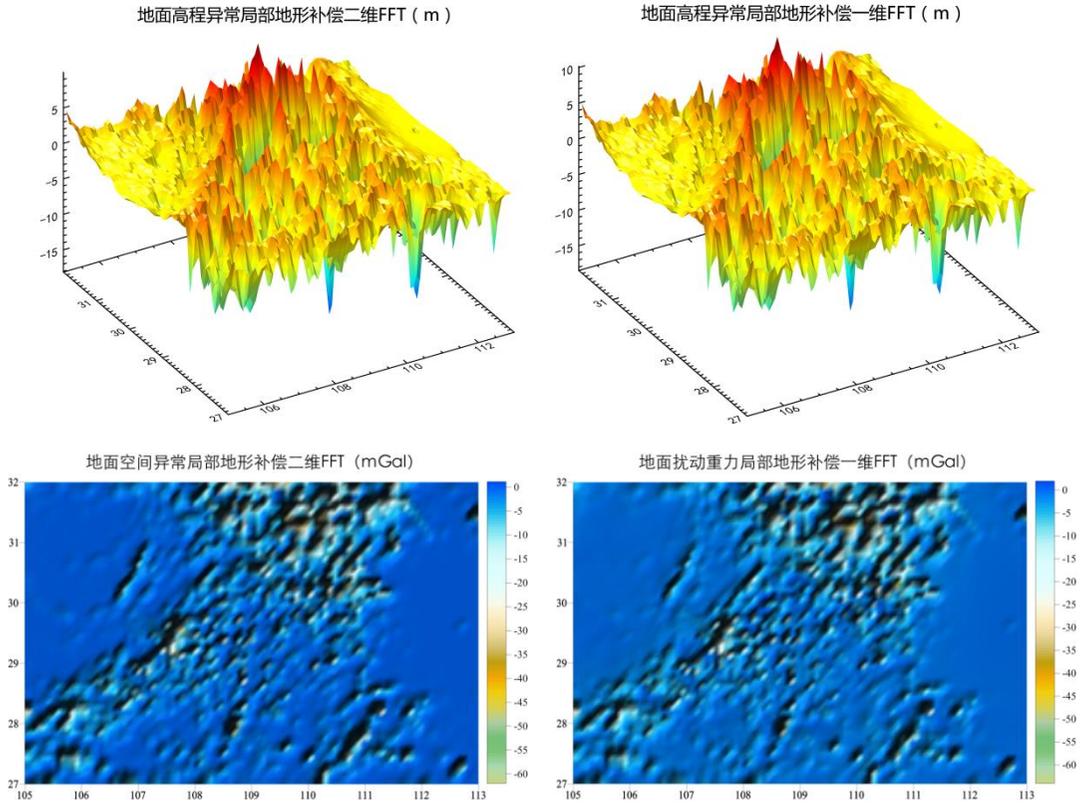
参数设置：如图 1。

- (1) 选择计算局部地形补偿的扰动重力场元类型和局部地形影响积分快速算法。
- (2) 输入局部地形影响积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

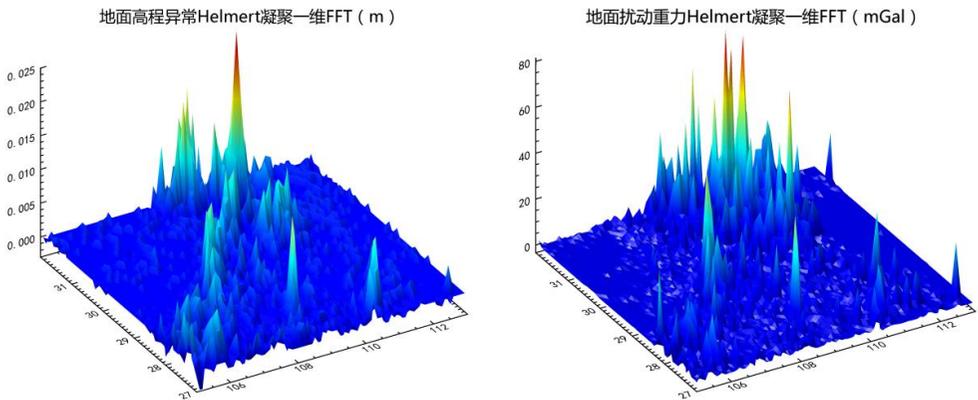


说明：

- (1) 局部地形补偿结果格网外围积分半径范围内，由于积分不充分，存在边缘效应。
- (2) 由某地区 $5' \times 5'$ 地面数字高程模型，采用 150km 积分半径，分别按二维 FFT、一维 FFT 算法，计算地面高程异常、地面扰动重力局部地形补偿，如图 3~6。



- (3) 采用一维 FFT 积分法计算地面高程异常地形 Helmert 凝聚、地面扰动重力地形 Helmert 凝聚，如图 7~8。



- (4) 地面高程异常局部地形补偿 FFT 算法、严密数值积分法的互差统计如表 1。

表 1	一维 FFT/A	二维 FFT/B	数值积分/C	A-C	B-C	B-A
最大值 m	10.1520	9.9950	10.1242	0.1382	0.3715	0.5260
最小值 m	-18.4810	-18.1220	-18.3920	-0.1545	-0.2198	-0.3580
平均值 m	0.0425	0.0425	0.0421	0.0004	0.0004	0.0000
标准差 m	2.8066	2.7872	2.8006	0.0180	0.0396	0.0519

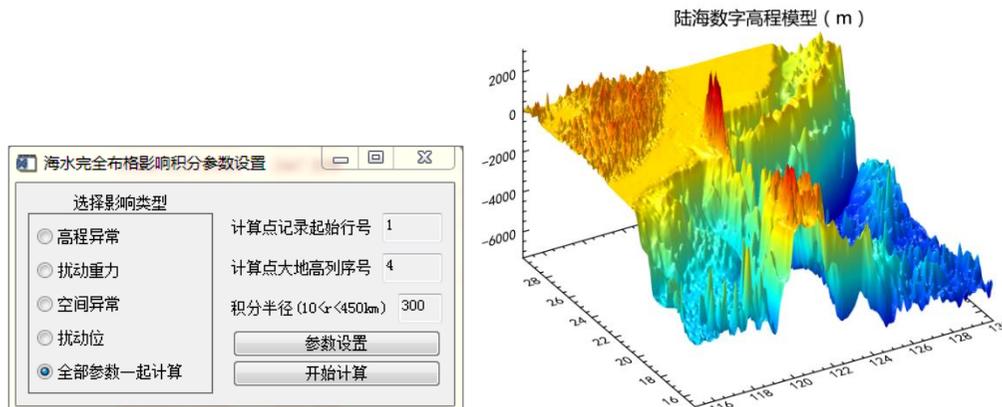
3.7 海水完全布格影响积分

功能：由海洋水深格网数字模型（陆地为零）、海面大地高格网数字模型，按严密积分公式，计算海面、地面及近地空间点的高程异常（m）、扰动重力（mGal）、空间异常（mGal）或扰动位（ m^2/s^2 ）的海水完全布格影响。

输入：格网规格完全相同的海洋水深格网数字模型和海面大地高数字模型，以及空间计算点文件。

参数设置：如图 1。

- (1) 选择计算海水完全布格影响的扰动重力场元类型。
- (2) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。
- (3) 输入海水完全布格影响积分半径 dr ， $10 < dr \leq 450km$ 。



输出：海水完全布格影响计算结果点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加一列或若干列海水完全布格影响积分值，保留 4 位有效数字。

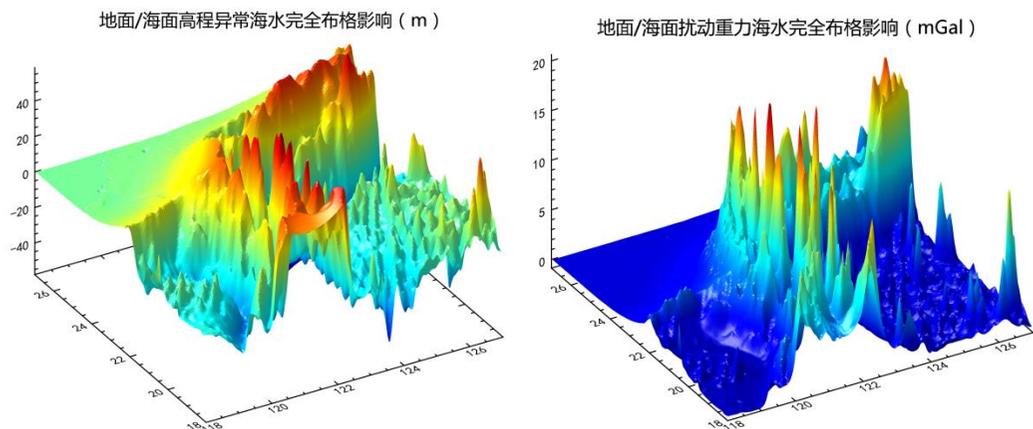
说明：

(1) 用某地区 $2.5' \times 2.5'$ 陆海地形模型（如图 2），采用 $300km$ 积分半径，计算地面/海面高程异常和扰动重力的海水完全布格影响，如图 3~4。

(2) 海水完全布格影响是指，将海洋水体由海水密度填充至陆地地形密度后，导致海面、陆地及地球外空间扰动重力场元的改变。

(3) 海水完全布格影响对沿海陆地与近地空间的各种类型扰动场元有贡献。

(4) 在深水海域，扰动重力的海水完全布格影响虽然只有十几毫伽大小，但高程异常的海水完全布格影响可达数十米。



(5) 类似于陆地地形质量完全布格影响，海水完全布格影响一般不直接用于重力场数据处理，而是用于计算剩余地形影响。

(6) 本程序适合近地空间海水完全布格影响计算，对于卫星高度处海水完全布格影响，请选用“3.12 完全布格影响球谐计算”。

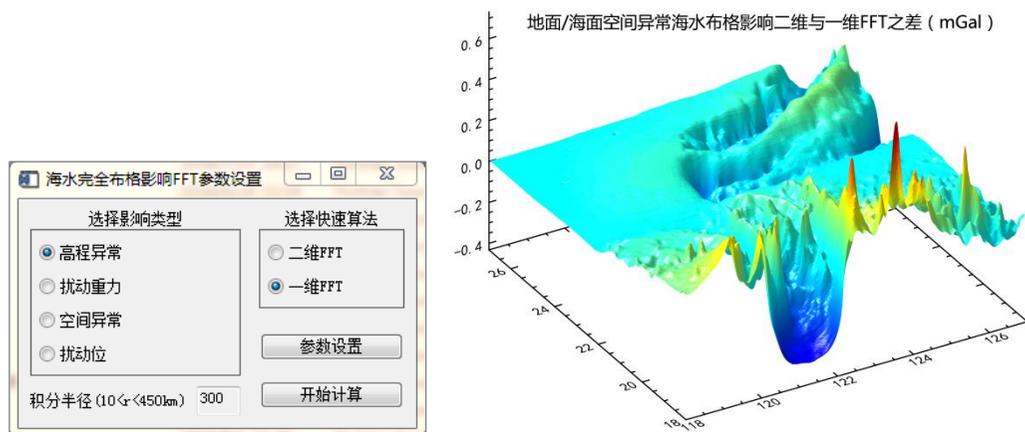
3.8 海水完全布格影响 FFT

功能：由海洋水深格网数字模型（陆地为零）、海面大地高格网数字模型，按 FFT 方法计算海面、地面及近地空间某一边界面上的高程异常（m）、扰动重力（mGal）、空间异常（mGal）或扰动位（ m^2/s^2 ）的海水完全布格影响。

输入：格网规格完全相同的海洋水深格网数字模型、地面大地高数字模型和计算边界面大地高数字模型文件。

参数设置：如图 1。

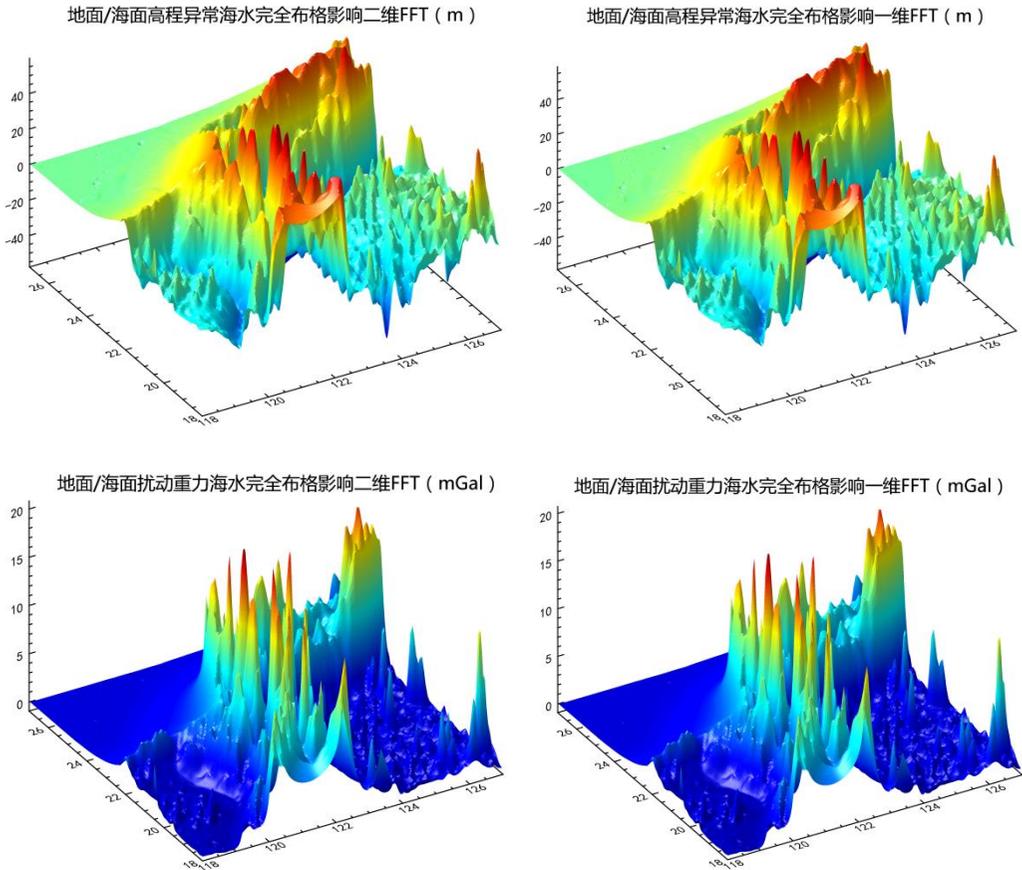
- (1) 选择计算海水完全布格影响的扰动重力场元类型和局部地形影响积分快速算法。
- (2) 输入海水完全布格影响积分半径 dr ， $10 < dr \leq 450km$ 。



说明：

(1) 海水完全布格影响结果格网外围积分半径范围内，由于积分不充分，存在边缘效应。

(2) 用某地区 2.5'×2.5'陆海数字高程模型，采用 300km 积分半径，分别按二维 FFT、一维 FFT 算法，计算地面/海面统一的高程异常、扰动重力海水完全布格影响，如图 3~6。



(3) 地面/海面高程异常海水完全布格影响 FFT 算法、严密数值积分法的互差如图 2、7、8，互差统计如表 1。

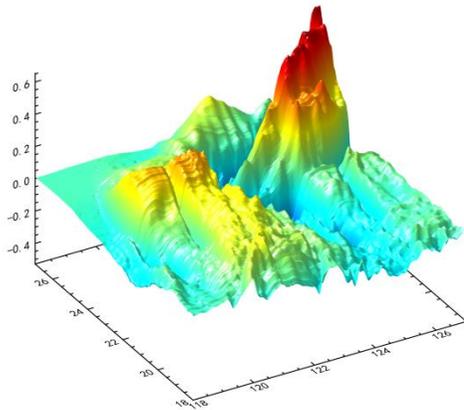
表 1	一维 FFT/A	二维 FFT/B	数值积分/C	A-C	B-C	B-A
最大值 m	20.7230	20.8270	20.6267	0.1000	0.6092	0.7350
最小值 m	-0.9080	-0.9350	-0.8703	-5.4735	-5.6225	-0.3290
平均值 m	1.8930	1.8946	1.9832	-0.0903	-0.0886	0.0017
标准差 m	2.8749	2.8880	2.9695	0.3227	0.3436	0.0970

(4) 地面/海面扰动重力海水完全布格影响 FFT 算法、严密数值积分法的互差统计

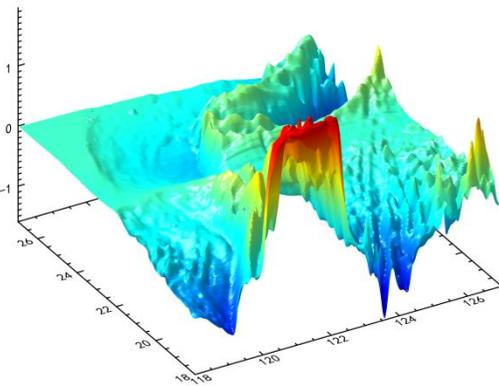
如表 2。

表 2	一维 FFT/A	二维 FFT/B	数值积分/C	A-C	B-C	B-A
最大值 mGal	10.1520	9.9950	10.1242	0.1382	0.3715	0.5260
最小值 mGal	-18.4810	-18.1220	-18.3920	-0.1545	-0.2198	-0.3580
平均值 mGal	0.0425	0.0425	0.0421	0.0004	0.0004	0.0000
标准差 mGal	2.8066	2.7872	2.8006	0.0180	0.0396	0.0519

地面/海面海水布格影响一维FFT与数值积分之差 (m)



地面/海面海水布格影响二维FFT与一维FFT之差 (m)



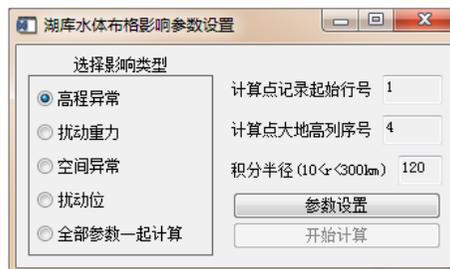
3.9 江河湖库布格影响积分

功能：由江河湖库水深格网数字模型（陆地为零）、水面大地高格网数字模型，按严密积分公式，计算地面及地球外部点高程异常(m)、扰动重力(mGal)、空间异常(mGal)或扰动位 (m^2/s^2) 的水体布格影响。

输入：格网规格完全相同的江河湖库水深格网数字模型和水面大地高数字模型，以及空间计算点文件。

参数设置：如图 1。

- (1) 选择计算水体布格影响的扰动重力场元类型。
- (2) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。
- (3) 输入水体布格影响积分半径 dr ， $10 < dr \leq 450km$ 。



输出：水体布格影响计算结果点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加一列或

若干列水体布格影响积分值，保留 4 位有效数字。

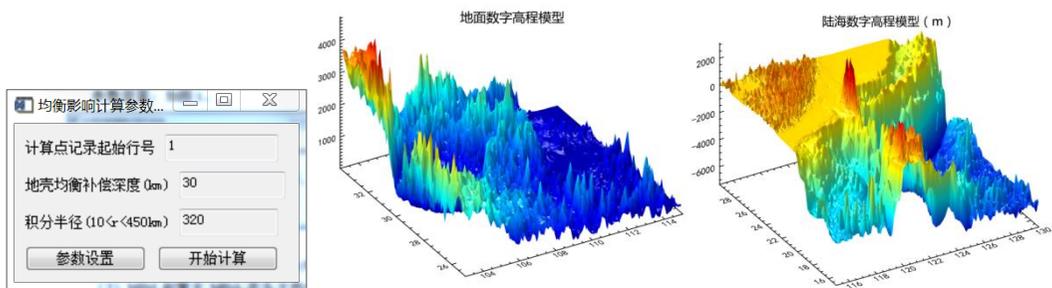
3.10 陆海地面重力均衡影响

功能：由陆海数字高程模型，按严密积分公式计算地面或海面重力点的地壳均衡影响 (mGal)。

输入：格网规格完全相同的陆海数字高程模型和海面大地高数字模型，以及地面/海面重力测点文件。

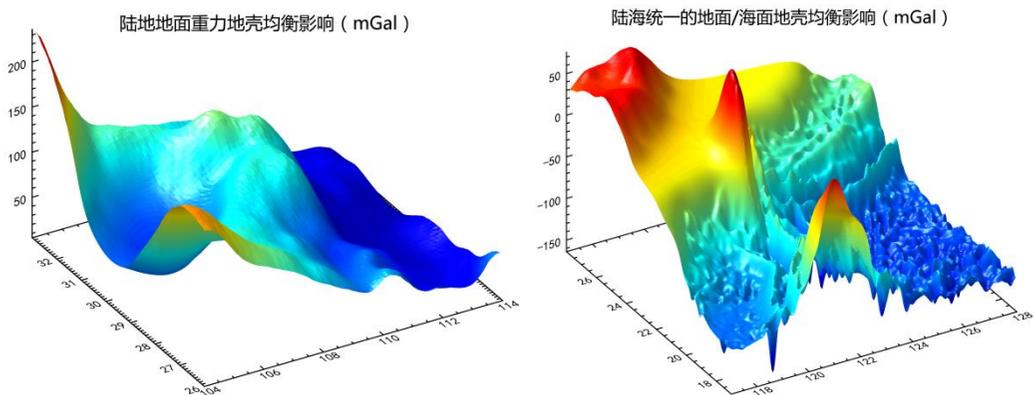
参数设置：如图 1。

- (1) 输入计算点记录起始行号和地壳均衡补偿深度 (km)。
- (2) 输入地壳均衡影响积分半径 dr ， $10 < dr \leq 450\text{km}$ 。



输出：地壳均衡影响计算结果点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加一列均衡影响积分值，保留 4 位有效数字。

说明：图 4 是由陆地地面数字高程模型 (图 2)，采用 320km 积分半径，计算的地面重力地壳均衡影响，图 5 是由陆海数字高程模型 (图 3) 计算得到陆海统一的地面/海面重力地壳均衡影响。



3.11 陆海地形质量球谐分析

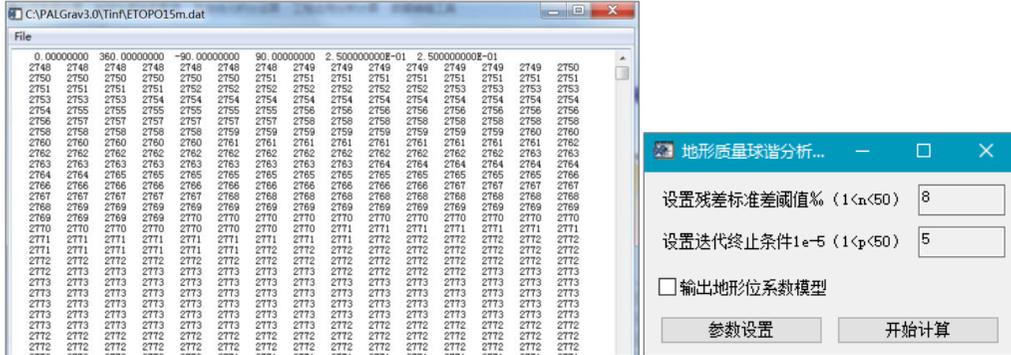
功能：由全球陆海数字高程模型，计算陆地和海水完全布格的地形质量 (用面密度表示)，对其进行球谐分析，将其用相应阶次的规格化球谐系数模型 (kg/m^2) 表示。

输入：如图 1。

(1) 全球陆海数字高程模型格网文件。程序要求全球陆海数字高程模型的格网经纬度为经度、地心纬度。

(2) 球谐系数阶数 n 等于陆海数字高程模型格网在地心纬度方向上的格网数。如 1° 分辨率陆海数字高程模型对应 $n = 180$ ， 0.25° 分辨率陆海数字高程模型对应 $n = 720$ 。

参数设置：如图 2。



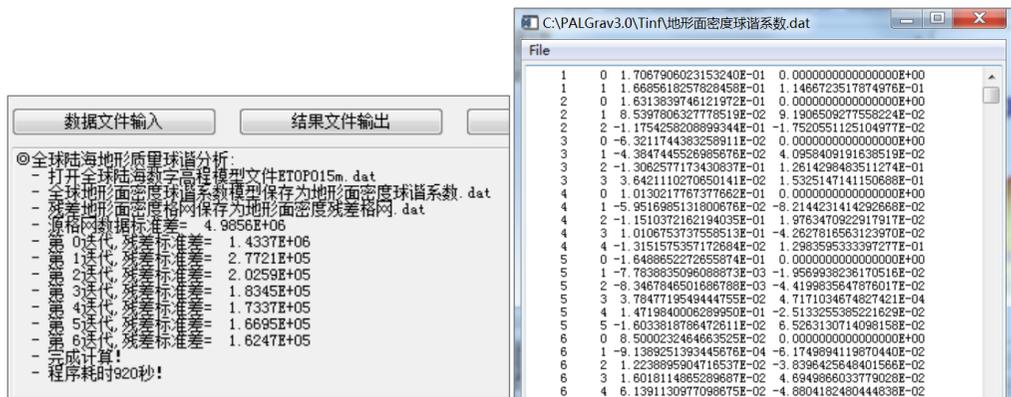
(1) 残差标准差阈值为残差标准差与陆海地形面密度标准差之比的百分数，迭代终止条件为前后两次迭代结果增量的标准差。满足两个条件之一时，迭代计算完成。

(2) 当选择输出地形位系数模型时，程序输出的球谐系数为地形质量生成的位系数，称为地形位系数 (m)。

输出：如图 3、4。

(1) 全球陆海地形面密度规格化球谐系数文件 (图 4)，残差陆海地形面密度格网数字模型文件，主界面输出的信息 (图 3)。

(2) 球谐系数文件不包含零阶项，零阶项大小 (kg/m^2) 见残差陆海地形面密度格网头文件第 7 个数。



(3) 残差格网头文件第 8 个数为球谐分析残差相对误差 (残差标准差与陆海地形面密度格网标准差之比)。

说明：

(1) 由 $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ 全球陆海数字高程模型 (图 1)，计算 720 阶地形面密度球谐系数。

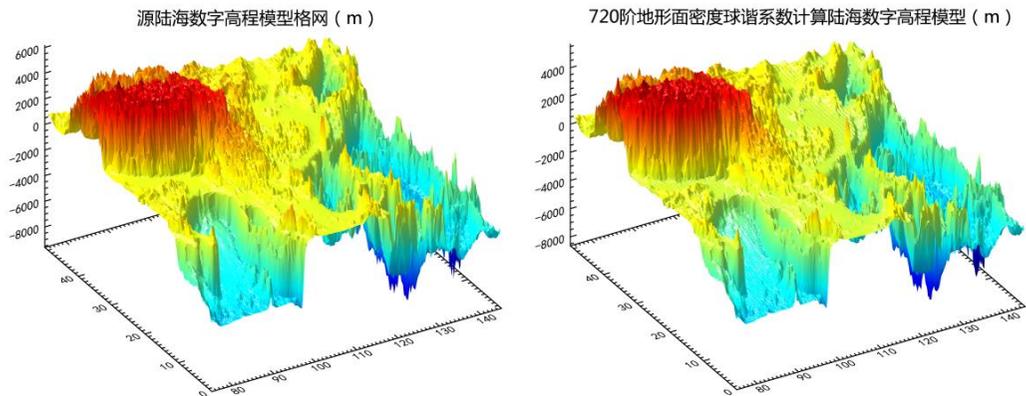
图 5 是从源 $0.25^{\circ} \times 0.25^{\circ}$ 全球陆海数字高程模型中截取的区域陆海数字高程模型，图 6 由 720 阶地形面密度球谐系数计算的区域陆海数字高程模型。

(2) 地陆地形面密度，等于地形高度与地形密度之积，表示单位面积的地形质量，地陆地形面密度恒大于零。

(3) 海洋地形面密度，等于海洋水深乘以海水密度与地形密度之差，表示单位面积的海洋水体补偿质量，海洋地形面密度恒小于零。

(4) 3 个一阶球谐系数(A_{10}, A_{11}, B_{11})，表示全球陆海地形质量的质心相对于地球质心在 3 个坐标方向上的位置偏移。

(5) 选择计算地形位系数 (m) 后，用户可直接调用“6.6 两组球谐系数模型运算”将其与地球重力场位系数进行加、减运算，实现各种类型场元完全布格地形影响、剩余地形影响的恢复、移去等解析运算。



(6) PALGrav3.0 安装目录下\data\地形面密度球谐系数 1800.dat, 是利用 $6^{\circ} \times 6^{\circ}$ ETOP 全陆海数字高程模型，按本程序计算的 1800 阶地形面密度球谐系数模型文件，地形高度模型残差标准差 7.2m。

3.12 完全布格影响球谐计算

功能：由全球地形面密度规格化球谐系数 (kg/m^2) 模型，按指定的球谐系数阶数范围，计算地面或地球外部任意点 BLH(3) 的高程异常 (m)、空间异常 (mGal)、扰动重力 (mGal)、垂线偏差向量 (s, "/秒, 南向、西向)、(垂向) 扰动重力梯度 (E)、水平重力梯度向量 (E, 北向、东向) 或扰动位 (m^2/s^2) 的完全布格影响或剩余地形影响。

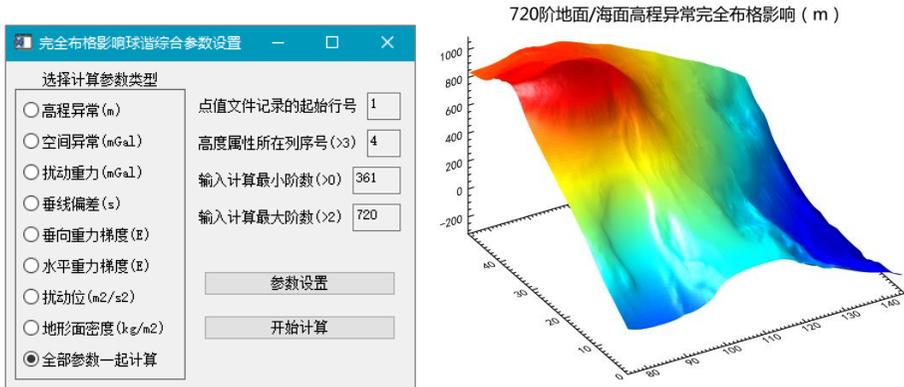
程序可实现卫星重力梯度、海洋测高垂线偏差、海洋重力、航空重力等空天海地统一、各种场元解析相容的地形处理能力。

输入：

- (1) 全球陆海地形面密度规格化球谐系数模型 (kg/m^2) 文件。
- (2) 待计算的点值文件。高度为计算点相对于地面或海面的高度。

参数设置：如图 1。

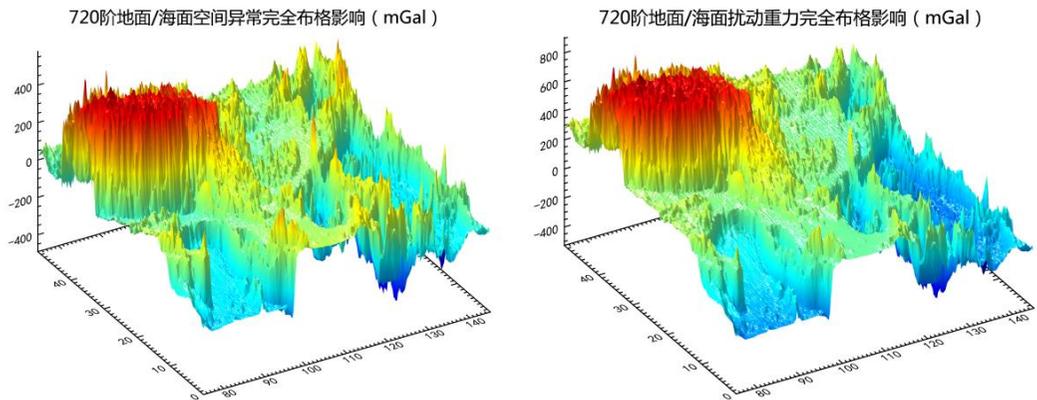
- (1) 选择计算完全布格影响或剩余地形影响的扰动重力场元类型。
- (2) 指定文件记录起始行号 n （即第1至 $n - 1$ 行是头文件）。
- (3) 指定高度属性（相对于地面/海面的高度）所在的列序号。
- (4) 输入最小计算阶数（ $Nmin$ ）和最大计算阶数 $Nmax(> Nmin)$ 。
- (5) 仅当 $Nmin = 1$ 时，程序自动由将陆海“地形面密度（ kg/m^2 ）”转换为陆地地形高度（ $> 0, \text{m}$ ）或海洋水深（ $< 0, \text{m}$ ）。



说明：

(1) 由全球 $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ 陆海数字高程模型格网模型，经“3.11 陆海地形面密度球谐分析”，生成 720 阶全球陆海地形面密度规格化球谐系数模型，计算距地面某区域范围内高程异常、空间异常、扰动重力的完全布格影响，如图 2~4。

(2) 扰动重力场元完全布格影响的绝对值很大，一般不直接用于重力场数据处理，主要用于计算剩余地形影响。

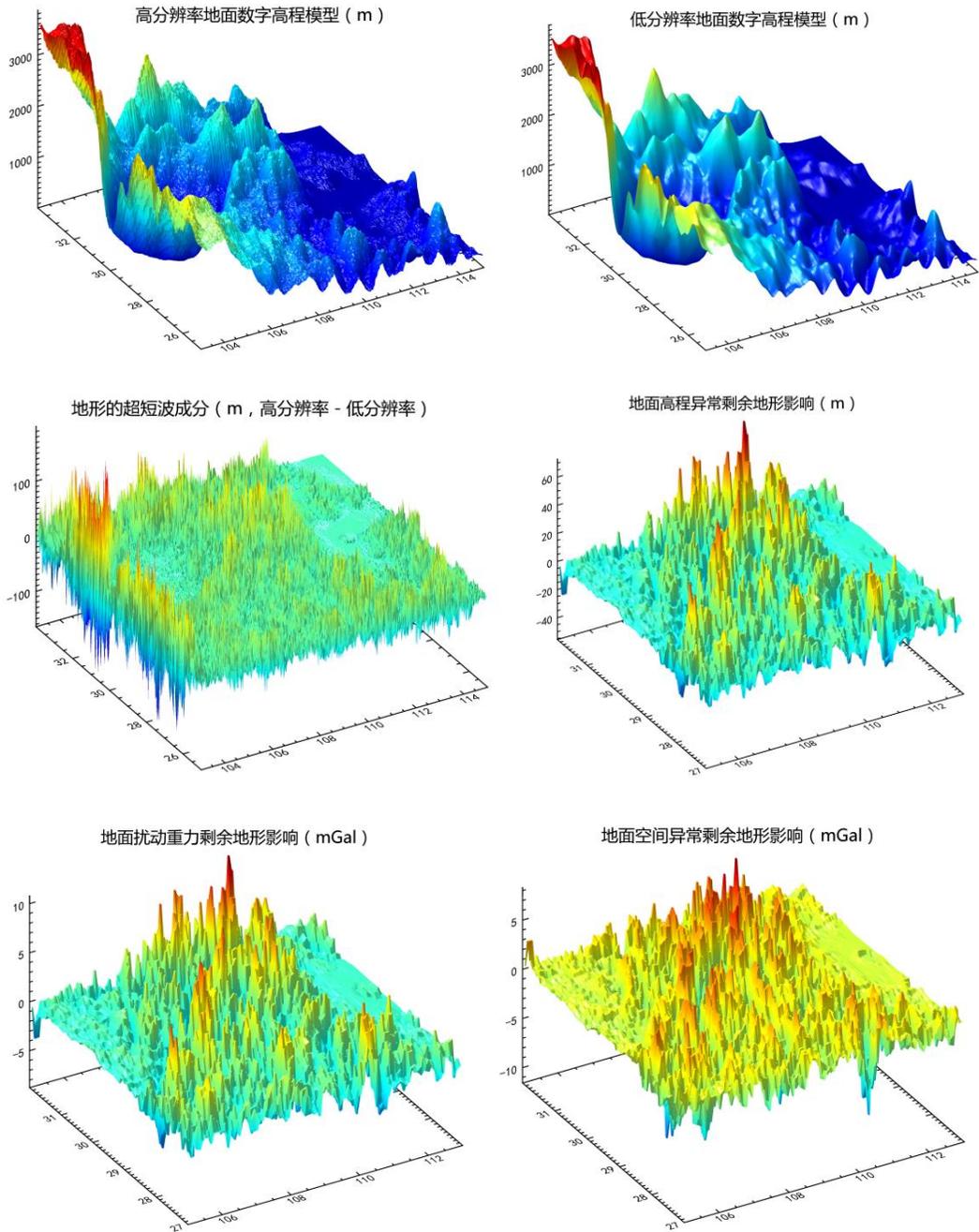


3.13 地球外部剩余地形影响

剩余地形影响是完全布格影响的中短波成分。PALGrav3.0 系统能提供两种地面及地球外部、各种类型扰动重力场元、陆海统一的剩余地形影响算法，以满足不同场合下复杂多源重力场数据处理的需要。

(1) 由区域高分辨率地形与低分辨率地形的差异构造区域陆海剩余地形影响

⊙利用“2.10 格网的低通滤波运算”功能，选择滑动平均低通滤波器，由高分辨率地面数字高程模型（图 1），生成低分辨率地面数字高程模型（图 2）。



⊙由高分辨率地面数字高程模型，分别计算局部地形影响和球壳地形质量影响，两者相加，得到高分辨率完全布格影响。

⊙由低分辨率地面数字高程模型，分别计算局部地形影响和球壳地形质量影响，两者相加，得到低分辨率完全布格影响。

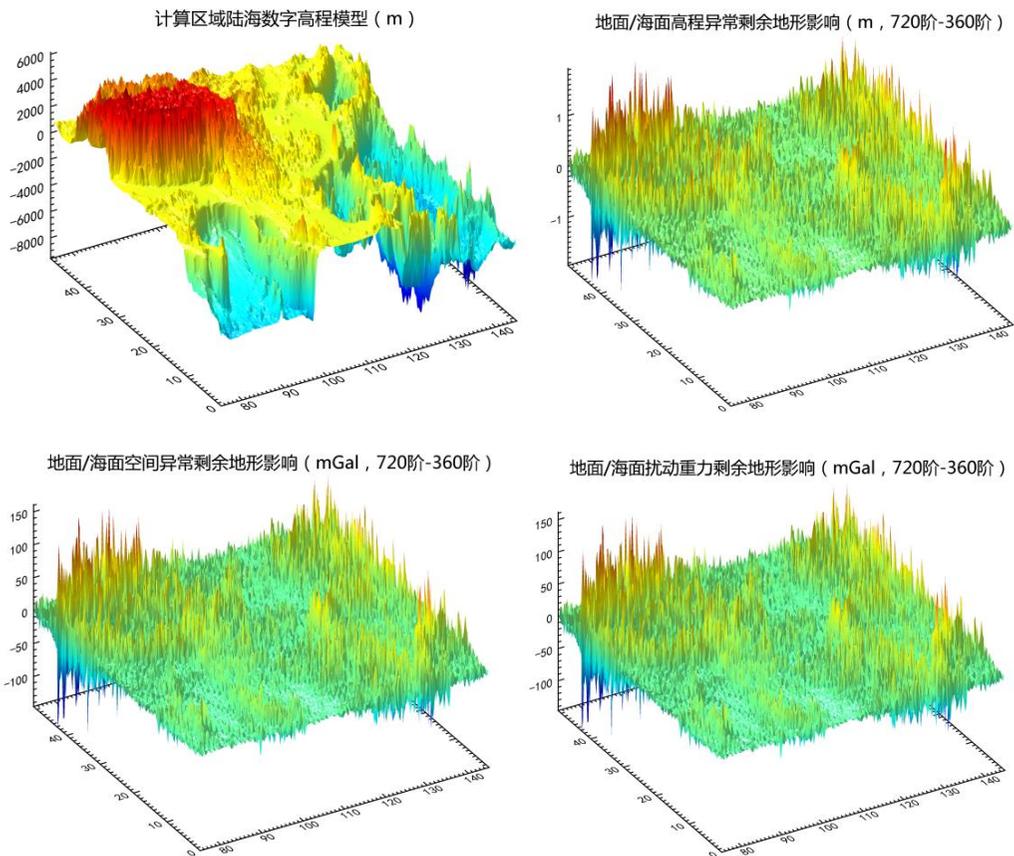
⊙将高、低分辨率完全布格影响相减，就得到剩余地形影响。如图 3~6。

⊙球壳地形质量影响采用球近似算法，因此由高分辨率地形与低分辨率地形差异构造的剩余地形影响，主要适用于近地空间重力场数据处理与大地水准面精化。

(2) 用地形面密度规格化球谐系数模型的中高阶部分表示全球剩余地形影响

⊙利用“3.12 完全布格影响球谐计算”功能，由地形面密度球谐系数模型，取较小数为最小计算阶数，较大数为最大计算阶数，直接计算地面、海面或地球外部高程异常、空间异常、扰动重力和垂线偏差的剩余地形影响。

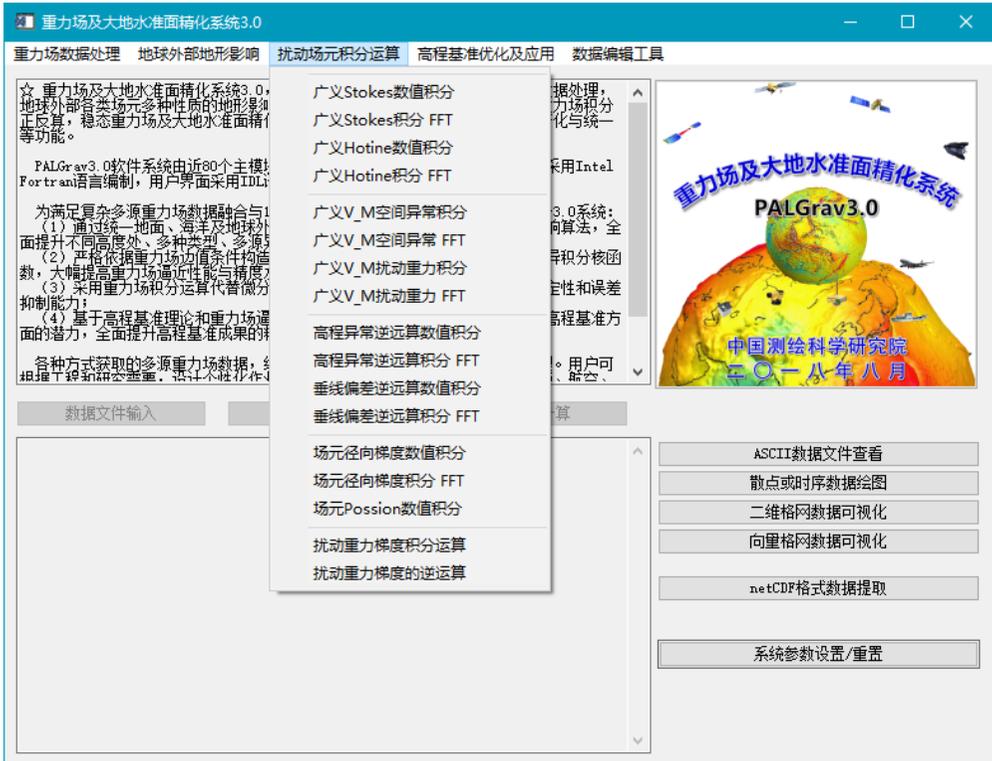
⊙取最小计算阶数为 361 阶，最大计算阶数为 720，得到陆海统一的地面/海面剩余地形影响，如图 8~10。



⊙利用全球陆海地形面密度球谐系数模型，可方便地计算地球外部包括航空与卫星高度处的剩余地形影响，构造各种类型场元剩余地形影响的移去恢复算法，提高航空、卫星重力场数据处理水平。

第四章 扰动场元积分运算

为全面提升重力场逼近性能与大地水准面精化水平，PALGrav3.0 构建了功能较为完备的重力场积分算法体系，以实现地球外部任意高度上高程异常、扰动重力、空间异常、垂线偏差与重力梯度的正反积分及微分运算，确定任意高度各类场元的径向梯度，实现多种类型场元的向上向下解析延拓。



4.1~4.4 用于计算大地水准面高及大地水准面外部高程异常，4.5~4.8 用于计算大地水准面及其外部垂线偏差，4.9~4.12 为重力场积分逆运算，4.13~4.15 用于扰动重力场元解析延拓计算，4.16~4.17 用于扰动重力梯度积分运算。

4.1 广义 Stokes 数值积分

功能：由等位面大地高数字模型（m）及其面上的空间异常数字模型（mGal），按严密广义 Stokes 积分公式，计算地面及地球外部点的高程异常（m）。

输入：

- (1) 大地水准面外部空间计算点文件，如图 1。
- (2) 等位面残差空间异常数字模型（mGal）文件，如图 2。
- (3) 格网规格完全相同的等位面大地高数字模型（m）文件，如图 3。等位面大地高数字模型可由“5.7 过指定点的模型等位面构造”生成。

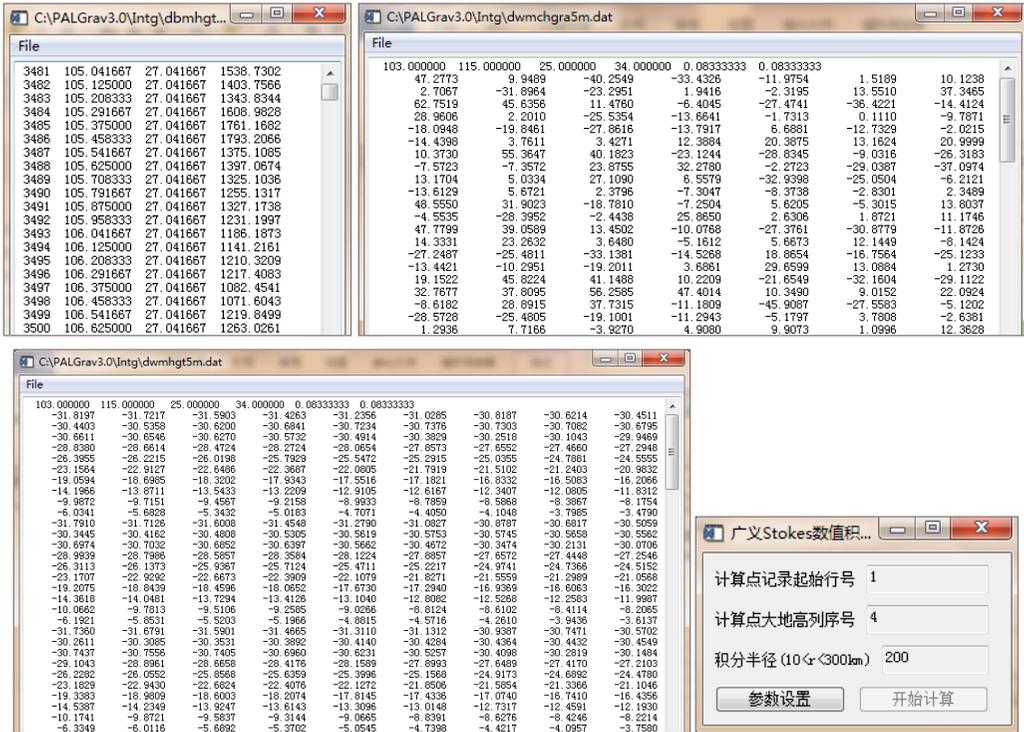
参数设置：如图 4。

(1) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。

(2) 输入 Stokes 积分半径 dr , $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

⊙为实现有限半径积分, 通常需利用参考重力场系数模型, 由“2.3 模型重力场元点值计算”计算被积空间异常的模型值, 并从空间异常中移去模型值后, 用残差空间异常作为广义 Stokes 积分被积场元。

⊙残差空间异常 = 空间异常 - 模型空间异常 (- 空间异常地形影响)。



输出: 残差高程异常点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加一列该点的残差高程异常积分值, 保留 4 位有效数字。

说明:

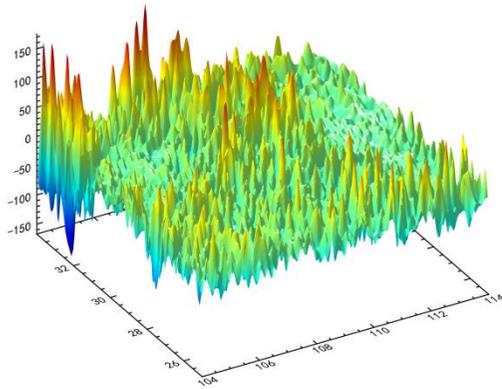
(1) 利用 EGM2008 重力场模型, 按“2.3 模型重力场元点值计算”, 生成区域大地水准面上 $2.5' \times 2.5'$ 模型残差空间异常和模型残差地面高程异常 (1800 阶模型值与 360 阶模型值之差)。

(2) 采用 200km 积分半径, 按广义 Stokes 数值积分, 由大地水准面上残差空间异常, 得到残差地面高程异常积分值, 如图 5~7。

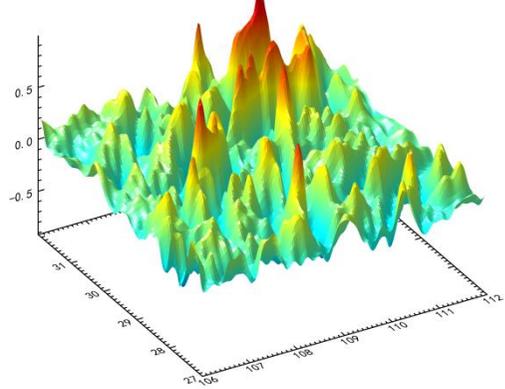
(3) 以 EGM2008 模型残差地面高程异常为参考真值, 计算残差地面高程异常积分值与模型残差地面高程异常之差, 如图 8。残差地面高程异常的统计结果如表 1。

(4) 广义 Stokes 积分基于 Stokes 边值问题, 要求被积扰动场元 (这里是残差空间异常) 位于某一等位面上 (图 5 中的残差空间异常位于等位的大地水准面上, 等位面大地高格网模型用模型大地水准面高格网表示)。

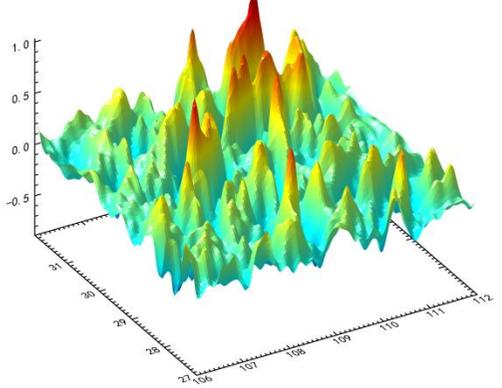
EGM2008模型残差空间异常 (1800阶-360阶, mGal)



广义Stokes积分残差地面高程异常 (m)



EGM2008模型残差地面高程异常 (m)



广义Stokes积分与模型残差高程异常之差 (m)

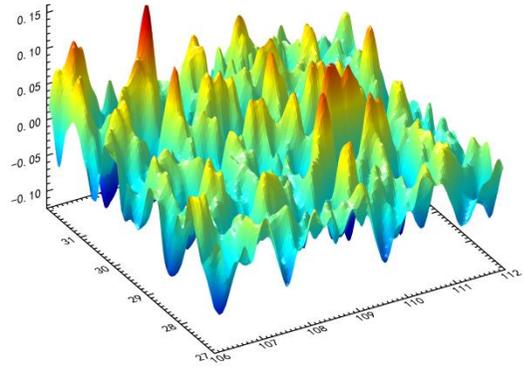


表 1	Stokes 积分/A	EGM2008 模型/B	A—B
最大值 m	0.994	1.027	0.160
最小值 m	-0.917	-0.885	-0.124
平均值 m	-0.003	-0.003	0.000
标准差 m	0.198	0.204	0.036

4.2 广义 Stokes 积分 FFT

功能：由等位面大地高数字模型 (m) 及其面上的空间异常数字模型 (mGal)，按广义 Stokes 积分 FFT 方法，计算其他边界面上高程异常数字模型 (m)。

输入：格网规格完全相同的等位面大地高数字模型、空间异常数字模型 (mGal) 和计算边界面大地高数字模型文件。

参数设置：如图 1。

(1) 选择广义 Stokes 积分快速算法 (二维 FFT/一维 FFT)。

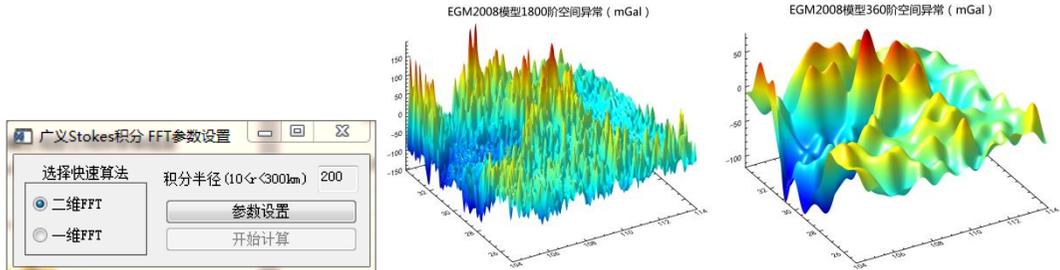
(2) 输入积分半径 dr , $10 < dr \leq 300$ km。

⊙程序通过控制广义 Stokes 核函数的定义域, 实现固定积分半径的 FFT 算法。

输出:

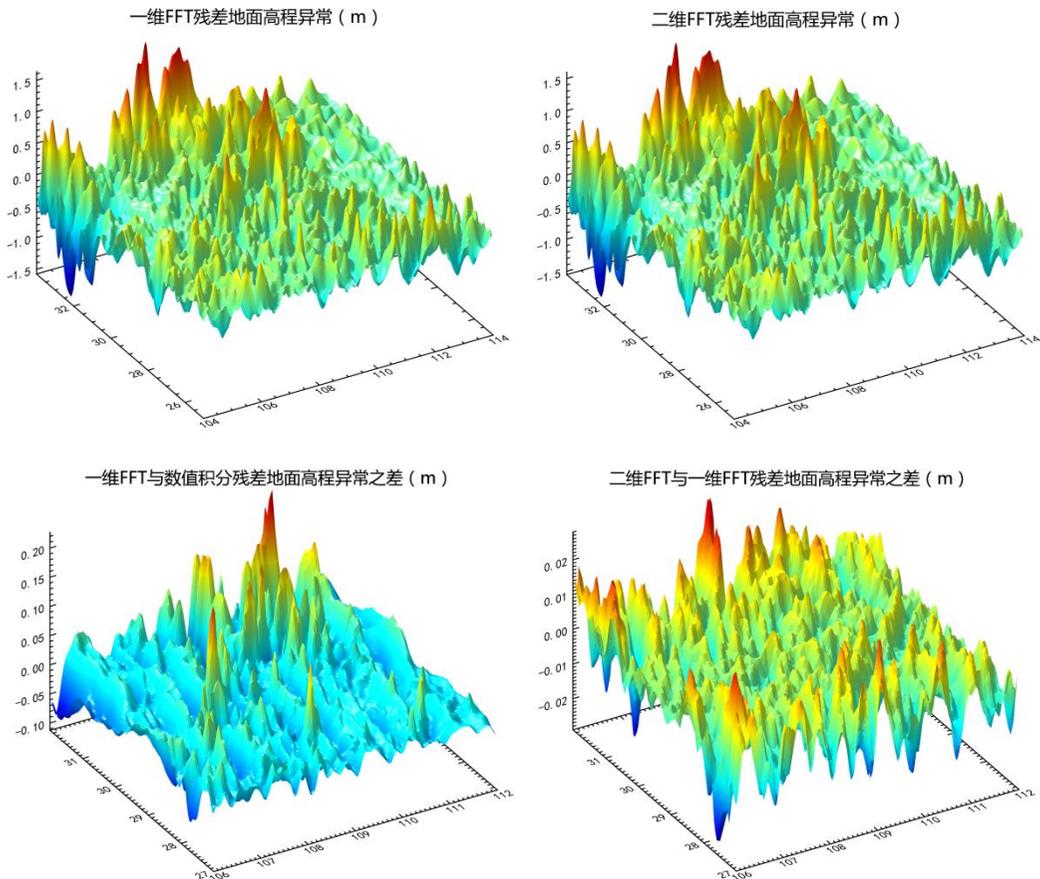
(1) 边界面上残差高程异常格网数字模型文件。

(2) 残差高程异常格网边缘积分半径范围内, 积分不充分, 存在边缘效应。



说明:

(1) 利用 EGM2008 重力场模型, 按“2.3 模型重力场元点值计算”, 生成区域大地上 2.5'×2.5'模型残差空间异常和模型残差地面高程异常 (1800 阶模型值与 360 阶模型值之差)。



(2) 采用 200km 积分半径，按广义 Stokes 积分 FFT 算法，由大地水准面上残差空间异常，计算残差地面高程异常积分值，如图 4~5。

(3) 二维 FFT、一维 FFT、数值积分法、EGM2008 模型残差地面高程异常，相互之间差异如图 6~9。

(4) 以 EGM2008 模型残差地面高程异常为参考真值，各种残差地面高程异常的统计结果如表 1，互差统计结果如表 2。

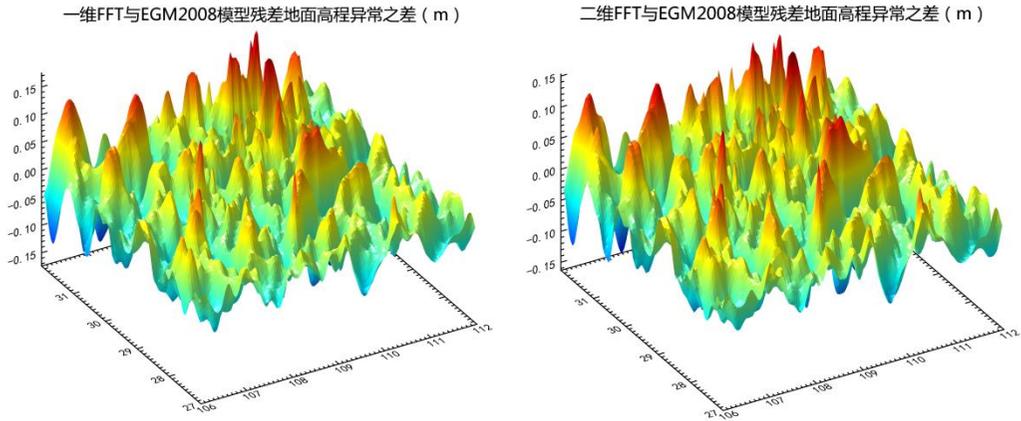


表 1	一维 FFT/A	二维 FFT/B	数值积分/C	模型/D
最大值 m	1.195	1.167	0.994	1.027
最小值 m	-0.936	-0.928	-0.917	-0.885
平均值 m	-0.000	-0.000	-0.003	-0.003
标准差 m	0.213	0.212	0.198	0.204

表 2	A — C	B — C	B — A	A — D	B — D
最大值 m	0.227	0.201	0.028	0.226	0.201
最小值 m	-0.112	-0.094	-0.029	-0.112	-0.094
平均值 m	0.003	0.003	0.000	0.003	0.003
标准差 m	0.028	0.026	0.006	0.027	0.026

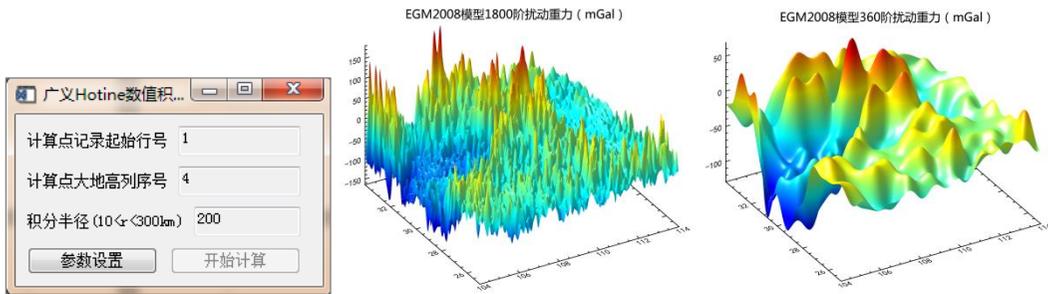
4.3 广义 Hotine 数值积分

功能：由等位面大地高数字模型 (m) 及其面上的扰动重力数字模型 (mGal)，按严密广义 Hotine 积分公式，计算地面及地球外部点的高程异常 (m)。

输入：

- (1) 地球外部空间计算点文件。
- (2) 等位面残差扰动重力数字模型 (mGal) 文件，图 2 与图 3 之差。
- (3) 格网规格完全相同的等位面大地高数字模型 (m) 文件。等位面大地高数字模型可由“5.7 过指定点模型等位面构造”生成。

参数设置：如图 1。



(1) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。

(2) 输入 Hotine 积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

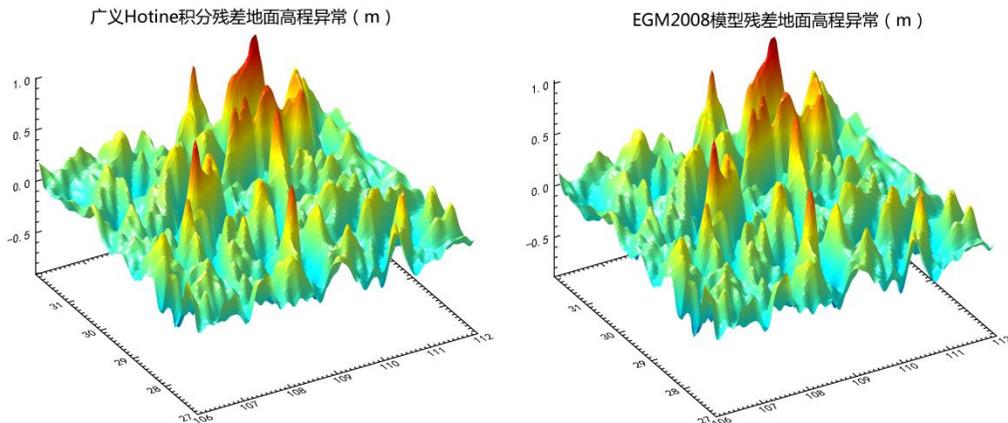
⊙残差扰动重力 = 扰动重力 - 模型扰动重力 (- 扰动重力地形影响)。

输出：残差高程异常点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加一列该点的残差高程异常积分值，保留 4 位有效数字。

说明：

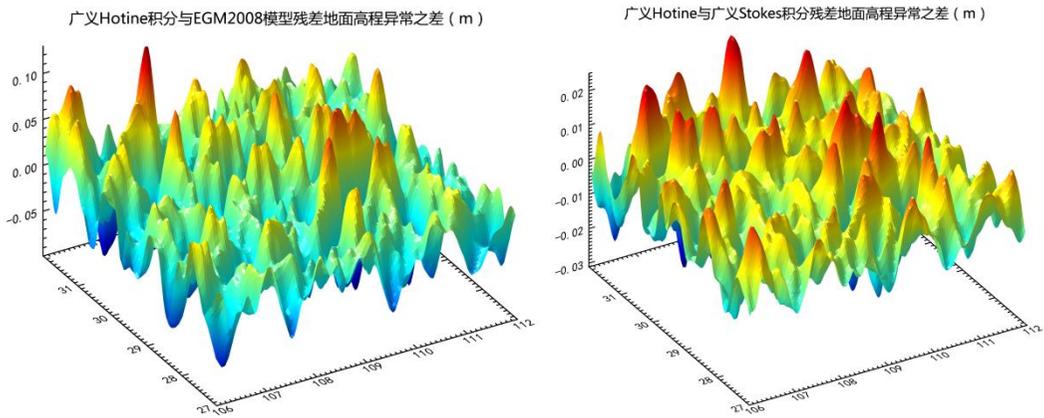
(1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成大地水准面上 $2.5' \times 2.5'$ 残差扰动重力和残差地面高程异常 (1800 阶模型值与 360 阶模型值之差)。

(2) 采用 200km 积分半径，按广义 Hotine 数值积分，由大地水准面上残差扰动重力，得到残差地面高程异常积分值，如图 4。



(3) 以 EGM2008 模型残差地面高程异常为参考真值，计算 Hotine 残差地面高程异

常积分值与 EGM2008 模型残差地面高程异常之差，如图 6。残差地面高程异常的统计结果如表 1。



(4) 广义 Hotine 积分基于 Stokes 边值问题，要求被积扰动场元（这里是残差扰动重力）位于某一等位面上（残差扰动重力位于等位的大地水准面上，等位面大地高格网模型用模型大地水准面高格网表示）。

表 1	Hotine/A	Stokes/B	模型/C	A — B	A — C
最大值 m	1.004	0.994	1.027	0.025	0.130
最小值 m	-0.906	-0.917	-0.885	-0.031	-0.099
平均值 m	-0.003	-0.003	-0.003	0.000	0.000
标准差 m	0.198	0.198	0.204	0.007	0.029

4.4 广义 Hotine 积分 FFT

功能：由等位面大地高数字模型（m）及其面上的扰动重力数字模型（mGal），按广义 Hotine 积分 FFT 方法，计算其他边界面上高程异常数字模型（m）。

输入：格网规格完全相同的等位面大地高数字模型、扰动重力数字模型（mGal）和计算边界面大地高数字模型文件。

参数设置：如图 1。

- (1) 选择广义 Hotine 积分快速算法（二维 FFT/一维 FFT）。
- (2) 输入积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300$ km。

⊙程序通过控制广义 Hotine 核函数的定义域，实现固定积分半径的 FFT 算法。

输出：

- (1) 边界面上残差高程异常格网数字模型文件。

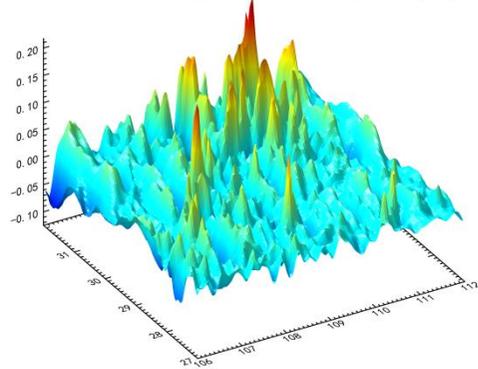
(2) 残差高程异常格网边缘积分半径范围内，积分不充分，存在边缘效应。

说明：

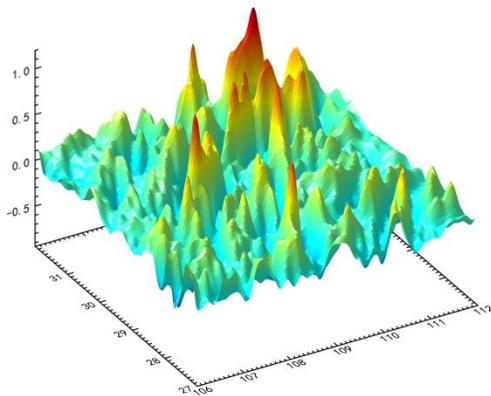
(1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成区域大地水准面上 2.5'×2.5'模型残差扰动重力和模型残差地面高程异常（1800 阶模型值与 360 阶模型值之差）。



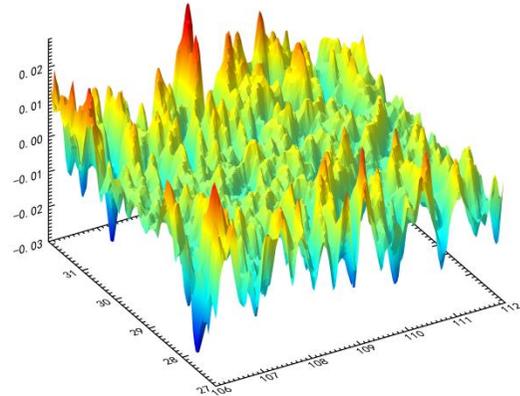
一维FFT与Hotine数值积分残差地面高程异常之差 (m)



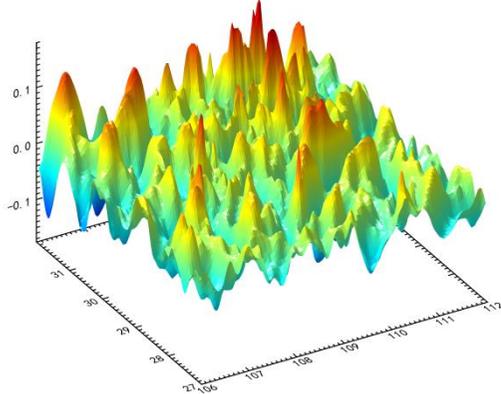
广义Hotine—一维FFT残差地面高程异常 (m)



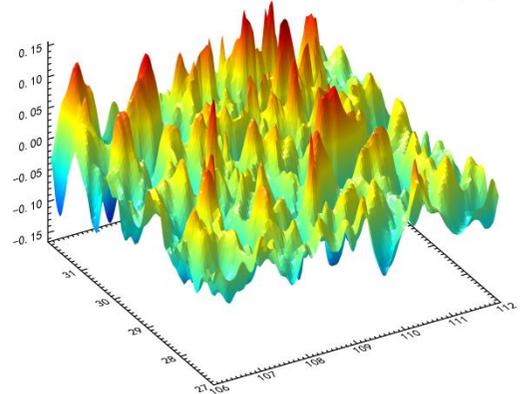
二维FFT与一维FFT残差地面高程异常之差 (m)



Hotine—一维FFT与EGM2008模型残差地面高程异常之差 (m)



Hotine二维FFT与EGM2008模型残差地面高程异常之差 (m)



(2) 采用 200km 积分半径，按广义 Hotine 积分 FFT 算法，由大地水准面上残差扰动重力，得到残差地面高程异常积分值，如图 3。

(3) 二维 FFT、一维 FFT、数值积分法、EGM2008 模型残差地面高程异常，相互之间差异如图 2、4~6。

(4) 以 EGM2008 模型残差地面高程异常为参考真值，得到各种残差地面高程异常及其互差，其统计结果如表 1。

表 1	一维 FFT/A	二维 FFT/B	模型/C	A—C	B—A
最大值 m	1.200	1.171	1.027	0.180	0.028
最小值 m	-0.940	-0.932	-0.885	-0.176	-0.030
平均值 m	-0.001	-0.000	-0.003	0.003	0.000
标准差 m	0.214	0.213	0.204	0.039	0.006

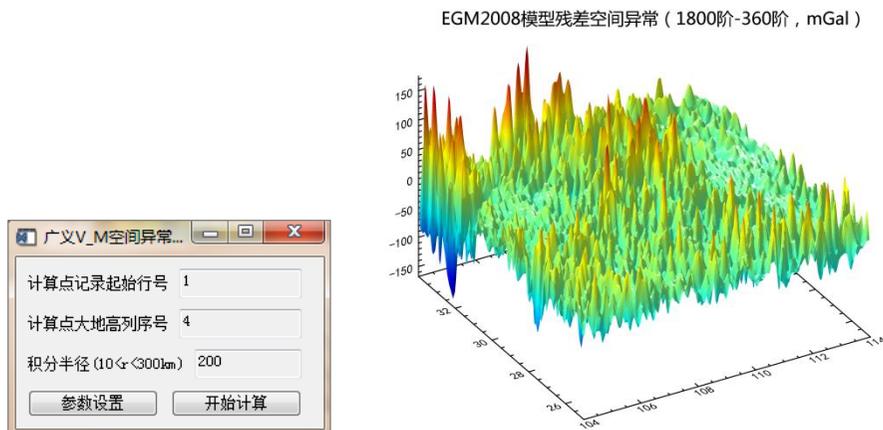
4.5 广义 V_M 空间异常积分

功能：由等位面大地高数字模型及其面上的空间异常（mGal）格网数字模型，按严密广义 Vening-Meinesz 积分公式，计算地面及地球外部点的垂线偏差向量（"）。

输入：

- (1) 地面及地球外部空间计算点文件。
- (2) 等位面残差空间异常数字模型（mGal）文件，如图 2。
- (3) 格网规格完全相同的等位面大地高数字模型（m）文件。等位面大地高数字模型可由“5.7 过指定点模型等位面构造”生成。

参数设置：如图 1。



- (1) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。

(2) 输入 Vening-Meinesz 积分半径 dr , $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

⊙残差空间异常 = 空间异常 - 模型空间异常 (- 空间异常地形影响)。

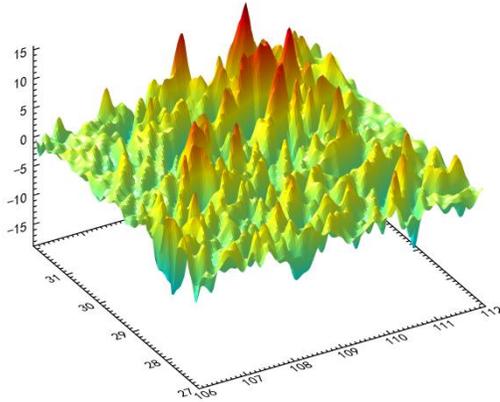
输出: 残差垂线偏差向量点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加两列该点的残差垂线偏差向量积分值, 保留 4 位有效数字。

说明:

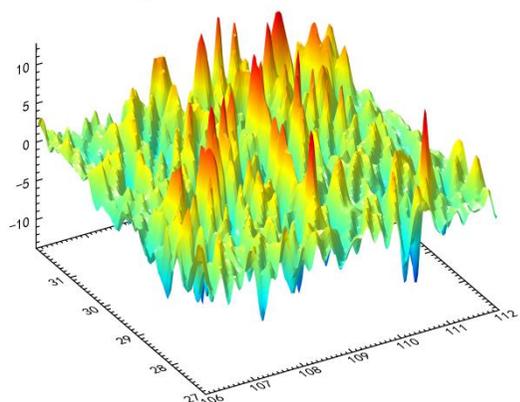
(1) 利用 EGM2008 重力场模型, 按“2.3 模型重力场元点值计算”, 生成区域大地水准面上 $2.5' \times 2.5'$ 模型残差空间异常和模型残差地面垂线偏差 (1800 阶模型值与 360 阶模型值之差)。

(2) 采用 200km 积分半径, 按广义 Vening-Meinesz 数值积分, 由大地水准面上残差扰动重力, 得到残差地面垂线偏差积分值, 如图 3、4。

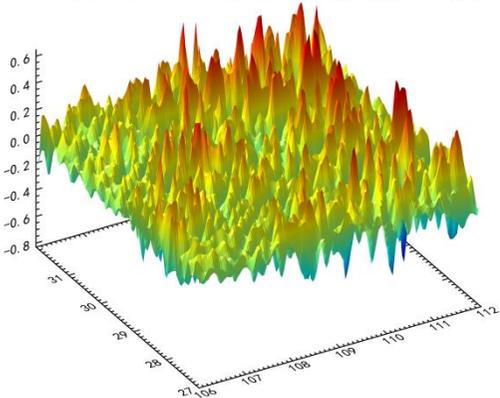
广义Vening-Meinesz积分残差地面垂线偏差南向分量(秒)



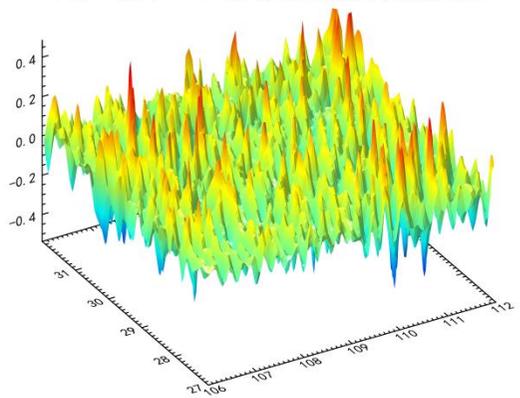
广义Vening-Meinesz积分残差地面垂线偏差西向分量(秒)



广义V-M积分与EGM2008模型残差地面垂线偏差南向分量之差(秒)



广义V-M积分与EGM2008模型残差地面垂线偏差西向分量之差(秒)



(3) 以 EGM2008 模型残差地面垂线偏差为参考真值, 计算 Vening-Meinesze 残差地面垂线偏差积分值与 EGM2008 模型残差地面垂线偏差之差, 如图 5、6。残差地面垂线偏差的统计结果如表 1。

(4) 广义 Vening-Meinesz 积分空间异常公式, 由广义 Stokes 积分公式水平微分导出, 属于 Stokes 边值问题。因此, 要求被积扰动场元 (这里是残差空间异常) 位于某一

等位面上（图 2 中的残差空间异常位于等位的大地水准面上，等位面大地高格网模型用模型大地水准面高格网表示）。

表 1	积分 S/A	模型 S/B	A—B	积分 W/C	模型 W/D	C—D
最大值"	15.588	16.079	0.647	12.709	13.066	0.486
最小值"	-18.754	-19.353	-0.830	-13.736	-13.870	-0.537
平均值"	0.007	0.007	0.000	0.005	0.005	0.000
标准差"	2.937	3.048	0.145	2.900	2.948	0.090

4.6 广义 V_M 空间异常 FFT

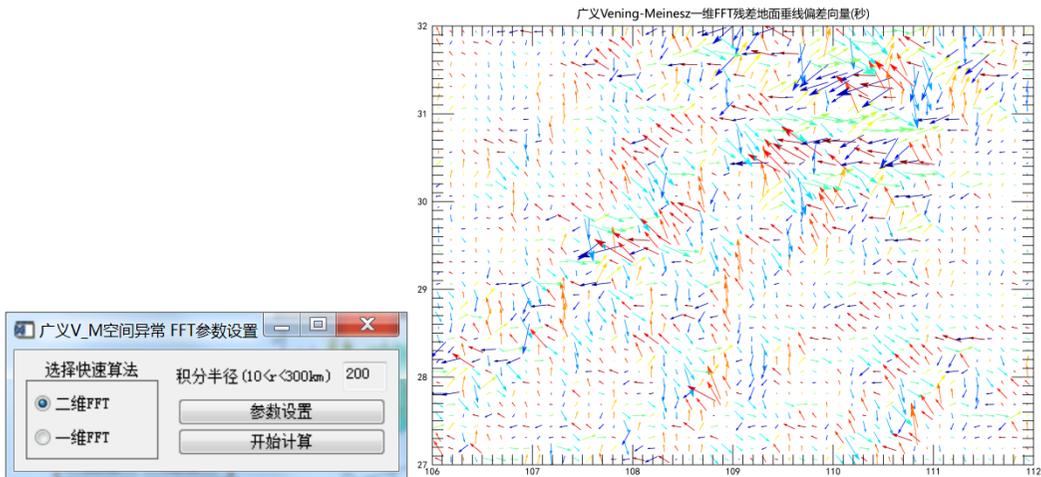
功能：由等位面大地高数字模型及其面上的空间异常（mGal）格网数字模型，按广义 Vening-Meinesz 积分快速 FFT 算法，计算其他边界面上的垂线偏差向量（"）向量格网模型。

输入：格网规格完全相同的等位面大地高数字模型、空间异常数字模型（mGal）和计算边界面大地高数字模型文件。

参数设置：如图 1。

- (1) 选择广义 Vening-Meinesz 积分快速算法（二维 FFT/一维 FFT）。
- (2) 输入积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300$ km。

⊙程序通过控制广义 Vening-Meinesz 积分核函数的定义域，实现固定积分半径的 FFT 算法。



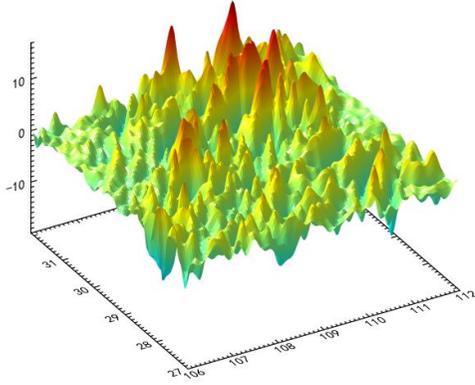
输出：

- (1) 边界面上残差垂线偏差向量格网模型文件。
- (2) 残差垂线偏差向量格网边缘积分半径范围内，积分不充分，存在边缘效应。

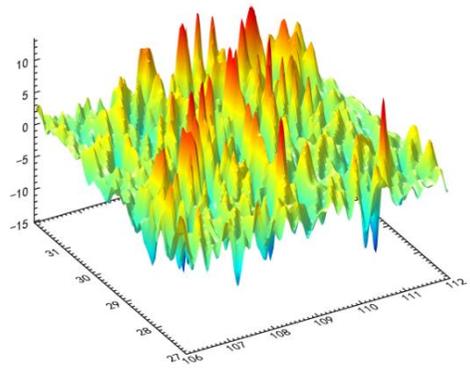
说明：

(1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成区域大地水准面上 2.5'×2.5'残差空间异常和模型残差地面垂线偏差向量格网（1800 阶模型值与 360 阶模型值之差）。

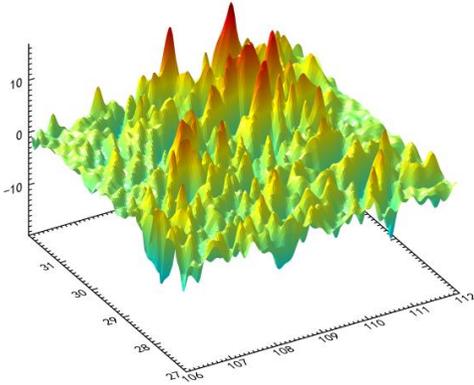
广义V-M一维FFT残差地面垂线偏差南向分量(秒)



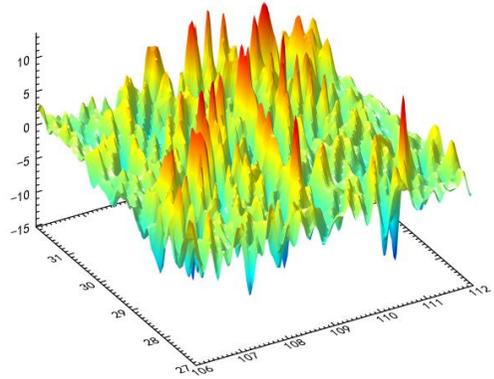
广义V-M一维FFT残差地面垂线偏差西向分量(秒)



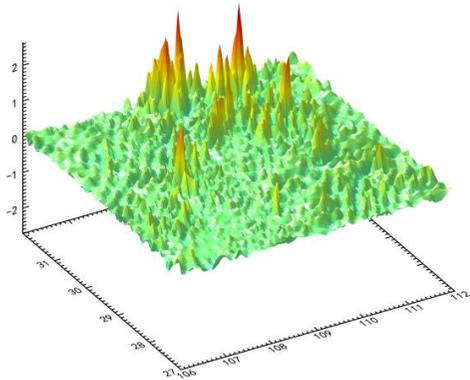
广义V-M二维FFT残差地面垂线偏差南向分量(秒)



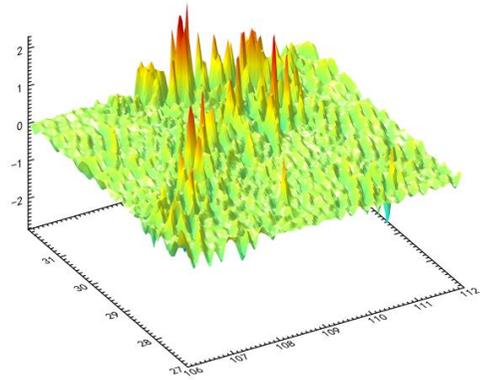
广义V-M二维FFT残差地面垂线偏差西向分量(秒)



一维FFT与模型残差地面垂线偏差南向分量之差(秒)



一维FFT与模型残差地面垂线偏差西向分量之差(秒)

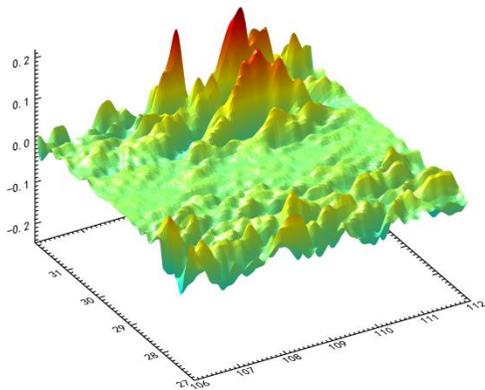


(2) 采用 200km 积分半径，按广义 Vening-Meinesz 积分 FFT 算法，由大地水准面

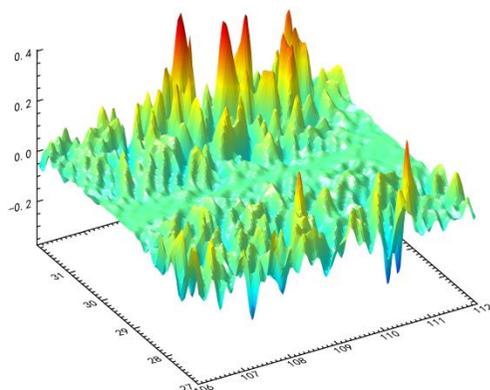
上残差空间异常，得到残差地面垂线偏差向量积分值，如图 3~6。

(3) 以 EGM2008 模型残差地面垂线偏差为参考真值，计算二维 FFT、一维 FFT 与数值积分法、EGM2008 模型残差垂线偏差向量格网，如图 7~10。

二维与一维FFT残差地面垂线偏差南向分量之差 (秒)



二维与一维FFT残差地面垂线偏差西向分量之差 (秒)



4.7 广义 V_M 扰动重力积分

功能：由等位面大地高数字模型及其面上的扰动重力 (mGal) 格网数字模型，按严密广义 Vening-Meinesz 积分公式，计算地面及地球外部点的垂线偏差向量 (")。

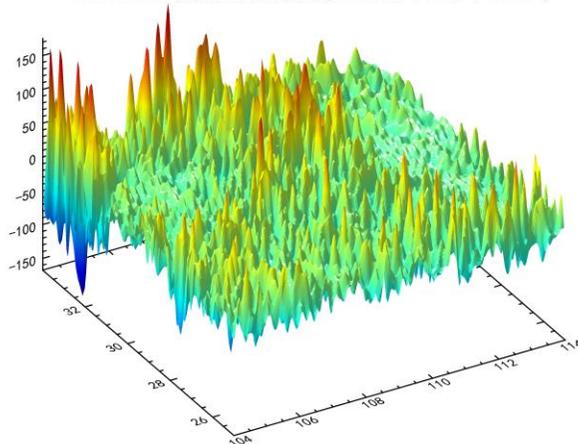
输入：

- (1) 大地水准面外部空间计算点文件。
- (2) 等位面残差扰动重力数字模型 (mGal) 文件，如图 2。
- (3) 格网规格完全相同的等位面大地高数字模型 (m) 文件。等位面大地高数字模型可由“5.7 过指定点模型等位面构造”生成。

参数设置：如图 1。

- (1) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。
- (2) 输入 Vening-Meinesz 积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

EGM2008模型残差扰动重力 (1800阶-360阶, mGal)



输出：残差垂线偏差向量点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加两列该点的残差垂线偏差向量积分值，保留 4 位有效数字。

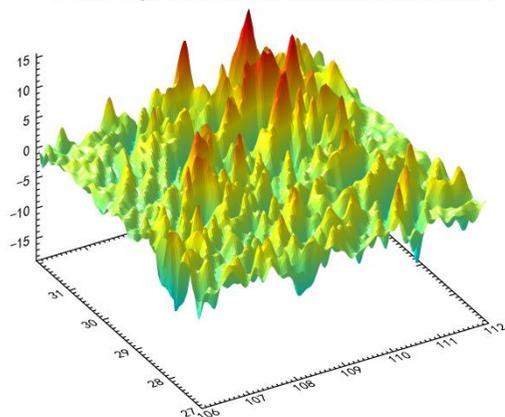
说明：

(1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成区域大地水准面上 2.5'×2.5'模型残差空间异常和模型残差地面垂线偏差（1800 阶模型值与 360 阶模型值之差）。

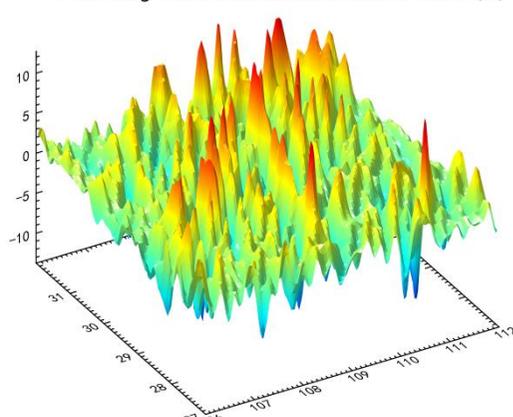
(2) 采用 200km 积分半径，按广义 Vening-Meinesz 数值积分，由大地水准面上残差扰动重力，得到残差地面垂线偏差积分值，如图 3、4。

(3) 以 EGM2008 模型残差地面垂线偏差为参考真值，计算 Vening-Meinesze 残差地面垂线偏差积分值与 EGM2008 模型残差地面垂线偏差之差，如图 5、6。残差地面垂线偏差的统计结果如表 1。

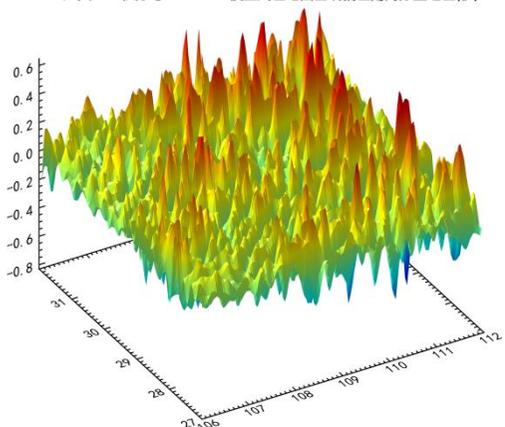
广义Vening-Meinesz积分残差地面垂线偏差南向分量(秒)



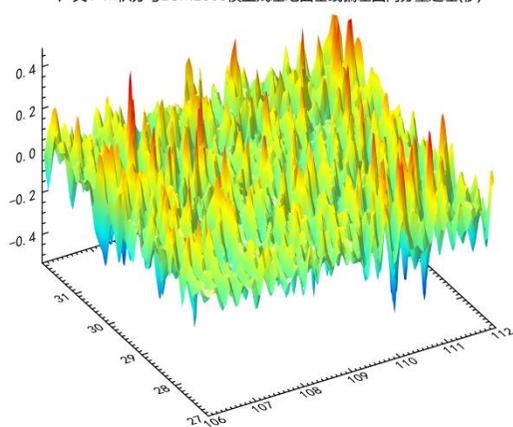
广义Vening-Meinesz积分残差地面垂线偏差西向分量(秒)



广义V-M积分与EGM2008模型残差地面垂线偏差南向分量之差(秒)



广义V-M积分与EGM2008模型残差地面垂线偏差西向分量之差(秒)



(4) 广义 Vening-Meinesz 积分扰动重力公式，由广义 Hotine 积分公式水平微分导出，属于 Stokes 边值问题。因此，要求被积扰动场元（这里是残差扰动重力）位于某一等位面上（图 2 中的残差扰动重力位于等位的大地水准面上，等位面大地高格网模型用

模型大地水准面高格网表示)。

表 1	积分 S/A	模型 S/B	A—B	积分 W/C	模型 W/D	C—D
最大值"	15.565	16.079	0.655	12.693	13.066	0.490
最小值"	-18.725	-19.353	-0.840	-13.715	-13.870	-0.547
平均值"	0.007	0.007	0.000	0.005	0.005	0.000
标准差"	2.932	3.048	0.148	2.892	2.948	0.091

4.8 广义 V_M 扰动重力 FFT

功能：由等位面大地高数字模型及其面上的扰动重力 (mGal) 格网数字模型，按广义 Vening-Meinesz 积分快速 FFT 算法，计算其他边界面上的垂线偏差向量 (") 向量格网模型。

输入：格网规格完全相同的等位面大地高数字模型、扰动重力数字模型 (mGal) 和计算边界面大地高数字模型文件。

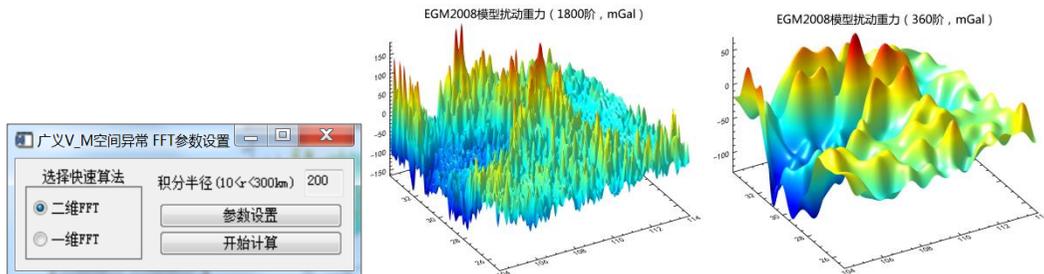
参数设置：如图 1。

- (1) 选择广义 Vening-Meinesz 积分快速算法 (二维 FFT/一维 FFT)。
- (2) 输入积分半径 dr , $10 < dr \leq 300$ km。

⊙程序通过控制 Vening-Meinesz 积分核函数的定义域 (球面角距)，实现固定积分半径的 FFT 算法。

输出：

- (1) 边界面上残差垂线偏差向量格网模型文件。
- (2) 残差垂线偏差向量格网边缘积分半径范围内，积分不充分，存在边缘效应。



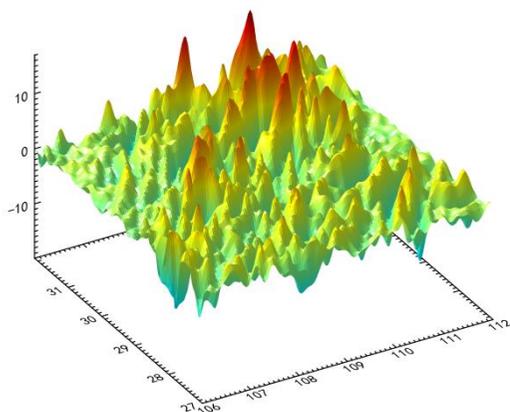
说明：

(1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成区域大地水准面上 2.5'×2.5'模型残差扰动重力和模型残差地面垂线偏差向量格网 (1800 阶模型值与 360 阶模型值之差)。

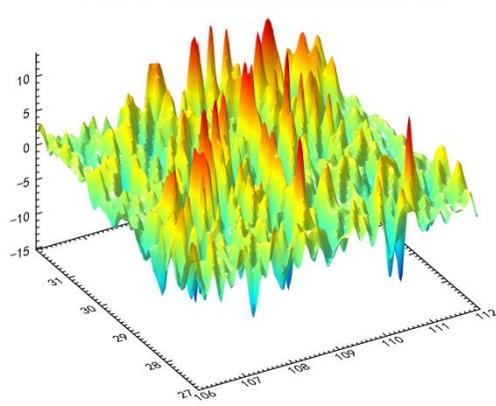
(2) 采用 200km 积分半径，按广义 Vening-Meinesz 积分 FFT 算法，由大地水准面上残差扰动重力，得到残差地面垂线偏差向量积分值，如图 4~5。

(3) 以 EGM2008 模型残差地面垂线偏差为参考真值，计算二维 FFT、一维 FFT、数值积分法、EGM2008 模型残差垂线偏差向量格网互差，如图 6~7。

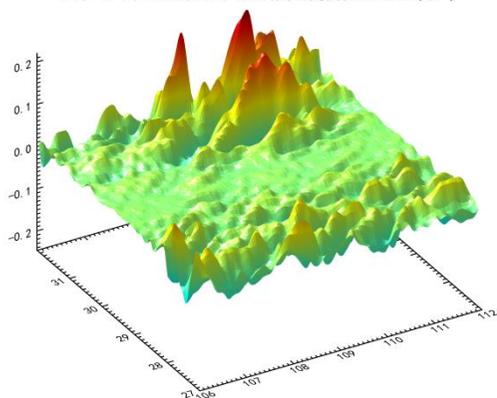
广义V-M一维FFT残差地面垂线偏差南向分量(秒)



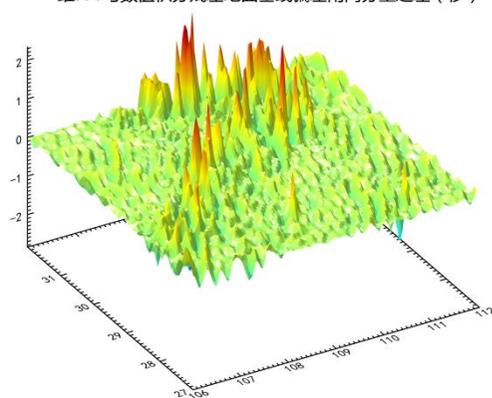
广义V-M一维FFT残差地面垂线偏差西向分量(秒)



二维与一维FFT残差地面垂线偏差南向分量之差(秒)



一维FFT与数值积分残差地面垂线偏差南向分量之差(秒)



4.9 高程异常逆远算数值积分

功能：由等位面大地高 (m) 数字模型及其面上的高程异常 (m) 格网数字模型，按严密逆 Hotine 积分或逆 Stokes 积分公式，计算该等位面上点的扰动重力 (mGal) 或空间异常 (mGal)。

输入：

- (1) 等位面残差高程异常 (m) 格网数字模型文件，图 2 与图 3 之差。
- (2) 格网规格完全相同的等位面大地高数字模型文件。
- (3) 等位面上计算点文件。

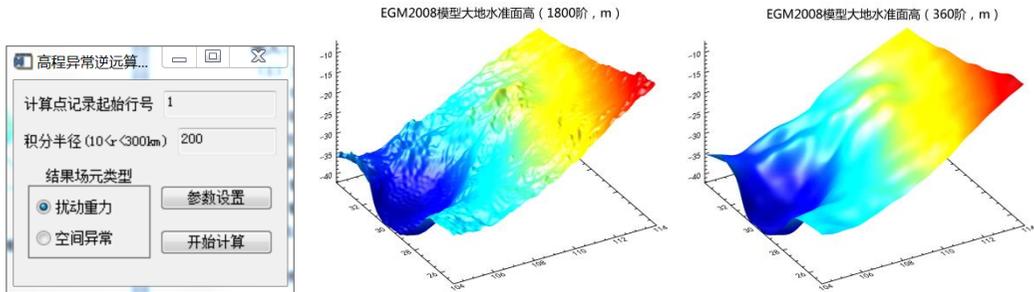
参数设置：如图 1。

- (1) 输入计算点记录起始行号。

(2) 输入逆 Hotine 积分或逆 Stokes 积分半径 dr , $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

⊙残差高程异常 = 高程异常 - 模型高程异常 (- 高程异常地形影响)。

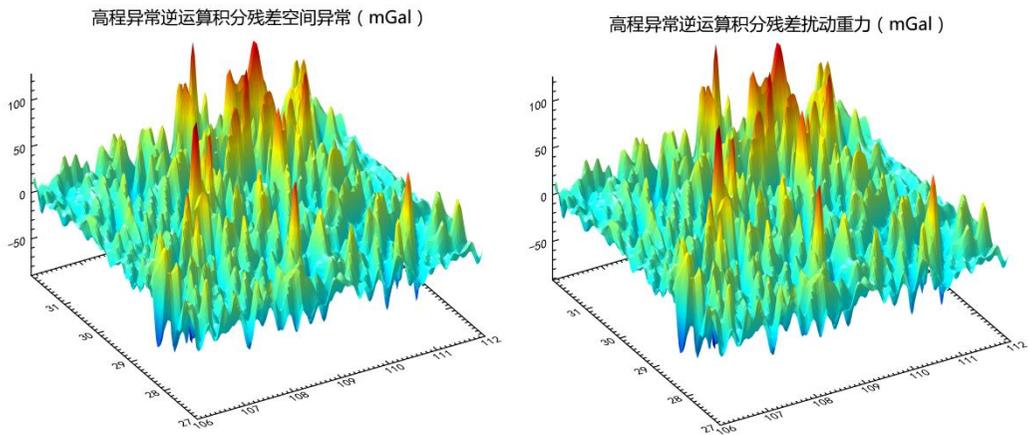
输出: 残差扰动重力或残差空间异常点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加一列由等位面大地高数字模型内插得到的计算点大地高, 和一系列该点的残差扰动重力或空间异常积分值。



说明:

(1) 利用 EGM2008 重力场模型, 按“2.3 模型重力场元点值计算”, 生成区域大地水准面上 $2.5' \times 2.5'$ 残差大地水准面高、残差空间异常和残差扰动重力 (1800 阶模型值与 360 阶模型值之差)。

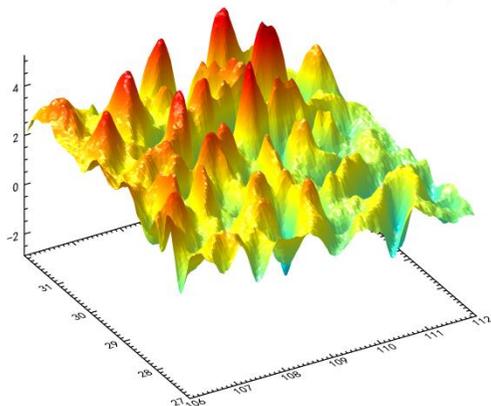
(2) 采用 200km 积分半径, 按高程异常逆运算数值积分, 由残差大地水准面高, 得到残差空间异常和残差扰动重力积分值, 如图 4、5。



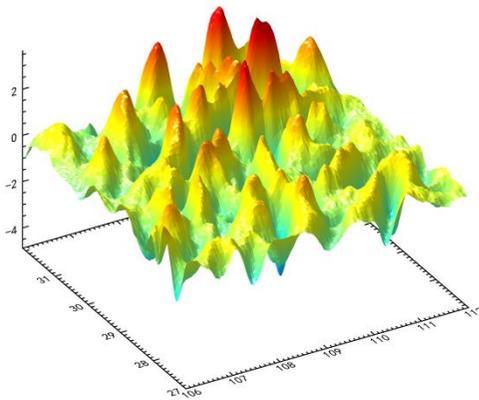
(3) 以 EGM2008 模型残差空间异常和残差扰动重力为参考真值, 计算高程异常逆运算得到的残差空间异常和残差扰动重力积分值, 分别与 EGM2008 模型值相减, 如图 6、7。统计结果如表 1 (mGal)。

(4) 高程异常逆运算基于 Stokes 边值问题, 要求被积扰动场元 (这里是残差高程异常) 位于某一等位面上 (残差高程异常位于等位的大地水准面上, 大地水准面上残差高程异常等于残差大地水准面高, 等位面大地高格网模型用模型大地水准面高格网表示)。

高程异常逆运算积分与模型残差空间异常之差 (mGal)



高程异常逆运算积分与模型残差扰动重力之差 (mGal)



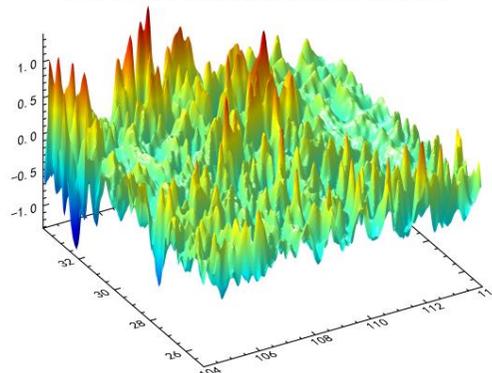
mGal	残差空间异常			残差扰动重力		
	积分/A	模型/B	A—B	积分/C	模型/D	C—D
最大值	128.326	128.512	5.189	125.912	128.830	3.603
最小值	-89.686	-93.095	-2.839	-91.522	-93.361	-4.838
平均值	2.086	-0.044	2.130	-0.045	-0.043	-0.001
标准差	22.494	23.060	0.941	22.504	23.123	0.852

4.10 高程异常逆远算积分 FFT

功能：由等位面大地高 (m) 数字模型及其面上的高程异常 (m) 格网数字模型，按逆 Hotine 积分或逆 Stokes 积分 FFT 方法，计算该等位面上扰动重力 (mGal) 或空间异常 (mGal) 格网数字模型。

输入：格网规格完全相同的等位面大地高数字模型和残差高程异常格网模型 (m)。

EGM2008模型残差大地水准面高 (1800阶-360阶, m)



参数设置：如图 1。

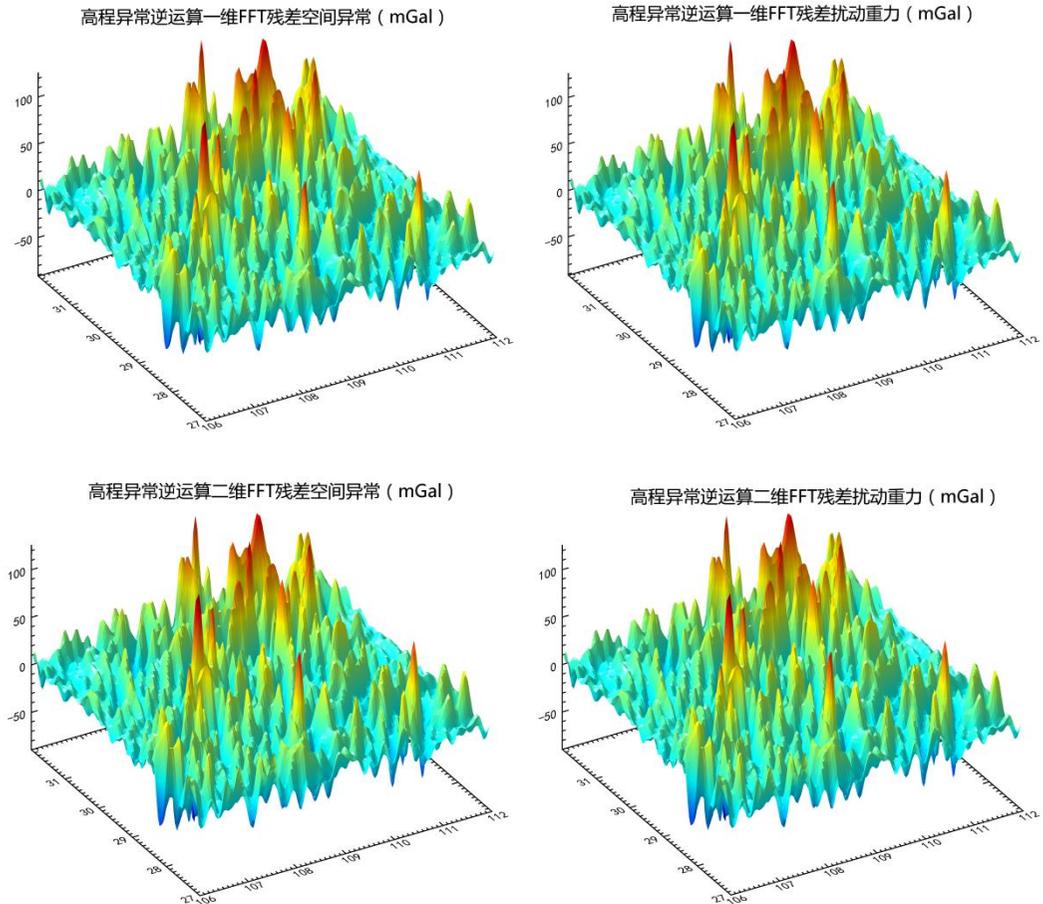
- (1) 选择逆 Hotine 积分或逆 Stokes 积分快速算法（二维 FFT/一维 FFT）。
- (2) 输入积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300$ km。

输出：

- (1) 等位面上残差扰动重力或残差空间异常格网数字模型。
- (2) 残差扰动重力或残差空间异常格网边缘积分半径范围内，积分不充分，存在边缘效应。

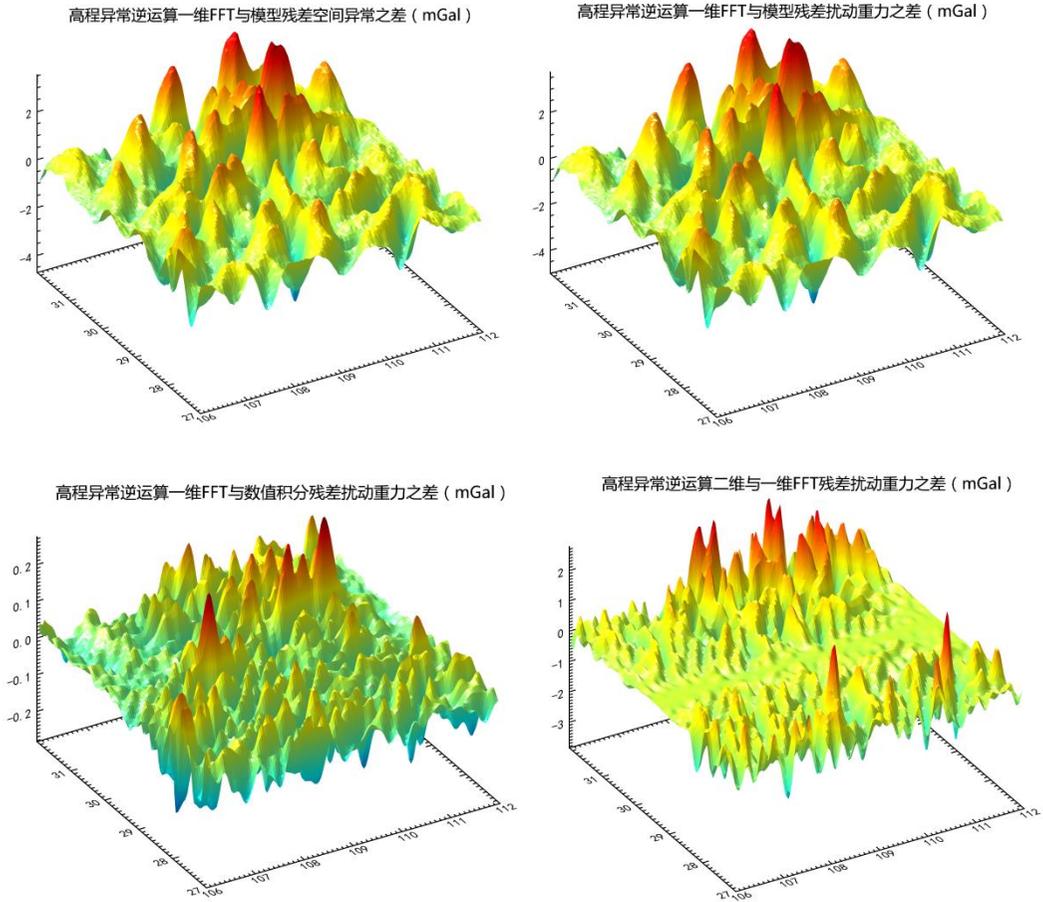
说明：

- (1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成 $2.5' \times 2.5'$ 残差扰动重力、残差空间异常和残差大地水准面高（1800 阶模型值与 360 阶模型值之差）。
- (2) 采用 200km 积分半径，按高程异常逆运算积分 FFT 算法，由残差大地水准面高，得到残差扰动重力和残差空间异常积分值，如图 3~6。



- (3) 以 EGM2008 模型残差扰动重力和残差空间异常为参考真值，由 EGM2008 模型残差大地水准面高，按高程异常逆运算 FFT 算法，得到残差扰动重力和残差空间异常

积分值，分别与 EGM2008 模型值、数值积分计算值相减，如图 7~10。



4.11 垂线偏差逆远算数值积分

功能：由等位面大地高数字模型及其面上的垂线偏差 ("") 向量格网模型，按严密逆 Vening-Meinesz 积分公式，计算该等位面上点的高程异常 (m)、扰动重力 (mGal) 或空间异常 (mGal)。

输入：

- (1) 等位面残差垂线偏差 ("") 向量格网数字模型文件，如图 2、3。
- (2) 格网规格完全相同的等位面大地高数字模型文件。
- (3) 等位面上计算点文件。

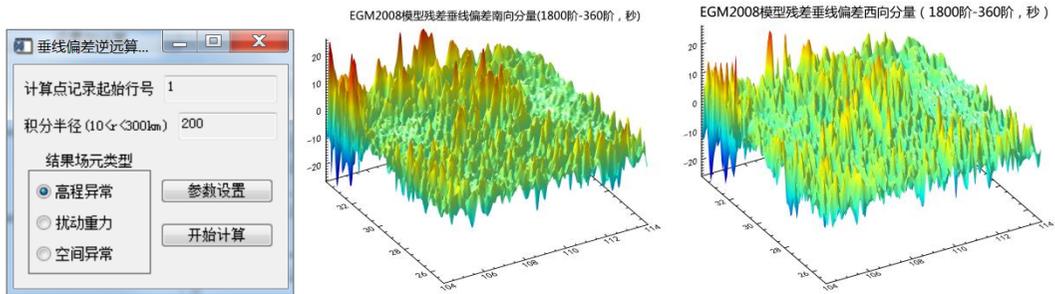
参数设置：如图 1。

- (1) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。
- (2) 输入逆 Vening-Meinesz 积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

⊙残差垂线偏差 = 垂线偏差 - 模型垂线偏差 (- 垂线偏差地形影响)。

输出：残差高程异常、扰动重力或空间异常点值文件。在源计算点值文件记录的基础

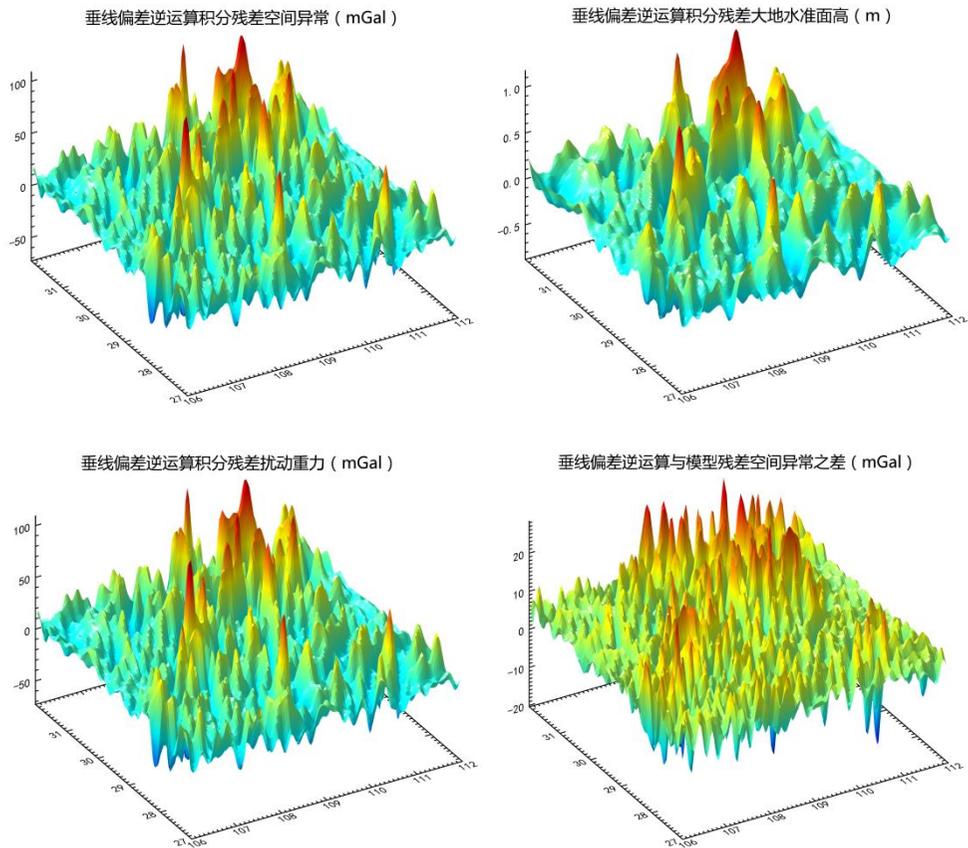
上增加一列由等位面大地高数字模型内插得到的计算点大地高，和一系列该点的残差高程异常、残差扰动重力或残差空间异常积分值。



说明:

(1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成区域大地水准面上 2.5'×2.5'残差空间异常、残差扰动重力和残差大地水准面高(1800 阶模型值与 360 阶模型值之差)。

(2) 采用 200km 积分半径，按垂线偏差逆运算数值积分，由残差垂线偏差，得到残差大地水准面高、残差扰动重力或残差空间异常积分值，如图 4~6。



(3) 以 EGM2008 模型残差大地水准面高、残差扰动重力和残差空间异常为参考真

值，计算垂线偏差逆运算积分得到的残差大地水准面高、残差扰动重力和残差空间异常积分值，分别与 EGM2008 模型值相减，如图 7-9。统计结果如表 1。

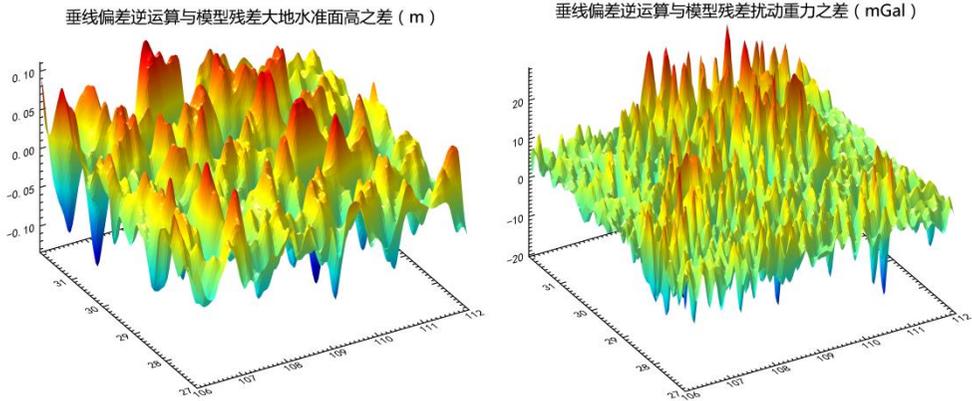


表 1		最大值	最小值	平均值	标准差
残差大地水准面高 m	积分/A	1.178	-0.878	0.004	0.215
	模型/B	1.275	-0.938	0.000	0.225
	A — B	0.110	-0.136	0.004	0.032
残差扰动重力 mGal	积分/C	113.286	-68.720	9.435	18.872
	模型/D	128.830	-93.361	-0.043	23.123
	C — D	32.414	-16.367	9.478	4.791
残差空间异常 mGal	积分/E	112.971	-68.467	9.434	18.809
	模型/F	128.512	-93.095	-0.043	23.060
	E — F	32.424	-16.346	9.477	4.788

(4) 垂线偏差逆运算基于 Stokes 边值问题，要求被积扰动场元（这里是残差垂线偏差）位于某一等位面上（图 2、3 中的残差垂线偏差位于等位的大地水准面上，等位面大地高格网模型用模型大地水准面高格网表示）。

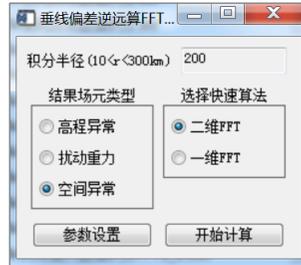
4.12 垂线偏差逆运算积分 FFT

功能：由等位面大地高数字模型及其面上的垂线偏差向量（"）格网数字模型，按逆 Vening-Meinesz 积分 FFT 方法，计算该等位面上高程异常（m）、扰动重力（mGal）或空间异常（mGal）格网数字模型。

输入：格网规格完全相同的等位面大地高数字模型和残差垂线偏差向量格网模型。

参数设置：如图 1。

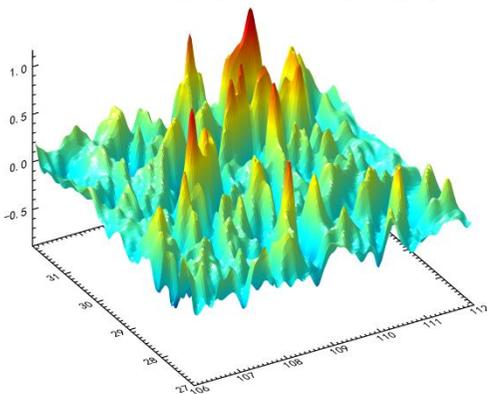
- (1) 选择逆 Vening-Meinesz 积分快速算法（二维 FFT/一维 FFT）。
- (2) 输入积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300$ km。



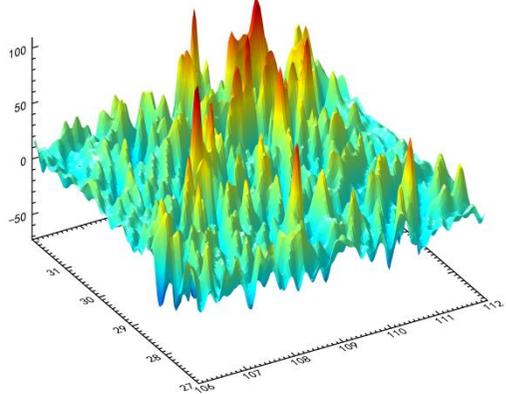
输出：

- (1) 等位面上残差高程异常、残差扰动重力或残差空间异常格网数字模型。
- (2) 残差高程异常、残差扰动重力或残差空间异常格网边缘积分半径范围内，积分不充分，存在边缘效应。

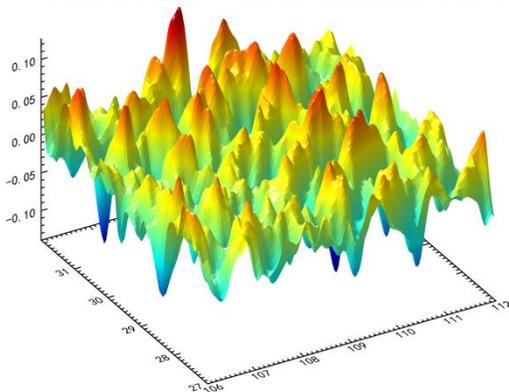
垂线偏差逆运算一维FFT残差大地水准面高 (m)



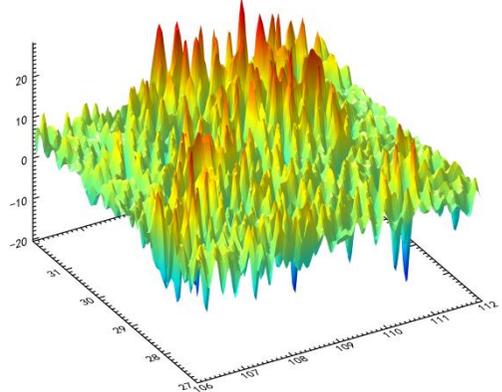
垂线偏差逆运算一维FFT残差扰动重力 (mGal)



垂线偏差逆运算一维FFT与模型残差大地水准面高之差 (m)



垂线偏差逆运算一维FFT与模型残差扰动重力之差 (mGal)

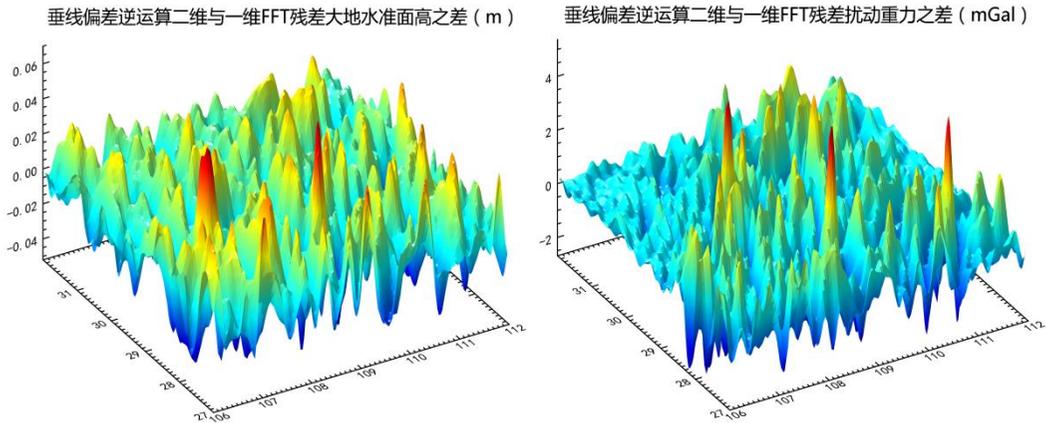


说明：

(1) 利用 EGM2008 模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成区域大地水准面上 2.5'×2.5'残差垂线偏差、残差大地水准面高、残差扰动重力和残差空间异常（1800 阶与 360 阶模型值之差）。

(2) 由残差垂线偏差，采用 200km 积分半径，按逆运算积分 FFT 算法，得到残差大地水准面高、残差扰动重力和残差空间异常积分值，如图 2~3。

(3) 以 EGM2008 模型残差大地水准面高、残差扰动重力和残差空间异常为参考真值，按垂线偏差逆运算 FFT 算法，得到残差大地水准面高、残差扰动重力和残差空间异常积分值，分别与 EGM2008 模型值、数值积分计算值相减，如图 4~7。



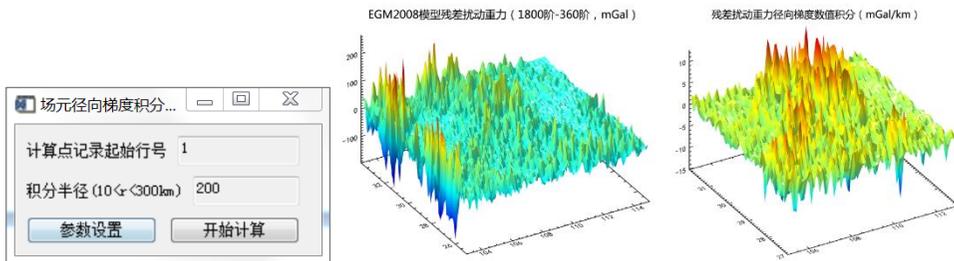
4.13 场元径向梯度数值积分

功能：由等位面大地高数字模型及其面上的扰动重力场元格网数字模型，按严密径向梯度积分公式，计算该等位面上点的场元径向梯度值 (/km)。

输入：格网规格完全相同的等位面扰动重力场元格网模型和等位面大地高格网数字模型文件，以及等位面上计算点文件。

参数设置：如图 1。

- (1) 输入计算点记录起始行号。
- (2) 输入场元径向梯度积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。



输出：

(1) 场元径向梯度点值文件。在源计算点值文件记录的基础上，增加一列由等位面大地高格网内插的计算点大地高，和一系列场元径向梯度积分值，保留 4 位有效数字。

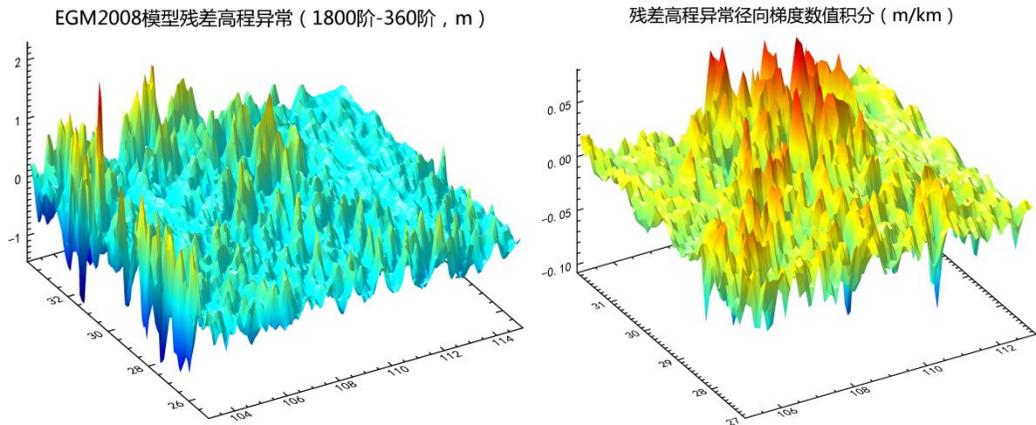
(2) 场元径向梯度单位：场元单位/km。

(3) 径向：由地心指向地球外部方向。

说明：

(1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成 5'×5' 残差扰动重力、残差高程异常（1800 阶模型值与 360 阶模型值之差）。

(2) 采用 200km 积分半径，按场元径向梯度数值积分，分别由残差扰动重力(mGal)、残差高程异常 (m)，得到残差扰动重力径向梯度 (mGal/km)、残差高程异常径向梯度 (m/km)，如图 2~5。



(3) 由于任意类型扰动场元可表示为扰动位或其坐标微分线性组合，因此，只要扰动场元处于某一重力等位面上，均可直接调用本程序计算其径向梯度。

(4) 高阶径向梯度，可通过多次调用本程序实现。任意场元的 n 阶径向梯度，可由 $n - 1$ 阶径向梯度格网，用本程序计算。

(5) 径向梯度的阶数越大，所需的积分半径越小。

4.14 场元径向梯度积分 FFT

功能：由等位面大地高数字模型及其面上的扰动重力场元格网数字模型，按径向梯度积分 FFT 方法，计算该等位面上场元径向梯度 (/km) 格网数字模型。

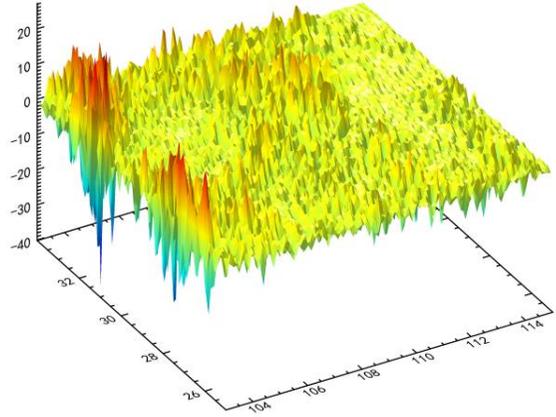
输入：格网规格完全相同的等位面大地高数字模型和残差扰动场元格网数字模型。

参数设置：如图 1。

(1) 选择场元径向梯度快速算法（二维 FFT/一维 FFT）。

(2) 输入积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300$ km。

残差扰动重力径向梯度积分一维FFT (mGal/km)

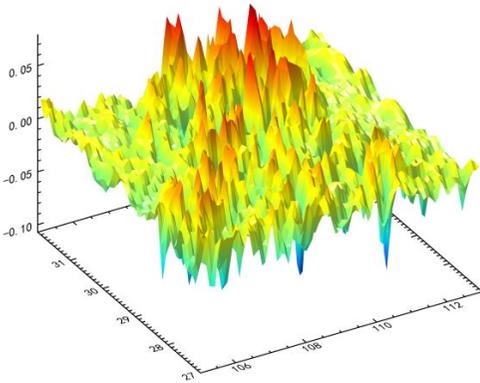


输出：

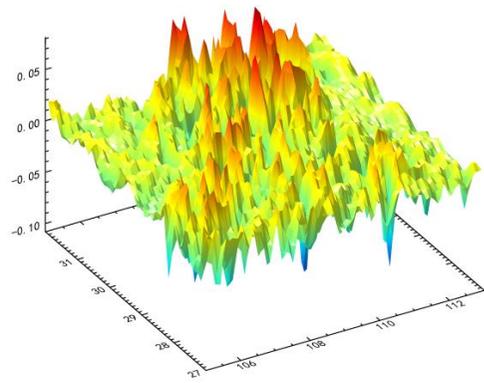
- (1) 等位面上残差扰动场元径向梯度格网数字模型。
- (2) 残差扰动场元径向梯度格网边缘积分半径范围内，积分不充分，存在边缘效应。

说明：

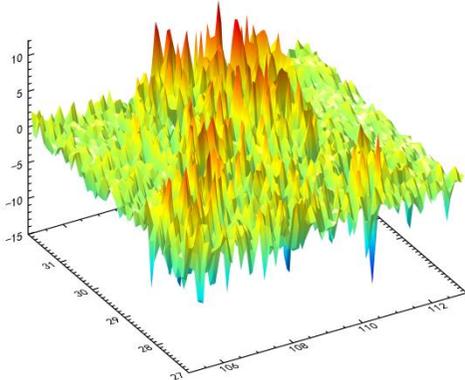
残差高程异常径向梯度积分二维FFT (m/km)



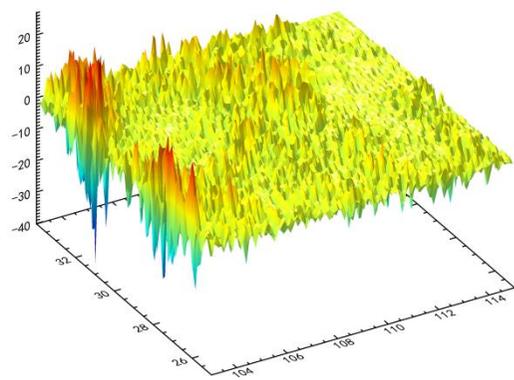
残差高程异常径向梯度积分一维FFT (m/km)



残差空间异常径向梯度积分二维FFT (mGal/km)



残差空间异常径向梯度积分一维FFT (mGal/km)



(1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成 5'×5'残差扰动重力、残差高程异常、残差空间异常（1800 阶模型值与 360 阶模型值之差）。

(2) 采用 200km 积分半径，按场元径向梯度 FFT 算法，分别由残差扰动重力(mGal)、残差高程异常 (m)、残差空间异常，得到残差扰动重力径向梯度 (mGal/km)、残差高程异常径向梯度 (m/km)、残差空间异常径向梯度 (mGal/km)，如图 2~6。

(3) 径向梯度的阶数越大，积分边缘效应越小，所需的积分半径越小。

4.15 场元 Possion 数值积分

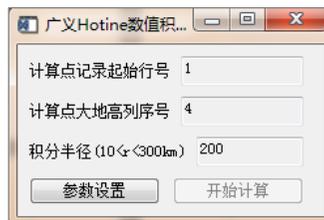
功能：由边界面大地高数字模型及其面上的扰动重力场元格网数字模型，按严密 Possion 积分公式，计算地面及地球外部点同类型场元值。

输入：地面及地球外部计算点文件，格网规格完全相同的等位面残差扰动场元格网模型与等位面大地高数字模型文件。

参数设置：如图 1。

(1) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。

(2) 输入 Possion 积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。



输出：

(1) 场元 Possion 数值积分点值文件。在源计算点值文件记录的基础上，增加一列场元 Possion 积分计算值，保留 4 位有效数字。

(2) 场元 Possion 积分值单位与源场元单位相同。

说明：

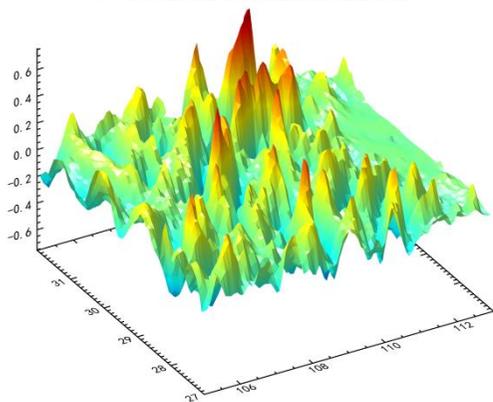
(1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成区域大地水准面上 5'×5'残差大地水准面高、模型残差扰动重力和 5'×5'模型残差地面高程异常、模型残差地面扰动重力（1800 阶模型值与 360 阶模型值之差）。

(2) 采用 200km 积分半径，按 Possion 数值积分，由大地水准面上残差大地水准面高，得到残差地面高程异常积分值，如图 2；由大地水准面上残差扰动重力，得到残差地面扰动重力积分值，如图 4。

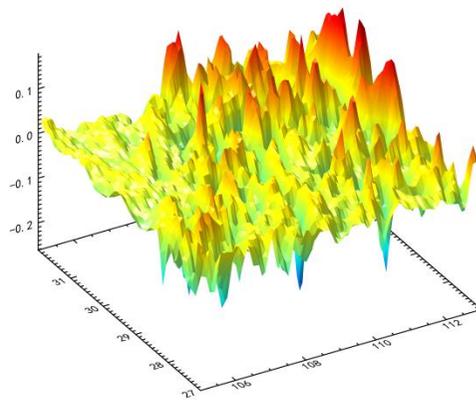
(3) 以 EGM2008 模型残差地面高程异常、残差扰动重力为参考真值，将 Possion 积分计算的残差地面高程异常、残差地面扰动重力分别与 EGM2008 模型值相减，如图 3、5。统计结果如表 1。

(4) 程序不要求边界面为严格的重力等位面。

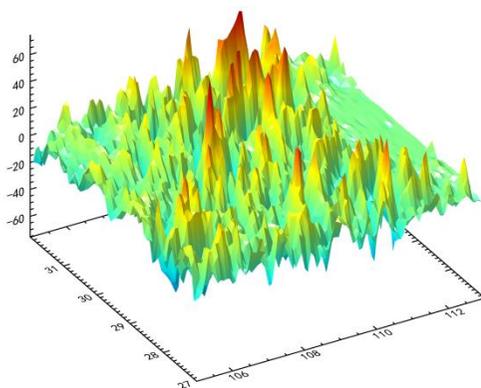
Possion数值积分残差地面高程异常 (m)



Possion积分与模型残差地面高程异常之差 (m)



Possion数值积分残差地面扰动重力 (mGal)



Possion积分与模型残差地面扰动重力之差 (mGal)

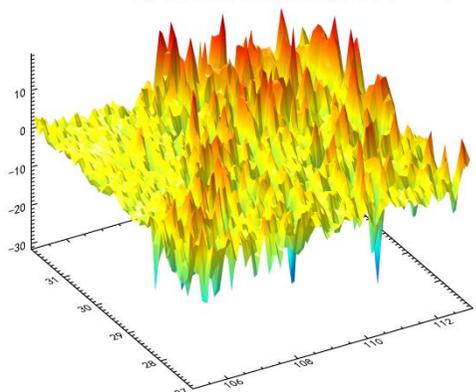


表 1		最大值	最小值	平均值	标准差
残差地面高程异常 m	积分/A	1.386	-0.844	-0.003	0.196
	模型/B	1.027	-0.885	-0.003	0.204
	A — B	0.358	-0.078	0.000	0.018
残差地面扰动重力 mGal	积分/C	118.003	-88.170	-0.461	19.202
	模型/D	100.767	-88.571	-0.484	20.113
	C — D	31.897	-9.025	0.022	1.851

4.16 扰动重力梯度的积分运算

功能：由等位面大地高数字模型及其面上扰动重力梯度 (E) 格网模型，按严密积分方法，计算地面或地球外部空间点的扰动重力 (mGal)。

输入：

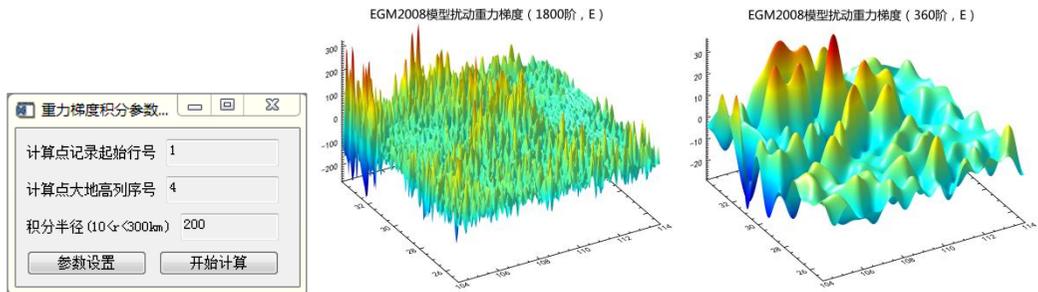
- (1) 地面及地球外部空间计算点文件。
- (2) 格网规格完全相同的等位面大地高数字模型 (m) 文件和等位面残差扰动重力梯度 (E) 格网模型文件。

参数设置：如图 1。

- (1) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。
- (2) 输入 Hotine 积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

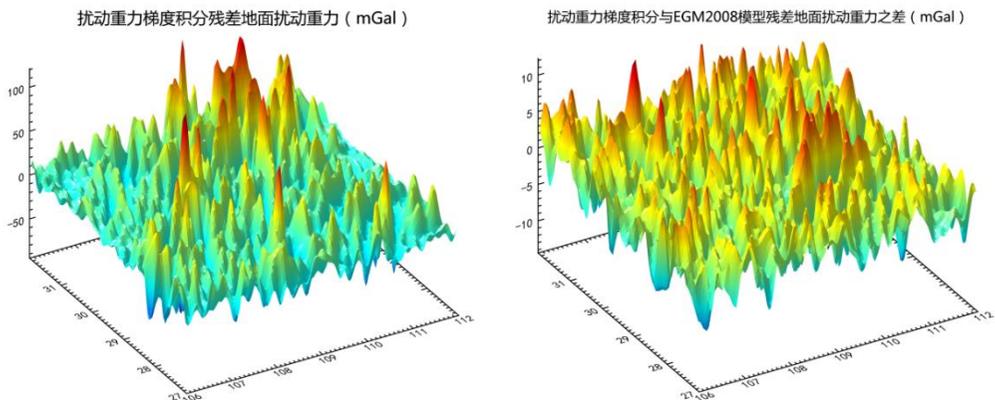
⊙残差扰动重力梯度 = 扰动重力梯度 - 模型扰动重力梯度 (- 扰动重力梯度地形影响)。

输出：残差扰动重力 (mGal) 点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加 1 列该点的残差扰动重力积分值，保留 4 位有效数字。



说明：

(1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成大地水准面上 $2.5' \times 2.5'$ 模型残差扰动重力梯度和模型地面残差扰动重力 (1800 阶模型值与 360 阶模型值之差)。



(2) 采用 200km 积分半径，按扰动重力梯度数值积分，由等位面残差扰动重力梯度，得到残差地面扰动重力积分值，如图 4。

(3) 以 EGM2008 模型残差地面扰动重力为参考真值，计算残差地面扰动重力积分

值与模型残差地面扰动重力之差，如图 5。统计结果如表 1。

表 1	残差地面扰动重力 积分值/A	EGM2008 模型残差地 面扰动重力/B	A — B
最大值 mGal	96.756	100.767	11.807
最小值 mGal	-90.864	-88.170	-9.963
平均值 mGal	-0.451	-0.484	0.032
标准差 mGal	19.435	20.113	2.571

4.17 扰动重力梯度积分逆运算

功能：由等位面大地高数字模型及其面上扰动重力（mGal）格网，按严密积分逆运算公式，计算等位面上扰动重力梯度（E）。

输入：等位面上计算点文件，格网规格完全相同的等位面大地高数字模型文件和等位面残差扰动重力（mGal）格网文件。

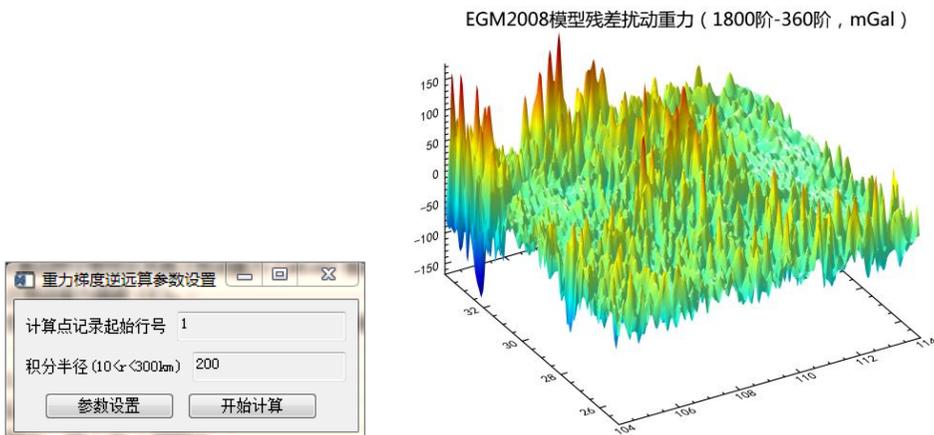
参数设置：如图 1。

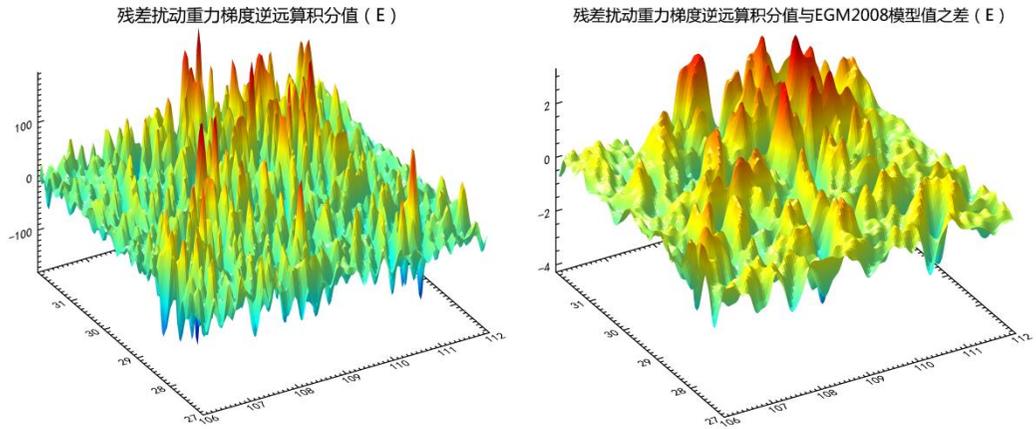
- (1) 输入计算点记录起始行号。
- (2) 输入积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

输出：残差扰动重力梯度点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加一列由等位面大地高模型内插的计算点大地高，和一系列该点的残差扰动重力梯度积分值。

说明：

(1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成大地水准面上 2.5'×2.5'模型残差扰动重力（如图 2）和模型残差扰动重力梯度（1800 阶模型值与 360 阶模型值之差）。





(2) 采用 200km 积分半径，按重力梯度逆运算积分，由残差扰动重力格网，得到残差扰动重力梯度积分值，如图 3。

(3) 以 EGM2008 模型残差扰动重力梯度为参考真值，计算残差扰动重力梯度逆运算积分值与模型值之差，如图 4，统计结果如表 1。

表 1	残差扰动重力梯度 逆运算积分值/A	EGM2008 模型残差 扰动重力梯度/B	A — B
最大值 E	193.572	195.391	3.253
最小值 E	-179.706	-179.645	-4.326
平均值 E	-0.066	-0.067	0.001
标准差 E	36.247	36.459	0.732

第五章 高程基准优化及应用

为有效发挥地球重力场理论和局部重力场成果在高程基准精化、统一与应用中的潜力，PALGrav3.0 开发了高程基准精化、精度评估及应用计算模块，以提升高程基准成果的可靠性和应用服务水平。



5.1~5.2 用于重力大地水准面的误差分析，5.3~5.4 由重力场数据，精密确定高程异常径向变化率，用于 GNSS 水准高程异常的高差归算，5.5~5.6 用于精密确定正高与正常高的差异，5.7~5.10 用于确定近地空间重力等位面，及其在各种高程系统中的表示，5.11~5.16 用于 GNSS 水准与重力大地水准面融合、精度评估，以及区域高程基准精化和统一，5.17~5.18 用于 GNSS 代替水准生产作业。

5.1 重力大地水准面误差估计

功能：由地面格网空间分辨率（km）和平均重力代表性误差（mGal），估计重力大地水准面偶然误差（cm）的近似值。

参数设置：如图 1~3。

- （1）输入地面或大地水准面上格网平均重力代表性误差。
- （2）输入格网的空间分辨率。

说明：

(1) 重力观测误差远小于地形代表性误差对格网平均重力的影响，因此这里的地面格网重力误差主要指地形代表性误差。

(2) 某一分辨率扰动场元代表性误差计算方法：将实测离散场元格网化，由“格网内插点值”内插离散点值，计算内插值与实测值之差的标准差，将该标准差除以单位格网内平均实测点数的平方根，作为该分辨率扰动场元的代表性误差。

(3) 重力大地水准面误差与格网分辨率大小成正比。



5.2 重力数据的系统偏差影响

功能：由地面空间异常/扰动重力的系统误差(μGal)和 Stokes/Hotine 积分半径(km)，估计其对重力大地水准面的系统性影响。

参数设置：如图 1~3。

- (1) 输入地面或大地水准面上空间异常或扰动重力的系统误差。
- (2) 输入大地水准面精化时的 Stokes/Hotine 积分半径。



说明：

(1) 空间异常/扰动重力系统误差主要来源：测量仪器系统误差、正常椭球参数误差、区域高程基准位差等。

(2) 空间异常/扰动重力系统误差对重力大地水准面的影响，随 Stokes/Hotine 积分半径增大而增大，与空间异常/扰动重力格网的空间分辨率无关。

(3) 在重力大地水准面精化过程中，若积分半径不固定，则系统误差影响将变得复杂，且难以分离和进一步分析。

5.3 高程异常模型径向变化计算

功能：利用系统内部高阶地球重力场位系数模型，计算地面及近地空间点高程异常径向变化率的模型值（cm/km）。此项功能可用于 GNSS 水准高程异常改正。

输入：地面及近地空间计算点文件。

参数设置：如图 1。

(1) 输入计算点记录起始行号和大高属性所在列序号。

(2) 输入重力场位系数模型最大计算阶数。程序自动选择地球重力场位系数模型最大阶数和输入最大阶数中的最小值作为计算阶数。



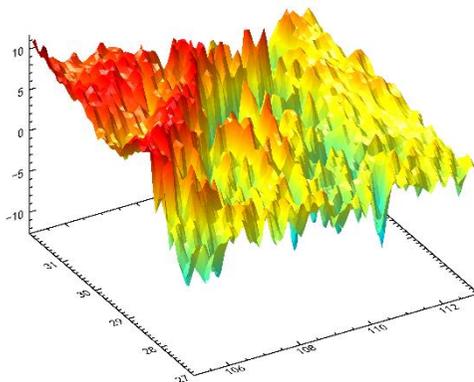
输出：高程异常模型径向变化点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加一列模型扰动重力（mGal）和一列高程异常径向变化率（cm/km），保留 4 位有效数字。

说明：

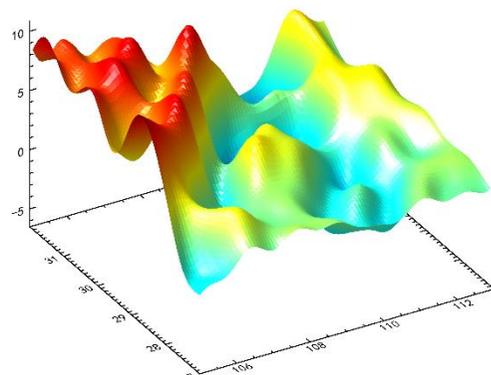
(1) 利用 EGM2008 重力场模型，取最大计算阶数为 1440 阶，计算区域模型地面高程异常径向变化率（cm/km），如图 2；若取最大计算阶数 360 阶时，则模型地面高程异常径向变化率如图 3。

(2) 地面高程异常径向变化率用于表示：高程(大地高、正高或正常高)每增加 1km，高程异常的变化量（cm）。

EGM2008模型地面高程异常径向变化率（1440阶，cm/km）



EGM2008模型地面高程异常径向变化率（360阶，cm/km）



(3) GNSS 水准点一般不会正好落在地面高程异常所在的地面数字高程模型面上，实际作业时需要对 GNSS 水准实测高程异常增加此项改正。

(4) 模型高程异常径向变化率计算成果，可用于大地水准面精化工程的误差分析、方案确定与技术设计。

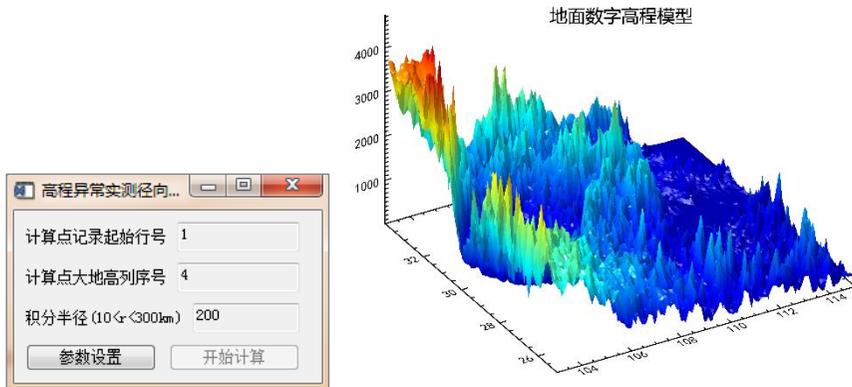
5.4 高程异常径向变化残差精化

功能：由某一等位面残差扰动重力格网数字模型，精化地面及近地空间点的高程异常径向变化率（cm/km）。此项功能可用于 GNSS 水准实测高程异常精密改正。

输入：地面及近地空间计算点文件，等位面扰动重力格网数字模型和大地高格网数字模型文件。

参数设置：如图 1。

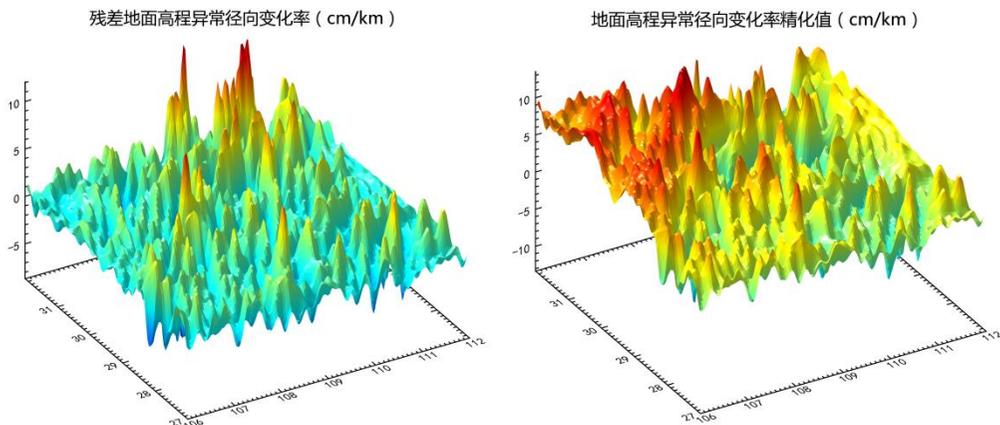
- (1) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。
- (2) 输入积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。



说明：

(1) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成区域 $2.5' \times 2.5'$ 残差扰动重力格网（1800 阶与 360 阶之差），计算残差地面高程异常的径向变化率（cm/km），如图 2。

(2) 地面及近地空间点的高程异常径向变化率精化值 = 模型高程异常径向变化率 + 残差高程异常径向变化率。如图 3、4。



(3) 图 3 显示，模型地面高程异常变化率难以满足厘米级精度要求，需要联合区域重力场数据，精化地面高程异常变化率。

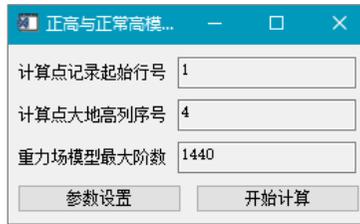
(4) 在 GNSS 代替水准测定正常高时，可利用地面高程异常径向变化率，精确计算地面高程异常改正数。

5.5 正高与正常高模型差别计算

功能：利用系统内部高阶地球重力场位系数模型，计算近地空间点处的模型高程异常（m）、模型大地水准面高（m）以及正高与正常高之差（cm）。

输入：地面及近地空间计算点文件。

参数设置：如图 1。



(1) 输入计算点记录起始行号和大地高属性所在列序号。

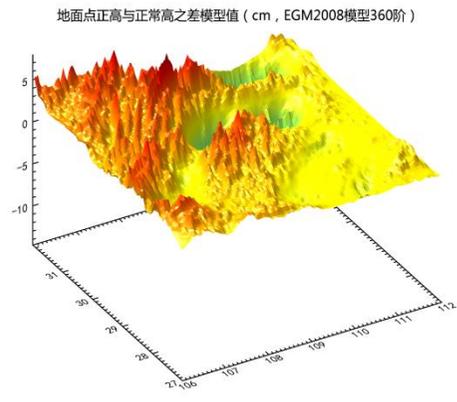
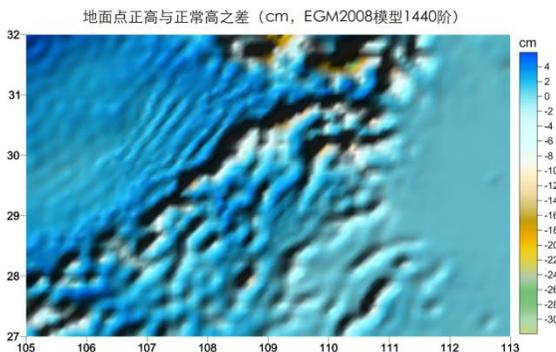
(2) 输入重力场位系数模型最大计算阶数。程序自动选择地球重力场位系数模型最大阶数和输入最大阶数中的最小值作为计算阶数。

输出：正高与正常高差别模型值点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加模型高程异常（m）、模型大地水准面高（m）与模型正高与正常高之差（cm）属性列，保留 4 位有效数字。

说明：

(1) 利用 EGM2008 重力场模型，取最大计算阶数为 1440 阶，计算区域地面正高与正常高之差（cm），如图 2；若取最大计算阶数 360 阶时，则区域地面正高与正常高之差（cm），如图 3。

(2) 地面及近地空间某点的正高与正常高之差，等于该点处的高程异常与大地水准面高之差。



5.6 正高与正常高差别区域精化

功能：由某一等位面上残差空间异常或扰动重力格网，精化近地空间点处的残差高程异常、残差大地水准面高以及残差正高与正常高之差（cm）。

输入：地面及近地空间计算点文件，等位面残差空间异常或残差扰动重力格网数字模型，以及等位面大地高格网数字模型文件。

参数设置：如图 1。



正高与正常高差...

计算点记录起始行号 1

计算点大地高列序号 4

积分半径(10<r<300km) 200

残差场元类型

残差空间异常

残差扰动重力

参数设置

开始计算

(1) 输入计算点记录起始行号和计算点大地高属性所在列序号。

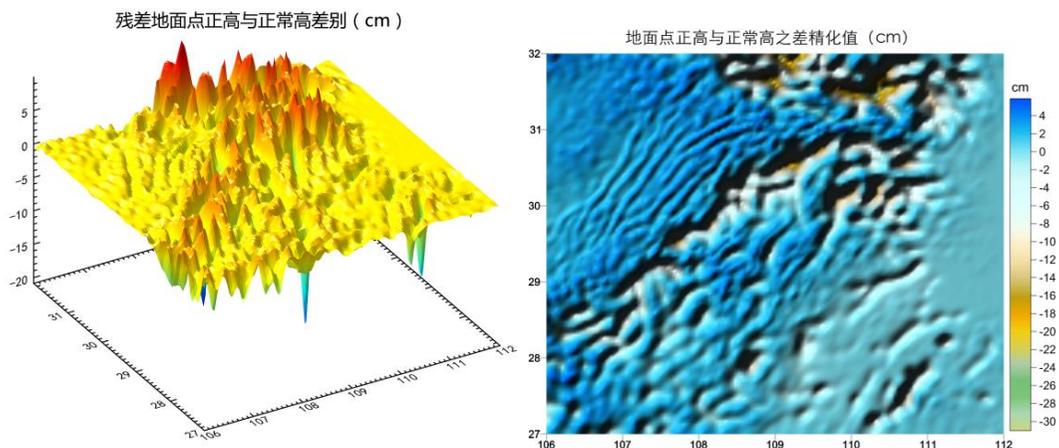
(2) 选择残差重力场元类型。

(3) 输入积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

输出：残差正高与正常高差别点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加残差高程异常（m）、残差大地水准面高（m）与残差正高与正常高之差（cm）属性列，保留 4 位有效数字。

说明：

(1) 由于大地水准面高与高程异常属于不同高度上的同一物理量，因此正高与正常高差别的精度水平，一般远高于重力大地水准面的精度水平。



(2) 利用 EGM2008 重力场模型，按“2.3 模型重力场元点值计算”，生成区域 $2.5' \times 2.5'$ 残差扰动重力格网（1800 阶与 360 阶之差），由大地水准面上残差扰动重力格网，计算残

差正高与正常高之差 (cm)，如图 2。

(2) 地面及近地空间点的正高与正常高差别精化值 = 模型正高与正常高差别 + 残差正高与正常高差别。如图 3。

5.7 等高程面模型重力位计算

功能：利用系统内部高阶地球重力场位系数模型，计算过指定点(B, L, h)等正(常)高面相对于指定点的模型重力位 (m^2/s^2) 格网。

输入：计算范围格网模型文件。格值类型不限，格网文件主要用于确定计算格网的经纬度范围和分辨率。

参数设置：如图 1。

(1) 输入指定点(B, L, h)的经纬度(度小数)、正(常)高(m)和地球重力场位系数模型最大计算阶数。

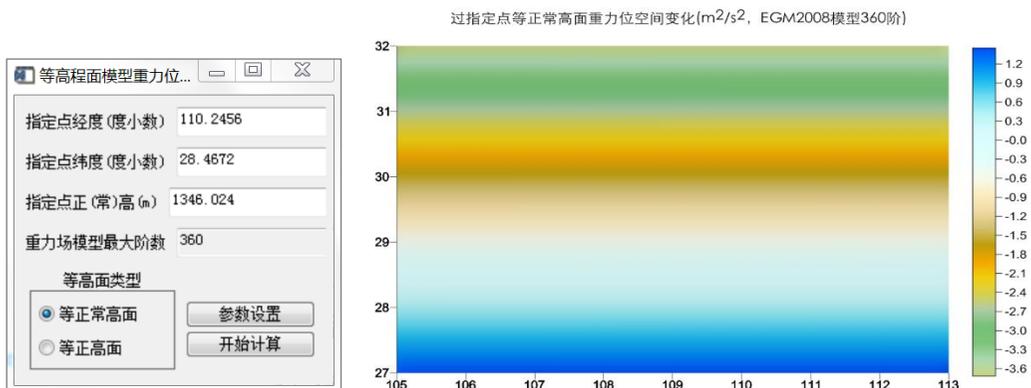
(2) 选择等高面类型。程序要求高程系统与指定点高程类型一致。

输出：

(1) 过指定点等正(高)面大地高(m)格网数字模型。头文件第 7~10 个数分别是指定点的经度、纬度、大地高、正(常)高，格值用中心点的大地高用其相对于指定点大地高的高差表示。

(2) 过指定点等正(高)面重力位模型值 (m^2/s^2) 格网数字模型。头文件第 7~10 个数分别是指定点的经度、纬度、大地高与模型重力位，格值用中心点的重力位用其相对于指定点重力位的重力位差表示。

(3) 过指定点等正(高)面重力模型值 (mGal) 格网数字模型。头文件第 7~10 个数分别是指定点的经度、纬度、大地高与模型重力值，格值用中心点的重力用其相对于指定点重力的差值表示。



说明：

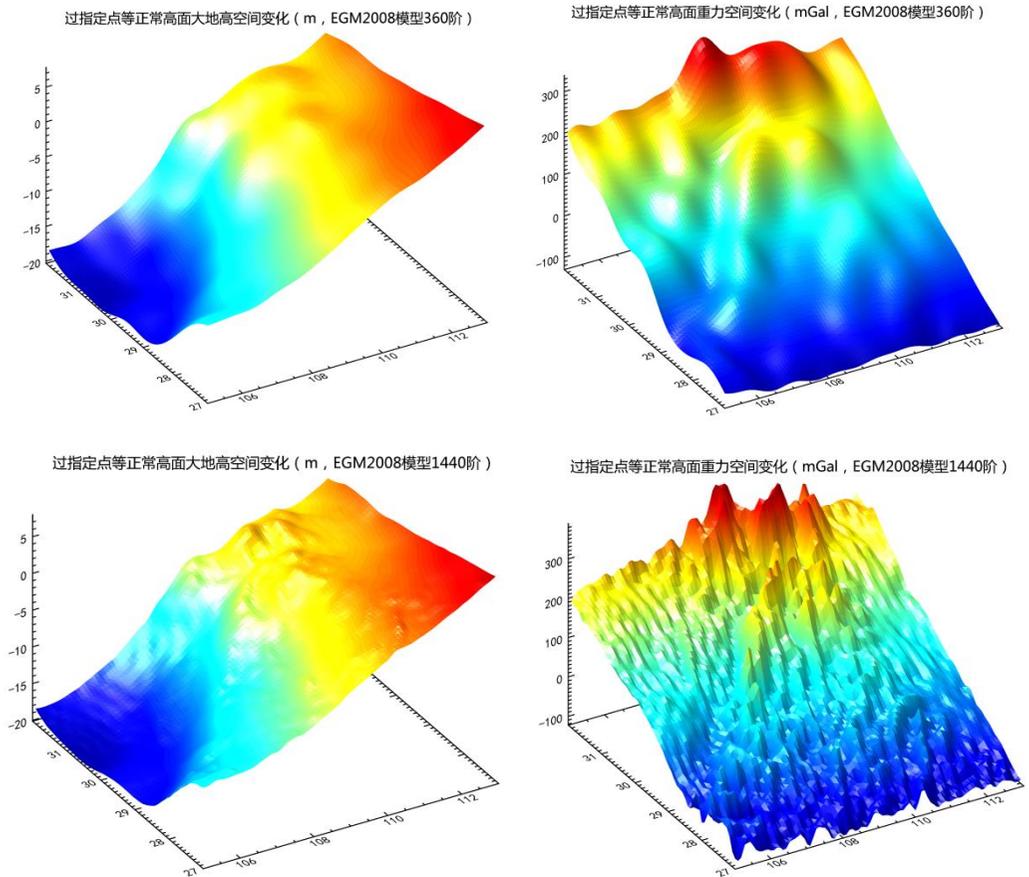
(1) 利用 EGM2008 重力场模型，取最大计算阶数为 360 阶，计算过指定点 ($110.2456^\circ, 28.4672^\circ$)、正常高为 1346.0240m 等正常高面的重力位 ($-62623679.3835 m^2/s^2$)、大地高 ($-1324.3228m$) 和重力 ($-978792.9508mGal$)，如图 2~4。

(2) 取最大计算阶数 1440 阶, 计算过指定点(110.2456°, 28.4672°)、正常高为 1346.0240m 等正常高面的大地高 (-1324.0751m) 和重力 (-978773.0818mGal) 的空间分布, 如图 5-6。

(3) 过指定点模型等高面大地高格网的格值 = 模型大地高格网值 + 其头文件第 9 个数。

(4) 过指定点模型等高面重力位格网的格值 = 模型重力位格网值 + 其头文件第 10 个数。

(5) 图 2 显示, 等正(常)高面并不是重力等位面, 等正(常)高面的重力位随纬度变化差别明显。



5.8 等高程面重力位残差精化

功能: 由某一等位面上残差扰动重力格网, 精化过指定点(B, L, h)等正(常)高面相对于指定点的残差重力位 (m^2/s^2) 格网。

输入:

- (1) 同规格的等位面上残差扰动重力格网与等位面大地高格网数字模型文件。
- (2) 过指定点等高面的模型重力格网与模型大地高格网数字模型文件。由“5.7 等高

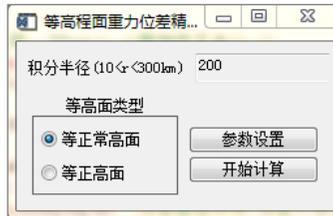
程面模型重力位差计算”生成。

(3) 指定点经度、纬度、正(常)高从过指定点模型大地高格网头文件中提取, 分别为头文件的第7、8和10个数。

参数设置: 如图1。

(1) 输入积分半径 dr , $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。

(2) 选择等高面高程系统类型。程序要求与“5.7 等高面模型重力位差计算”的参数设置保持一致。



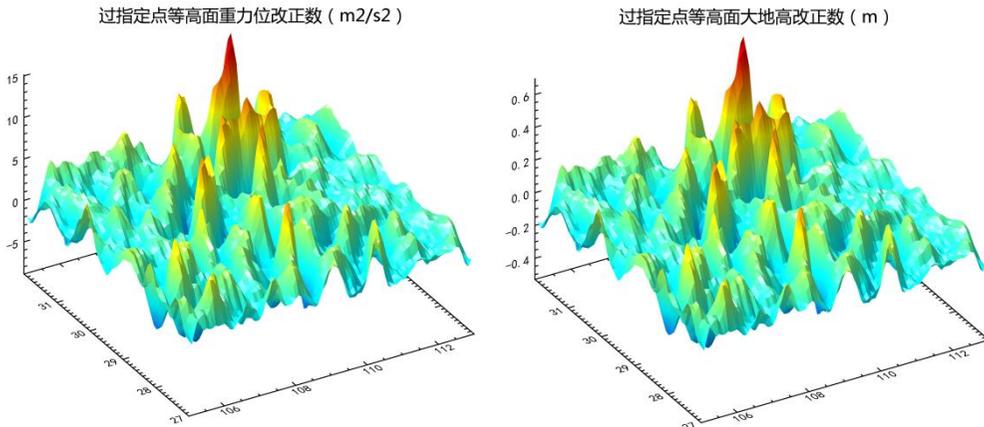
输出:

- (1) 过指定点等高面重力位改正数格网模型文件。
- (2) 过指定点等高面大地高改正数格网模型文件。

说明:

(1) 利用 EGM2008 重力场模型, 取最大计算阶数为 360 阶, 按“5.7 等高面模型重力位差计算”, 输入指定点位置参数(高程为正高/正常高), 得到过指定点等高面的模型重力格网与模型大地高格网数字模型文件。

(2) 由 EGM2008 模型, 构造某一等位面上(如大地水准面上)残差扰动重力格网(1800 阶-360 阶)。运行本程序, 由残差扰动重力格网, 按积分方式, 计算过指定点等高面重力位改正数格网模型和大地高改正数格网, 如图 2、3。



(3) 过指定点等正(常)高面高精度大地高格网的格值 = 模型大地高格网格值 + 其头文件第9个数 + 大地高改正数。

(4) 过指定点等高面高精度重力位格网的格值 = 模型重力位格网格值 + 其头文件第10个数 + 重力位改正数。

(5) 过指定点等正(常)高面大地高、重力位的精度水平,一般不低于该地区重力大地水准面的精度水平。

(6) 地面及近地空间中,过指定点等正(常)高面的重力位(大地高) = 过指定点等正(常)高面的模型重力位(模型大地高) + 重力位(大地高)改正数。

5.9 过指定点模型等位面构造

功能:利用高阶地球重力场位系数模型,计算过指定点(B, L, H)重力等位面的正(常)高、大地高相对于指定点正(常)高、大地高的模型高差格网。

输入:计算范围格网模型文件。格值类型不限,格网文件主要用于确定计算格网的经纬度范围和分辨率。

参数设置:如图 1。

(1) 输入指定点(B, L, H)的经纬度(度小数)、大地高(m)和地球重力场位系数模型最大计算阶数。

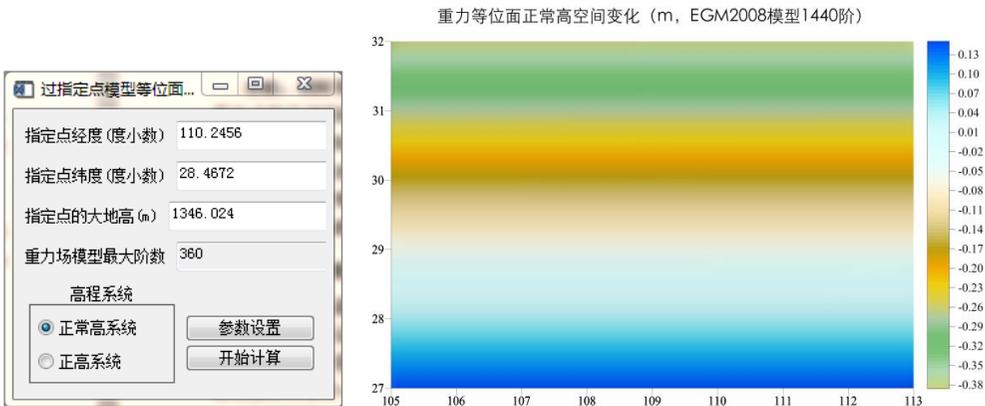
(2) 选择等高面高程系统类型。

输出:

(1) 过指定点等位面正(常)高模型值(m)格网数字模型。头文件第 7~11 个数分别是指定点的经度、纬度、大地高、正(常)高、重力位。正(常)高格网的格值,用其中心点的正(常)高相对于指定点的正(常)高差表示。

(2) 过指定点等位面大地高模型值(m)格网数字模型。头文件第 7~9 个数分别是指定点的经度、纬度、大地高,大地高格网的格值,用其中心点的大地高相对于指定点大地高的高差表示。

(3) 过指定点等正(高)面重力模型值(mGal)格网数字模型。头文件第 7~10 个数分别是指定点的经度、纬度、大地高与模型重力值,重力格网的格值,用其中心点的重力相对于指定点重力的重力之差表示。



说明:

(1) 利用 EGM2008 重力场模型,取最大计算阶数为 1440 阶,计算过指定点

(110.2456°, 28.4672°)、大地高为 1346.0240m 重力等位面的正常高 (-1367.9725m)、大地高 (-1346.0240m) 和重力 (-979026.5709mGal), 如图 2~4。

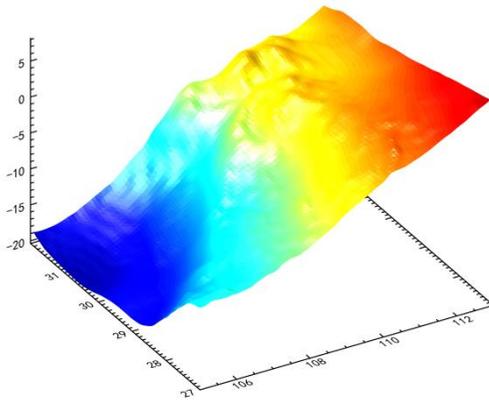
(2) 取最大计算阶数为 360 阶, 计算过指定点(110.2456°, 28.4672°)、大地高为 1346.0240m 重力等位面的正常高 (-1367.7253m)、大地高 (-1346.0240m) 和重力 (-979027.9170mGal), 如图 5~6。

(3) 过指定点模型重力等位面正(常)高格网的格值 = 模型正(常)高格网格值 + 其头文件第 10 个数。

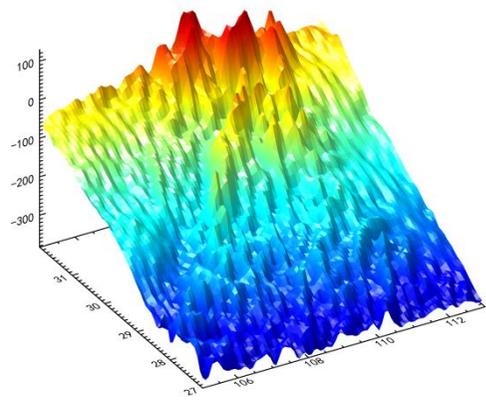
(4) 过指定点模型等位面大地高格网的格值 = 模型大地高格网格值 + 其头文件第 9 个数。

(5) 过指定点模型等位面重力格网的格值 = 模型重力格网格值 + 其头文件第 10 个数。

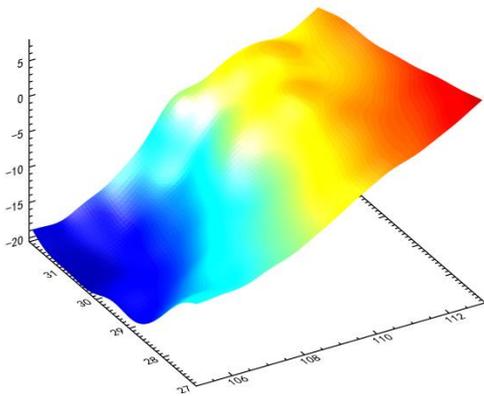
等位面大地高空间变化 (m, EGM2008模型1440阶)



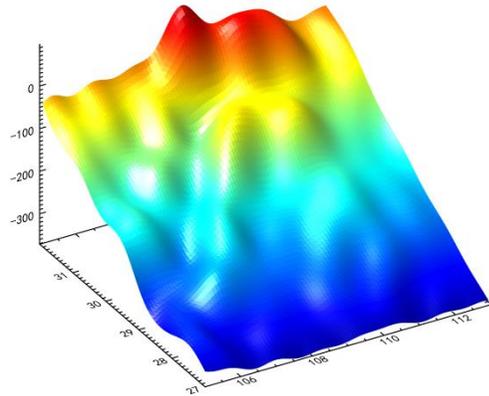
等位面重力空间变化 (mGal, EGM2008模型1440阶)



等位面大地高空间变化 (m, EGM2008模型360阶)



等位面重力空间变化 (mGal, EGM2008模型360阶)



(6) 程序可用于构造扰动重力场积分等位边界面的大地高格网数字模型。

⊙各类扰动重力场积分边界面只需米级精度, 因此重力场模型最大计算阶数取 360 阶, 一般就能满足要求。

(7) 图 2 显示, 重力等位面不是等正(常)高面, 重力等位面的正(常)高随纬度

变化差别明显，正（常）高越大，差别越明显。

(8) 依据正（常）高定义与重力场理论可知，等正高面与大地水准面处处平行，等正常高面在东西方向等位，等（正）常高面的重力位在南北方向存在明显差别。

5.10 过指定点重力等位面精化

功能：由某一等位面上残差扰动重力格网，计算过指定点(B, L, H)重力等位面的正（常）高或大地高相对于指定点正（常）高或大地高的残差高差格网。

输入：

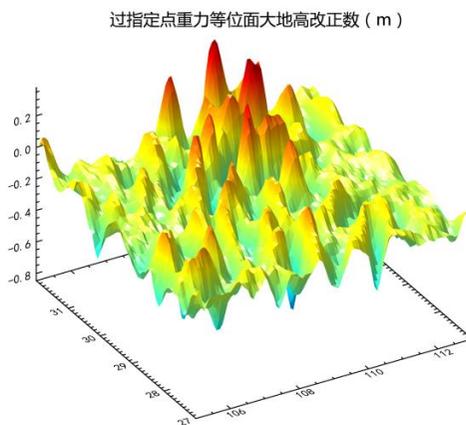
- (1) 同规格的等位面上残差扰动重力格网与等位面大地高格网数字模型文件。
- (2) 过指定点等位面的模型重力格网与模型大地高格网数字模型文件。由“5.9 过指定点模型等位面构造”生成。
- (3) 指定点经度、纬度、大地高从过指定点模型大地高格网头文件中提取，分别为头文件的第 7、8 和 9 个数。

参数设置：如图 1。

- (1) 输入积分半径 dr ， $10 < dr \leq 300\text{km}$ 。
- (2) 选择等高面高程系统类型。程序要求与“5.9 过指定点模型等位面构造”的参数设置保持一致。

输出：

- (1) 过指定点等位面大地高改正数格网模型文件。
- (2) 头文件倒数第 1 个数为指定点大地高改正数（m），倒数第 2 个数是等位面重力位改正数（ m^2/s^2 ）。
- (3) 等位面正（高）常改正数为常数，等于重力位改正数与重力的比值（一般不到 1mm，可以忽略）。



说明：

- (1) 利用 EGM2008 重力场模型，取最大计算阶数为 360 阶，按“5.9 过指定点模型

等位面构造”，输入指定点位置参数（经纬度、大地高），得到过指定点等位面的模型重力格网与模型大地高格网数字模型文件。

(2) 由 EGM2008 模型，构造某一等位面上（如大地水准面上）残差扰动重力格网（1800 阶-360 阶），运行本程序，生成过指定点等位面大地高改正数格网，如图 2。

(3) 过指定点等位面高精度大地高格网的格值 = 模型大地高格网格值 + 其头文件第 9 个数 + 大地高改正数。

(4) 过指定点等位面大地高、正（常）高的精度水平，一般不低于该地区重力大地水准面的精度水平。

(5) 地面及近地空间中，过指定点等位面的大地高（正高/正常高）= 过指定点等位面大地高（正高/正常高）的模型值 + 大地高（正高/正常高）改正数。

5.11 高程异常的解析相容性评估

功能：利用正常与正常高差异结果，由离散点高程异常计算该点处的大地水准面高和大地水准面重力位，将计算的重力位减去全部离散点的平均重力位，得到该点位差，再除以正常重力，输出以 cm 为单位的差异量。从而按“大地水准面重力位为常数”为衡量标准，评价高程异常的质量与算法偏离 Stokes 边值问题解的要求。

输入：含正高与正常高差异的高程异常点值文件。

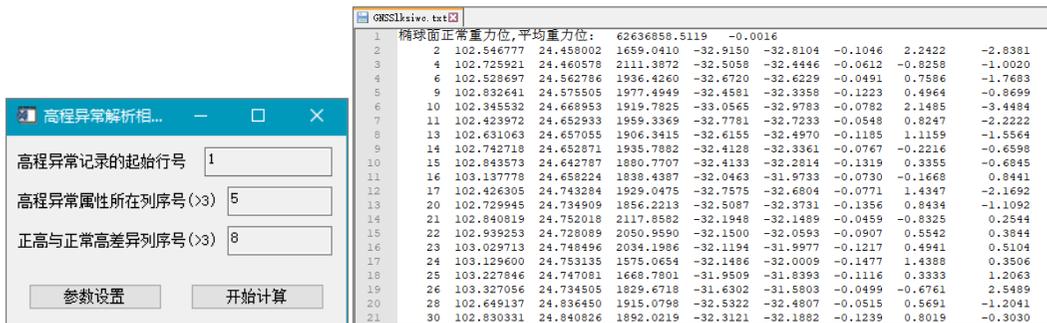
参数设置：如图 1。

(1) 高程异常点值文件记录的起始行号，高程异常、正高与正常高差异列序号。

输出：

(1) 大地水准面上重力位差异（cm）点值文件。

(2) 头文件倒数 2 个属性分别为：正常椭球面的正常重力位值 U_0 ，离散点在大地水准面上计算重力位的平均值与 U_0 之差。



说明：

(1) 正常与正常高差异，等于大地水准面高与高程异常差异，可用 5.5、5.6 模块计算，也可采用式 (1.6) 计算。当离散点上有实测重力值时，可在 5.5、5.6 模块计算的基础上，增加一项由 (1.6) 式导出的改正项。

(2) 当待评估的高程异常为重力高程异常时，该模块可用于评估重力地面高程异常算法是否偏离重力场边值问题解要求。

⊙不能评价重力地面高程异常的精度水平。这是因为，边界面上的重力数据误差，虽然导致边值问题解偏离实际重力场，但不会改变边值问题解的性质。

(3) 分别计算实用地面高程异常和重力地面高程异常的差异量，再相减，可评估 GNSS 水准融合算法偏离重力场边值问题解的程度。

5.12 地面高程异常成果精度评估

功能：基于 GNSS 水准高程异常与重力场频域误差特性，由 GNSS 水准残差高程异常（单位：m，GNSS 水准高程异常与重力地面高程异常之差），估计并确定用于表达地面高程异常成果精度的两个误差指标和两个误差曲线，即重力地面高程异常差误差、实用地面高程异常内部误差、实用地面高程异常差误差曲线与 GNSS 水准高程异常差误差曲线（单位：cm）。

将地面高程异常替换成大地水准面高，此项功能就可直接用于正高系统中大地水准面成果的精度评估。

输入：GNSS 水准残差高程异常点值文件。如图 1。

参数设置：如图 2。

(1) GNSS 水准残差点值文件记录的起始行号，残差高程异常（m）列序号。

(2) 输入区域 GNSS 水准点平均间距 D （单位：km）。 D 在程序内部用于计算实用地面高程异常内部误差。

Line	ID	N	E	H	Residual
1	102.442457	24.471769	1972.7703	-0.0813	
2	102.546777	24.458002	1659.0410	-0.1716	
3	102.632412	24.458211	2120.2558	-0.0439	
4	102.725921	24.460578	2111.3872	-0.0736	
5	102.420803	24.566357	1990.6386	-0.1506	
6	102.528697	24.562786	1936.4260	-0.1202	
7	102.634437	24.565660	2192.9271	-0.0543	
8	102.725888	24.581970	2303.7797	-0.0366	
9	102.832641	24.575505	1977.4949	-0.1419	
10	102.345532	24.668953	1919.7825	-0.1640	
11	102.423972	24.652933	1959.3369	-0.1081	
12	102.529771	24.667079	2157.7877	-0.0965	
13	102.631063	24.657055	1906.3415	-0.1606	
14	102.742718	24.652871	1935.7882	-0.1143	
15	102.843573	24.642787	1880.7707	-0.1619	
16	103.137778	24.658224	1838.4387	-0.0643	
17	102.426305	24.743284	1929.0475	-0.1029	
18	102.729945	24.734909	1856.2213	-0.1684	
19	102.840819	24.752018	2117.8582	-0.1535	
20	102.939253	24.728089	2050.9590	-0.1475	
21	103.029713	24.748496	2034.1986	-0.1363	

(3) 输入 GNSS 水准点两两组合后的分组数。

⊙程序将 n 个 GNSS 水准点两两组合，形成 $n(n-1)/2$ 条边，并按边长排序后，分组统计 GNSS 水准残差观测异常差。

⊙程序要求分组后，每组内的 GNSS 水准残差观测异常差数据量（等于边的个数），能保证统计分析基本可靠。

(4) 输入 GNSS 基线大地高差的固定误差和比例系数误差。

⊙这两个参数来源于 GNSS 定位数据处理，程序要求作为已知参数输入。

⊙在程序内部用于计算 GNSS 水准高程异常差误差曲线。

(5) 设置输出误差曲线的最大距离和距离间隔。

⊙用于输出和绘图，其中最大距离应不小于目标区域最大距离。

输出：如图 3。

(1) 用于完整表达地面高程异常成果精度的误差指标及误差曲线结果文件。

(2) 头文件由 5 个误差指标构成，按顺序分别表示：

⊙GNSS 水准残差高程异常的标准差 (cm)。

⊙两两组合后 GNSS 水准残差高程异常差的标准差 (cm)。

⊙重力地面高程异常差误差 (cm)。

⊙实用地面高程异常内部误差 (cm)。

⊙每千米正常高差误差 (cm/km)。

Line	Distance (km)	GNSS Std Dev (cm)	GNSS Pair Std Dev (cm)	Gravity Error (cm)	Practical Error (cm)	Normal Error (cm/km)
1	3.82794	5.43389	4.15904	1.60450	0.03074	
2	8	1.52842	4.15904	1.43461		
3	9	1.53588	4.15904	1.44078		
4	10	1.54417	4.15904	1.44762		
5	11	1.55329	4.15904	1.45512		
6	12	1.56321	4.15904	1.46327		
7	13	1.57393	4.15904	1.47205		
8	14	1.58542	4.15904	1.48144		
9	15	1.59767	4.15904	1.49142		
10	16	1.61067	4.15904	1.50197		
11	17	1.62438	4.15904	1.51307		
12	18	1.63881	4.15904	1.52471		
13	19	1.65392	4.15904	1.53686		
14	20	1.66970	4.15904	1.54949		

(3) 文件记录用于表达 3 条误差曲线。

⊙第 1 列为距离 (km, 自变量)，第 2 列为 GNSS 水准高程异常差误差 (cm)，第 3 列重力地面高程异常差误差 (cm, 常量)，第 4 列实用地面高程异常差误差。

⊙第 1 个记录中的距离值为误差曲线的最小距离 (图中“8”表示最小适合距离为 8km)，小于该距离时 GNSS 水准和实用高程异常差误差曲线的可靠性较低。

说明：

(1) 以某地区为例，采用 104 个 GNSS 水准点，组合成 $N = 5356$ 条边，按距离递增排列后分成 $M = 90$ 组。104 个 GNSS 水准残差高程异常和 5356 条边 GNSS 水准残差高程异常差的统计结果如表所示 (单位：cm)。

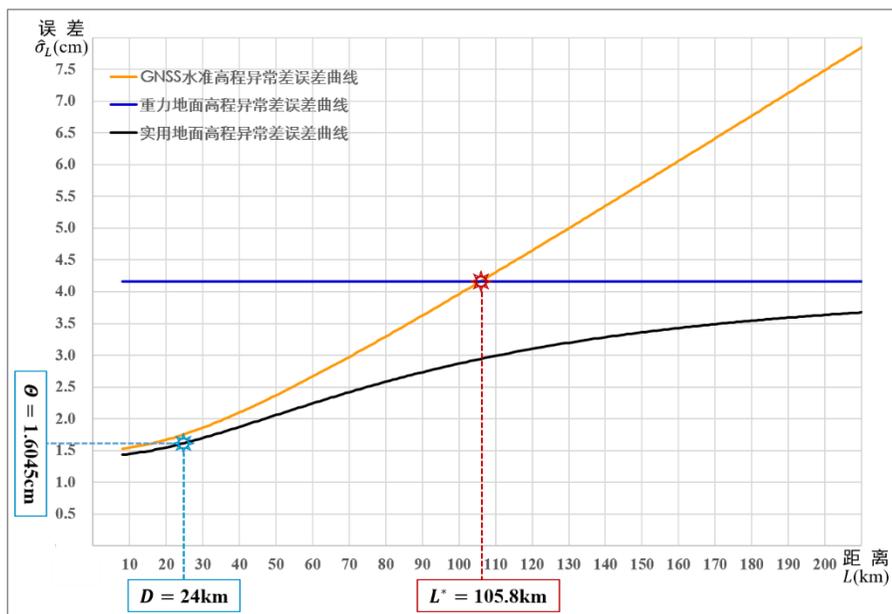
cm	标准差	平均值	最小值	最大值	统计数量
GNSS 水准残差高程异常	3.83	-12.282	-18.56	-2.26	104
GNSS 水准残差高程异常差	5.43	-0.252	-15.31	16.0	5356

(2) 取 GNSS 水准点平均间距 $D = 24\text{km}$ ，GNSS 大地高差固定误差和比例误差系数分别为 $a = 15\text{mm}$ 、 $b = 0.2\text{mm/km}$ ，程序计算得到每千米正常高差误差估值 $\hat{\sigma} = 0.0307\text{cm/km}$ ，重力地面高程异常差的误差估值 $\hat{\sigma}_{\text{Grav}} = 4.159\text{cm}$ ，实用地面高程异常内部误差 $\hat{\sigma} = 1.6045\text{cm}$ 。

(3) 由计算结果绘制 3 条误差曲线，如图 4。图中显示：

⊙实用地面高程异常差误差（黑线），既不大于重力地面高程异常差误差（蓝线），也不大于 GNSS 水准高程异常差误差（棕黄线）。实用地面高程异常差的误差曲线总是在其余两个误差曲线的下方。

⊙在距离 $L^*=105.8\text{km}$ 处，GNSS 水准高程异常和重力地面高程异常，对实用地面高程异常的精度贡献相当。小于 L^* 时，GNSS 水准高程异常的贡献大，大于 L^* 时，重力地面高程异常的贡献大。



⊙实用高程异常差误差曲线（黑线）的斜率，随距离增大而减小，且不大于 GNSS 水准高程异常差误差曲线的斜率。当斜率接近零时，实用地面高程异常差的误差逼近重力地面高程异常差的误差。

⊙当距离 L 接近或小于 GNSS 水准点平均间距 $D = 24\text{km}$ 时，GNSS 水准高程异常差对实用地面高程异常差的贡献起主导控制作用。

(4) 似大地水准面成果的精度评估，可由本程序计算给出的重力地面高程异常差误差、实用地面高程异常内部误差、实用地面高程异常差误差曲线与 GNSS 水准高程异常差误差曲线共 4 个要素完整表达。

5.13 高程基准零点重力位参数计算

功能：利用 GNSS 水准高程异常/GNSS 水准大地水准面高(m)、残差高程异常/残差大地水准面高等，估计区域高程基准零点重力位(m^2/s^2)，进而由系统参数确定的椭球面正常重力位 U_0 （等于重力大地水准面重力位）、全球大地位 W_0 ，计算区域高程基准零点重力位和高程基准转换参数。程序适用正高和正常高系统。

输入：GNSS 水准高程异常（大地水准面高）成果点值文件。

(1) 要求输入 GNSS 水准成果点值文件记录中，至少含 GNSS 水准高程异常/GNSS

水准大地水准面高(m)、残差高程异常/残差大地水准面高属性。

(2) 若没有 GNSS 水准点权值先验信息, 可在输入文件中将权值设为 1, 等权。

参数设置: 如图。



(1) GNSS 水准成果点值文件记录的起始行号。

(2) 输入 GNSS 水准高程异常 (大地水准面高)、残差高程异常 (大地水准面高) 和权值在记录中的列序号。

输出: 区域高程基准参数文件。

(1) 在源输入文件记录的基础上, 增加一列由该 GNSS 水准点计算的区域高程基准零点重力位与 U_0 之差 (m^2/s^2)。

(2) 最后一行记录由 6 个高程基准参数 (m^2/s^2) 构成, 按顺序分别表示:

① 区域高程基准零点重力位 W_R 。

⊙ 区域高程基准零点 (或水准原点高程值) 一旦确定, 其零点重力位 W_R 就已经客观存在, 理论上可唯一确定, 其数值大小能采用重力学方法持续精化。

⊙ 区域高程基准零点重力位不受人为约定影响, 因此, PALGrav3.0 推荐区域高程基准由其零点重力位唯一表示, 以便后续持续精化。

② 重力大地水准面的重力位 U_0 。

⊙ 等于正常椭球面的正常重力位, 由 PALGrav3.0 系统参数设置中给定的正常椭球参数决定。

⊙ 采用不同的正常椭球参数, 重力大地水准面的重力位也会不同。

③ 全球高程基准零点重力位 W_0 。

⊙ 等于全球大地位, 依据大地水准面的高斯定义, 可由重力场和海平面观测数据综合计算。

⊙ W_0 值是一种约定 (大地水准面的高斯定义本身就是一种约定), 虽然确定其值表象上存在不确定性, 但一般不会影响高程基准的性质。

④ 区域高程基准与重力大地水准面的位差 $W_R - U_0$ 。

⊙ 可用于表示区域高程基准零点重力等位面与重力大地水准面的差异。

⑤ 区域高程基准与全球高程基准位差 $W_R - W_0$ 。

⊙ 用于区域高程基准与全球高程基准转换。

⑥ 重力大地水准面与全球大地水准面位差 $U_0 - W_0$ 。

5.14 泊松方程约束 GNSS 水准融合

功能：对于正常高系统，由离散 GNSS 水准点残差高程异常值与等位面大地高数字格网模型，采用固定积分半径的 Poisson 积分方程约束，确定与重力地面高程异常格网规格相同的区域残差高程异常模型，实现 GNSS 水准与重力高程异常融合。

对于正高系统，由离散 GNSS 水准点残差大地水准面高值与等位面大地高数字格网模型，采用固定积分半径的 Poisson 积分方程约束，确定区域残差大地水准面高格网模型，实现 GNSS 水准与重力大地水准面融合。

输入：

(1) 离散 GNSS 水准点残差量文件。对于正常高系统，为 GNSS 水准残差高程异常文件；对于正高系统为 GNSS 水准残差大地水准面高文件。

(2) 过 GNSS 水准点平均高程等位面大地高数字格网模型。等位面大地高数字模型可由“5.7 过指定点的模型等位面构造”生成。

(3) 重力地面高程异常所在的地面大地高格网模型，或重力大地水准面高格网模型。

(4) 等位面大地高模型格网分辨率约为 GNSS 水准点平均间距的 1/4~2 倍为宜。

(5) 所有输入输出参数单位为 m。

参数设置：如图 1。

(1) 输入离散 GNSS 水准残差文件记录的起始行号，大地高、GNSS 水准残差值和权值所在的列序号。

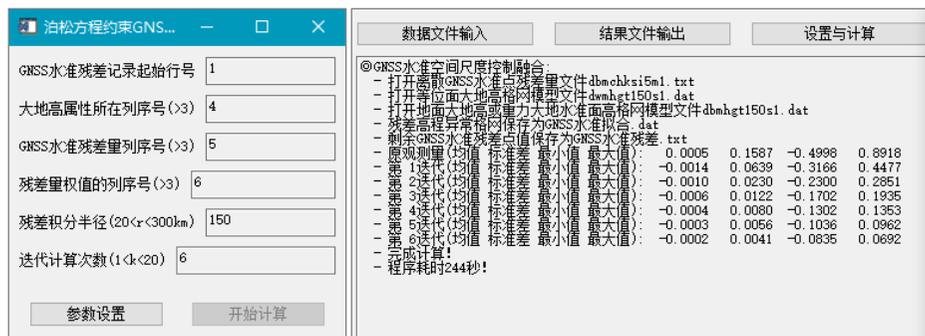
⊙GNSS 水准残差量的权值可根据 GNSS 水准点的大地高定位精度、水准高程精度、地形起伏程度、以及 GNSS 定位与水准测量的作业时间差异等粗略估计。

(2) 输入固定积分半径 dr （单位：km）。在 GNSS 水准与重力大地水准面数据融合时，起空间尺度控制作用。

⊙积分半径的大小，以有利于 GNSS 水准与重力大地水准面在不同空间尺度上精度互补性为原则，与 GNSS 水准点空间密度和分布无直接关系。

⊙重力地面高程异常或重力大地水准面精度越高，固定积分半径可以越小。

(3) 输入迭代计算次数 $k(1 < k < 20)$ 。



输出：

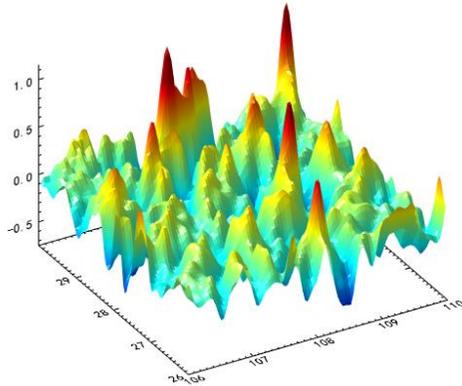
(1) 界面输出迭代过程中残差值的统计信息，如图 2。

(2) 输出与地面大地高格网规格相同的残差地面高程异常格网模型（正常高系统），或与重力大地水准面高格网相同的残差大地水准面高格网模型（正高系统）。如图 3。

(3) 生成剩余 GNSS 水准残差量点值文件。在源 GNSS 水准残差量文件记录的基础上，增加一列剩余 GNSS 水准残差值。

⊙残差点值文件头文件共 $k + 1$ 行。第一行为源观测统计信息， $2 \sim k + 1$ 行为 $1 \sim k$ 次迭代过程中残差值的统计信息。

⊙统计信息内容：剩余 GNSS 水准残差量的平均值、标准差、最小值、最大值。



Iteration	Mean	Std	Min	Max	Other	Other
1	0.001	0.159	-0.500	0.852		
2	-0.001	0.064	-0.317	0.448		
3	-0.001	0.023	-0.230	0.285		
4	-0.001	0.012	-0.170	0.194		
5	-0.000	0.008	-0.130	0.135		
6	-0.000	0.006	-0.104	0.096		
7	-0.000	0.004	-0.083	0.069		
8	2	106.020833	26.020833	1398.605	0.0901	1
9	2	106.062500	26.020833	1248.667	0.0488	1
10	2	106.104167	26.020833	1220.714	-0.0051	1
11	2	106.145833	26.020833	1263.773	-0.0419	1
12	2	106.187500	26.020833	1210.852	-0.0541	1
13	2	106.229167	26.020833	1209.943	-0.0491	1
14	2	106.270833	26.020833	1265.035	-0.0375	1
15	2	106.312500	26.020833	1237.125	-0.0251	1
16	2	106.354167	26.020833	1280.203	-0.0188	1
17	2	106.395833	26.020833	1286.261	-0.0304	1
18	2	106.437500	26.020833	1179.298	-0.0693	1
19	2	106.479167	26.020833	1078.294	-0.1266	1
20	2	106.520833	26.020833	1016.312	-0.1711	1
21	2	106.562500	26.020833	972.373	-0.1703	1
22	2	106.604167	26.020833	1000.483	-0.1193	1
23	2	106.645833	26.020833	1147.612	-0.0499	1
24	2	106.687500	26.020833	1221.724	0.0015	1

说明：

(1) GNSS 水准融合前，应移去残差高程异常平均值，融合后恢复平均值。否则，有限半径的 Poisson 积分约束会改变平均值大小，且导致边缘效应。

(2) 重力大地水准面中长波精度高，GNSS 水准短波、超短波精度高。

(3) GNSS 水准与重力大地水准面融合的最优化目标是：在空间尺度框架中，优化配置重力地面高程异常的高精度中长波成分，与实测 GNSS 水准高程异常的高精度短波、超短波成分。

(4) 融合后的（似）大地水准面，长距离精度由重力地面高程异常（或重力大地水准面高）控制，短距离精度与 GNSS 水准相对精度密切相关。

(5) 首先，选择迭代较大迭代次数，运行程序，进行试算，观察迭代过程中统计信息，根据迭代过程中统计信息的变化特点，确定最后的迭代次数 k 。

(6) 采用最后的迭代计算次数，再次运行程序，得到最终的高程异常格网模型和剩余 GNSS 水准残差量点值文件。

(7) 程序求解的残差地面高程异常格网模型，实质上是分离了残差 GNSS 水准高程异常中满足 Poisson 积分方程约束条件的部分。

(8) 剩余 GNSS 水准残差量，是整个 GNSS 水准网实测高程异常（或实测大地水准面高）之间，不满足 Poisson 积分关系的部分。因此，可直接用于定量评估 GNSS 水准网的质量与精度水平。

(9) 程序还可用于由地面、海面或近地空间不同高度上的（残差）扰动重力、垂线偏差或高程异常等扰动场元，确定指定等位面上扰动场元格网模型，实现不同高度离散

场元的数据融合。

还可以 GNSS 水准残差高程异常差为观测量,按 5.12 节估计观测量误差,进行配权,采用泊松方程约束,实现 GNSS 水准解析深度融合。此项功能模块及与此相适应的水准网拟稳平差功能,拟在今后的版本更新中实现。

5.15 残差高程异常水准网拟稳平差

功能:由剩余 GNSS 水准残差高程异常点值文件,GNSS 水准网中的水准测段文件,以全部 GNSS 水准点为拟稳基准,采用附有拟稳基准约束的间接最小二乘平差法,计算 GNSS 水准网中全部水准点的正(常)高改正数和 GNSS 水准点高程异常改正数(拟稳基准未知数)。

输入:

(1) 剩余 GNSS 水准残差高程异常点值文件,如图 1。

⊙记录格式:GNSS 水准点名,经度,纬度,剩余残差高程异常(m),权值,...

⊙GNSS 水准点权值的确定同 5.11。

⊙点值文件可以是 5.11 最后一次迭代产生剩余 GNSS 水准残差高程异常文件,也可能是移去重力地面高程异常后的 GNSS 水准残差高程异常文件(即 5.11 输入文件)。

GNSS水准残差高程异常.txt	水准路线.txt
1 CANN 120.424700 27.522580 0.024 2.7218	1 9 4
2 JHYW 120.078380 29.272690 0.145 1.9488	2 CANN_DONT 120.424700 27.522580 121.150270 27.834630 79493.9
3 JNJJ 119.637540 27.976350 0.020 0.3134	3 CANN_FDIQ 120.424700 27.522580 120.207320 27.335310 29876.4
4 LISH 119.929490 28.461260 -0.108 0.8684	4 CANN_JHYW 120.424700 27.522580 120.078380 29.272690 196899.1
5 PANA 120.436660 29.054190 -0.062 5.8906	5 CANN_JINH 120.424700 27.522580 119.642580 29.217830 202930.8
6 QINT 120.289980 28.139380 0.008 0.6973	6 CANN_JINX 120.424700 27.522580 119.379220 29.070950 199897.1
7 QUZH 118.890770 28.993670 0.102 2.1997	7 CANN_JNJZ 120.424700 27.522580 119.637540 27.976350 92473.9
8 SHNQ 119.502790 27.457610 -0.138 0.4901	8 CANN_JSAN 120.424700 27.522580 118.608560 28.727950 222881.6
9 TAIJ 121.416410 28.618320 -0.082 2.5975	9 CANN_LHAI 120.424700 27.522580 121.189470 28.905910 170695.1
10 XNJU 120.765820 28.883110 0.046 0.7208	10 CANN_LISH 120.424700 27.522580 119.929490 28.461260 114864.2
11 YANT 120.724970 28.449590 0.002 1.7007	11 CANN_LONQ 120.424700 27.522580 119.133090 28.080720 141509.7
12 YUEQ 121.008970 28.230740 -0.027 2.0692	12 CANN_LUOY 120.424700 27.522580 119.705090 27.552460 71164.3
13 ZJXJ 120.785590 28.848810 -0.042 0.2073	13 CANN_PANA 120.424700 27.522580 120.436660 29.054190 169743.8
14	14 CANN_PCHQ 120.424700 27.522580 118.542210 27.923210 190867.4
	15 CANN_PCJM 120.424700 27.522580 118.445440 28.167970 207660.5

(2) GNSS 水准网的水准测段文件,如图 2。

⊙头文件格式:水准测段名称字符数,水准点或 GNSS 水准点的点名字符数,...

⊙记录格式:测段名称,测段两端水准点经纬度(度小数),路线长度(m),.....

⊙一个记录只存放一个水准测段,一条水准测段只含一个水准高差观测量。

⊙程序要求测段名由其两端的水准点点名组合而成,GNSS 水准点的 GNSS 点名与水准点名完全相同。

⊙程序自动按测段长度反比对水准高差观测量进行配权。

⊙水准点名和水准测段名称约定:水准测段名称 B***A 由两端水准点名 A、B 构成,所有水准点名(如 A、B)的字符数相同。图 2 第一个记录中,水准测段名为 CANN_DONT,水准点名 A 为“DONT”,水准点名 B 为“CANN”,水准点名字符数等于 4。“***”为用户自定义字符,要求对于所有水准测段,字符数保持不变,图 2 中“***”为“_”,字符数等于 1。

参数设置:输入剩余 GNSS 水准残差记录起始行号,剩余残差高程异常及其权值列序号,如图 3。



输出：

(1) 水准点正（常）改正数文件。记录格式为：水准点号（点名）、经度、纬度、水准点高程改正数（m），如图 4。

(2) GNSS 水准高程异常改正数文件。记录格式为：GNSS 水准点号（点名）、经度、纬度、高程异常改正数（m）、权值，如图 5。

说明：

(1) 平差前后 GNSS 水准网的高程基准不变。

(2) 采用的平差模型，有利于同时改进 GNSS 水准高程异常的中长波误差和水准高差长距离传递误差。

(3) 当输入数据为移去重力地面高程异常后的 GNSS 水准残差高程异常时，程序具备 GNSS 水准与重力大地水准面融合能力。

(4) 当输入数据为剩余 GNSS 水准残差高程异常时，程序能进一步提升大地水准面与水准网的自洽性和相容性。

(5) 平差结果，可用于分析评价 GNSS 水准网、水准控制网和重力大地水准面的误差特性和成果质量。

水准点高程改正数 .txt					GNSS水准高程异常改正数 .txt					
1	CANN	120.424700	27.522580	-0.0232	1	CANN	120.424700	27.522580	0.024	2.7218
2	DONT	121.150270	27.834630	0.0007	2	JHYW	120.078380	29.272690	0.145	1.9488
3	FDIQ	120.207320	27.335310	0.0009	3	JNJZ	119.637540	27.976350	0.020	0.3134
4	JHYW	120.078380	29.272690	-0.1520	4	LISH	119.929490	28.461260	-0.108	0.8684
5	JINH	119.642580	29.217830	-0.0075	5	PANA	120.436660	29.054190	-0.062	5.8906
6	JINK	119.379220	29.070950	-0.0077	6	QINT	120.289980	28.139380	0.008	0.6973
7	JNJZ	119.637540	27.976350	-0.0210	7	QUZH	118.890770	28.993670	0.102	2.1997
8	JSAN	118.608560	28.727950	-0.0070	8	SHNQ	119.502790	27.457610	-0.138	0.4901
9	LHAI	121.189470	28.905910	-0.0012	9	TAIZ	121.416410	28.618320	-0.082	2.5975
10	LISH	119.929490	28.461260	0.1062	10	XNJU	120.765820	28.883110	0.046	0.7208
11	LONQ	119.133090	28.080720	-0.0033	11	YANT	120.724970	28.449590	0.002	1.7007
12	LUOY	119.705090	27.552460	0.0010	12	YUEQ	121.008970	28.230740	-0.027	2.0692
13	PANA	120.436660	29.054190	0.0581	13	ZUXJ	120.785590	28.848810	-0.042	0.2073
14	PCHQ	118.542210	27.923210	-0.0039	14					

5.16 指定参考属性观测量权值计算

功能：利用离散点值文件中指定属性的数值和标准差，由用户指定参数，按系统内部设计的权函数形式，估计离散点的权值。

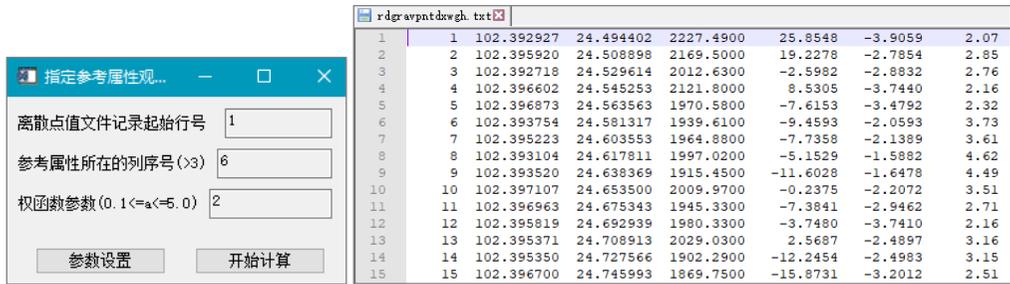
输入：含参考属性的离散点值文件。

参数设置：如图 1。

(1) 输入离散点值文件记录的起始行号。

(2) 输入参考属性在记录中的列序号。

输出：权值结果点值文件，如图 2。在输入文件记录的基础上，增加一列权值属性。



说明:

(1) 权函数形式: $w = 10\sigma / \sqrt{\sigma^2 + (ax)^2}$ 。x为指定参考属性值(权函数自变量), σ 为的标准差, a为用户输入的权函数参数。

(2) 当参考属性x = 0时, 权值w = 10, 当x → ±∞时, 权值w → 0, 因此, 权函数值域为w ∈ (0, 10]。

5.17 GNSS 代替水准测量计算器

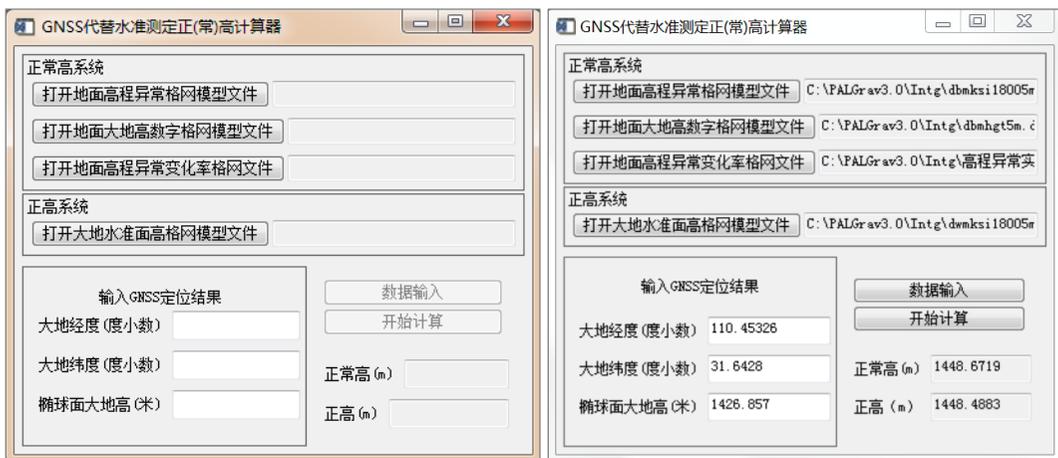
功能: 设置(似)大地水准面成果格网模型文件, 按照用户输入的 GNSS 定位结果, 交互式计算 GNSS 定位点的正常高。

参数设置: 如图 1。

(1) 对于正常高系统, 程序要求输入格网规格完全相同的 3 个格网文件, 即地面高程异常(m)格网模型, 表示高程异常所在位置的地面大地高格网模型, 以及地面高程异常径向变化率(cm/km)格网模型。

(2) 对于正高系统, 程序要求输入大地水准面高格网模型。

(3) 输入测点 GNSS 定位结果的三维大地坐标, 经纬度格式为度小数, 大地高的单位为 m。程序要求测点位于成果模型格网的经纬度范围内。



输出:

(1) 当用户只设置正常高系统中的似大地水准面成果格网模型时, 程序输出 GNSS 代替水准测定的正常高值(保留 4 位有效数字)。

(2) 当用户只设置大地水准面高格网模型时，程序输出 GNSS 代替水准测定的正高值（保留 4 位有效数字）。

(3) 当所需格网数据全部设置后，程序可同时输出正常高和正高值。

(4) 大地水准面成果格网模型可一次性设置，也可中途更换，用户每输入一组 GNSS 定位结果，程序交互式给出与当前成果格网模型对应的正（常）高值。

说明：

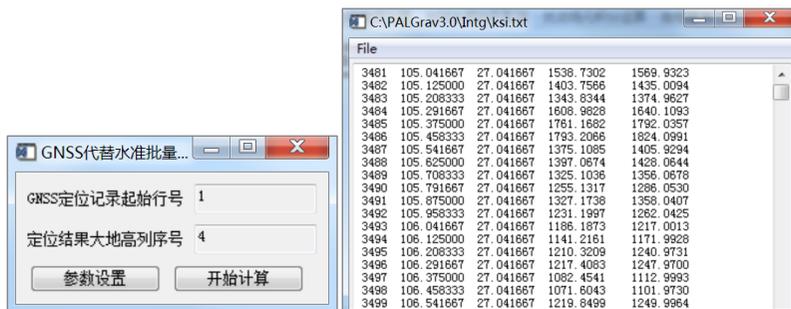
(1) 地面大地高模型与地面高程异常模型一一对应，代表地面高程异常所在的位置，大地高精度一般达到 10m 就能满足 1cm 精度要求。

(2) 地面高程异常径向变化率用于测点高程异常的精密改正。

5.18 GNSS 代替水准批量点计算

功能：由地面高程异常（m）格网模型，地面大地高格网模型和地面高程异常径向变化率（cm/km）格网模型，计算 GNSS 定位点的正常高。

参数设置：输入 GNSS 定位点记录起始行号和大地高属性所在列序号，如图 1。

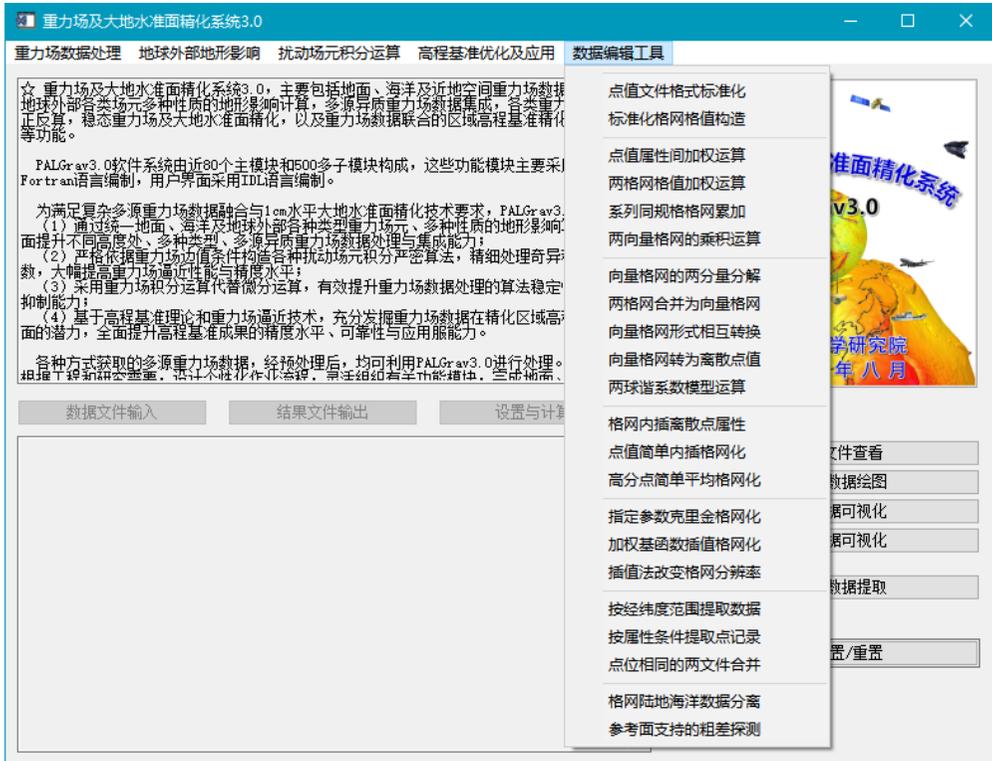


输出：GNSS 代替水准测定正常高的结果点值文件。在源 GNSS 定位点值文件记录的基础上增加一列该点的正常高值，保留 4 位有效数字，如图 2。

说明：正高系统的 GNSS 代替水准批量计算，可通过调用“6.12 格网内插离散点属性”来实现。

第六章 数据编辑工具箱

数据编辑工具箱主要用于重力场及大地测量数据 PALGrav3.0 标准化, 数据文件构造、格式转换, 插值与格网化, 数据提取、分离与合并, 数据粗差探测, 多组数据基本运算, 以及其他数据预处理等。



6.1 点值文件格式标准化

功能: 将不同来源、非标准格式的点值文件转换为 PALGrav3.0 约定格式的点值文件。

输入: 点击“打开源离散点数据文件”按钮, 选择需要标准化的离散点值记录文件, 程序将源文件记录 (包含头文件) 显示到左边的文本框中, 如图。

参数设置: 如图。

(1) 输入记录起始行号 n 。程序将源文件中的 $1 \sim n - 1$ 行记录作为头文件输出。

(2) 按顺序设置所需输出的源文件记录列序号。当列序号在源文件记录中有效时, 该属性被提取并输出; 当列序号无效时, 程序自动忽略。

输出: 点击“标准化点值文件保存为”按钮, 程序按用户要求输出点值文件。

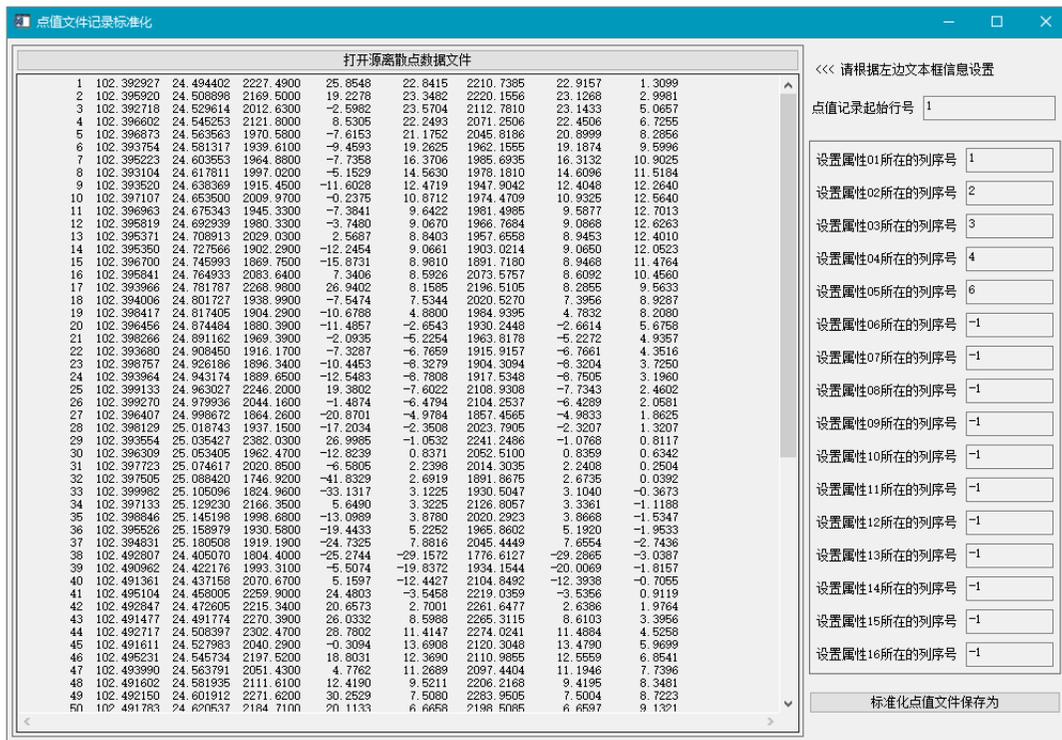
说明:

(1) 点值文件标准化是 PALGrav3.0 接收其他类型格式文件的重要数据接口。

(2) 当采用其他工具编辑点值文件时, 应事先调用“点值文件格式标准化”, 检查是

否为标准的点值文件。

(3) 程序输出记录时自动扣除多余的空格字符。

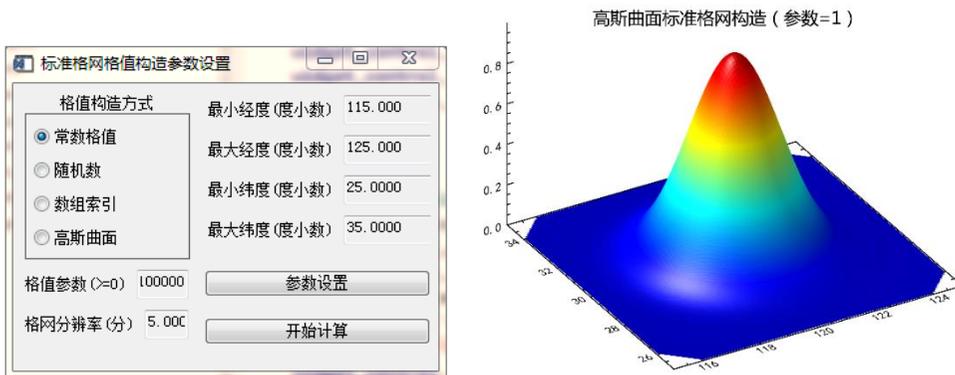


6.2 标准化网格值构造

功能：按指定经纬度范围和分辨率，生成标准化的常数值、随机数、数组索引值、二维高斯曲面格网。

参数设置：如图 1。

- (1) 选择格网值构造方式，输入格网经纬度范围和分辨率。
- (2) 输入格值参数 (≥ 0)。当格值构造方式为“数组索引”时，程序忽略格值参数。



输出：PALGrav3.0 约定格式的格网数字模型文件。

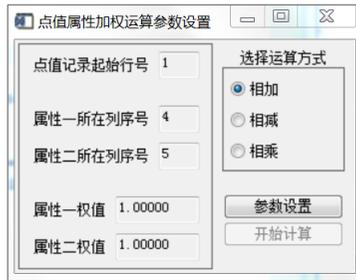
6.3 点值属性间加权运算

功能：对点值文件记录中指定的两个属性执行带权的加、减或乘法运算。

输入：含两列运算属性值的离散点值记录文件。

参数设置：如图。

- (1) 输入记录起始行号，选择运算方式（加、减、乘）。
- (2) 输入属性一、二所在的列序号和权值。



输出：属性加权运算结果点值文件。在源计算点值文件记录的基础上增加一列两属性加权运算值，保留 4 位有效数字。

说明：两列属性加权运算值 x 的算法通式为： $x = p_1x_1 \odot p_2x_2$ 。式中 p_1 、 p_2 分别为属性一和二的权值； x_1 、 x_2 分别为属性一和二的数值； \odot 为加、减或乘。

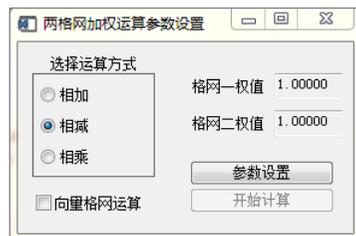
6.4 两规格网格值加权运算

功能：对两个同规格（向量）格网元素执行带权的加、减或乘法运算。

输入：格网规格相同的两个（向量）格网模型文件。

参数设置：如图。

- (1) 选择运算方式（加、减、乘）。
- (2) 输入格网一、二的权值大小。
- (3) 当选用向量格式后，程序对两个向量格网执行运算。



说明：输出格网格值 x 的算法通式为： $x = p_1x_1 \odot p_2x_2$ 。式中 p_1 、 p_2 分别为格网一和二的权值； x_1 、 x_2 分别为格网一和二的格值； \odot 为加、减或乘。

6.4 系列同规格格网累加

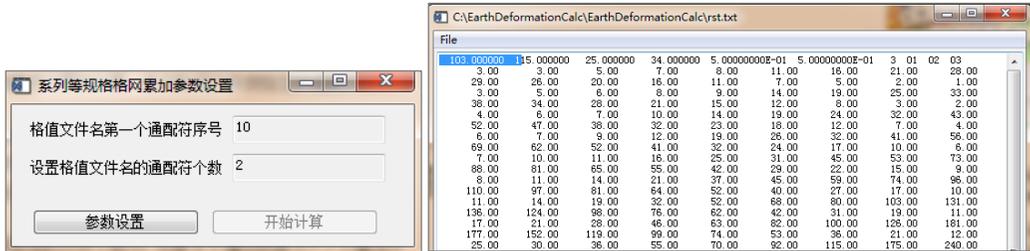
功能：对一系列同规格格网数据进行累加计算。系列格网文件按用户指定的通配符自

动提取。

输入：

(1) 将所需累加的格值文件放在一个目录下面，不同格网的文件名除通配符不同外，其余字符完全相同，用户选择其中任何一个打开即可。

(2) 要求所有格网的规格完全相同。



参数设置：格网时序文件名第一个通配符序号和通配符个数，如图 1。

输出：头文件第 7 个数为参与累加的文件个数 n ，从第 8 个属性到第 $n+7$ 个属性分别为 n 个文件名通配符对应的实名符号，如图 2。

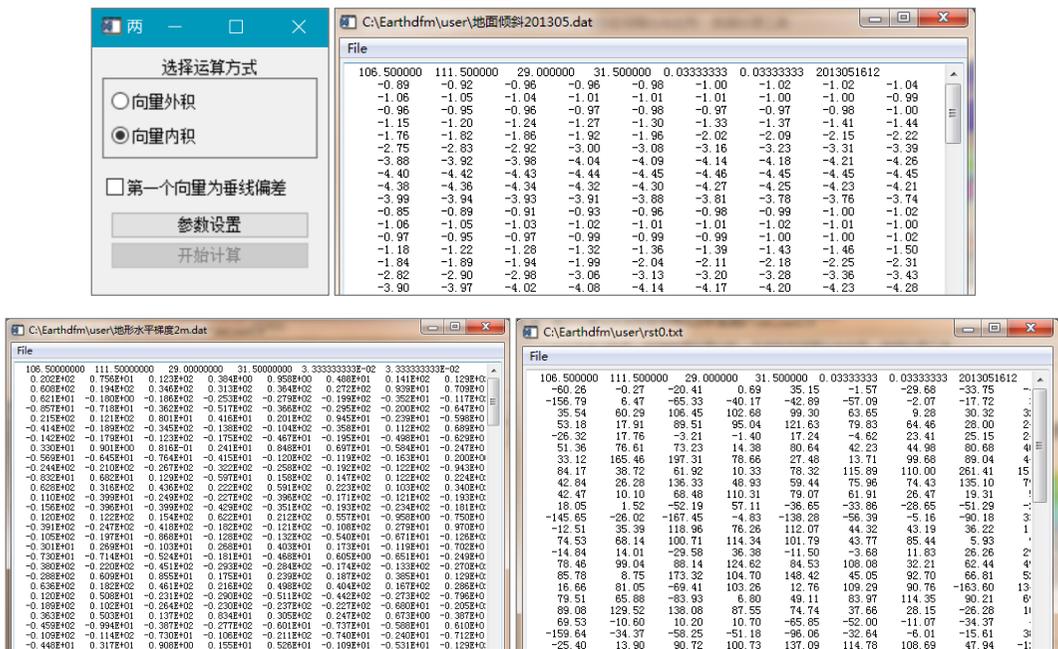
6.6 两向量格网乘积运算

功能：对两个同规格向量格网的格值向量进行外积或内积运算。

参数设置：如图 1。

(1) 选择“外积”或“内积”运算方式。

(2) 当选择“第一个向量为垂线偏差”时，程序将第一个向量由垂线偏差向量格式转换为东北方向 xy 当地平面坐标格式（注意：不是东北方向）。



说明：

- (1) 向量格网的外积运算结果，以向量格网模型形式存储。
- (2) 向量格网的内积运算结果，以格网数字模型形式存储。

6.7 向量格网的两分量分解

功能：将向量格网文件分解为两个分量格网文件。

6.8 两格网合并为向量格网

功能：将两个规格完全相同的格网，作为向量的两个分量，合并为向量格网。

6.9 向量格网形式相互转换

功能：向量格网格值在平面坐标（同相/异相幅值）与极坐标（振幅/迟角）形式之间的相互转换。

说明：

- (1) 平面坐标（同相/异相幅值）向量格式便于数学运算。
- (2) 极坐标（振幅/迟角）向量格式便于直观显示，但不方便数学运算。

6.10 向量格网转为离散点值

功能：将（向量）格网格值（向量）转换为离散点值（向量）。

参数设置：当选择“数字格网转为离散点值”时，程序将格网数字模型文件转换为离散点值文件。

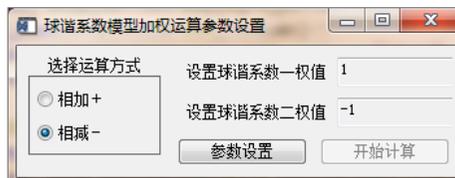
6.11 两组球谐系数模型运算

功能：对两个无头文件的规格化球谐系数模型执行加权运算。

输入：两个规格化球谐系数模型文件。要求文件无头文件。

说明：

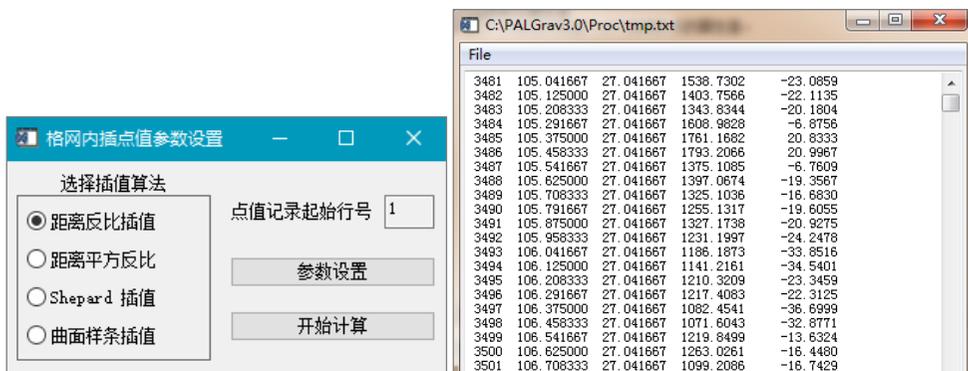
- (1) 两个球谐系数模型的最大阶数不必相等，阶次也无需一一对应，加权运算输出最大阶次结果球谐系数模型。
- (2) 球谐系数模型文件中阶次可以不按先后顺序排列。
- (3) 当球谐系数有误差项时，程序按误差传播定律计算运算后的误差项。
- (4) 当一个球谐系数模型有误差项，而另一个球谐系数模型没有误差项，程序忽略球谐系数模型误差项。



(5) 通过设置合适的权值，选择适当的计算方式，可求得多个球谐系数模型的平均值、球谐系数模型变化量或变化率等。

6.12 格网内插离散点属性

功能：由格网数字模型文件，按指定的插值方式，内插离散点的属性值。



6.13 点值简单内插格网化

功能：由点值文件，按指定属性、插值方式、格网范围和分辨率，生成格网模型。

参数设置：如图。



(1) “格值搜索范围” n 代表：用以待插值格网为中心、面积为 $(2n-1) \times (2n-1)$ 格网范围内的离散点数据，内插该格网的格值。

(2) 选择“输出球坐标格网”时，输出格网的纬度为地心纬度。此项功能可在球谱分析时，降低格网化误差。

(4) 输入格网经纬度范围和分辨率。

说明：

(1) 输出格网格值保留 4 位有效数字。

(2) 查看结果格网文件，若出现格值等于 9999 或 NAN 时，说明存在空白区。用户可根据实际情况，或者将输出格网转换成离散点值，使用本程序进一步格网化，或者在设置中增大格值搜索范围。

6.14 高分点直接平均格网化

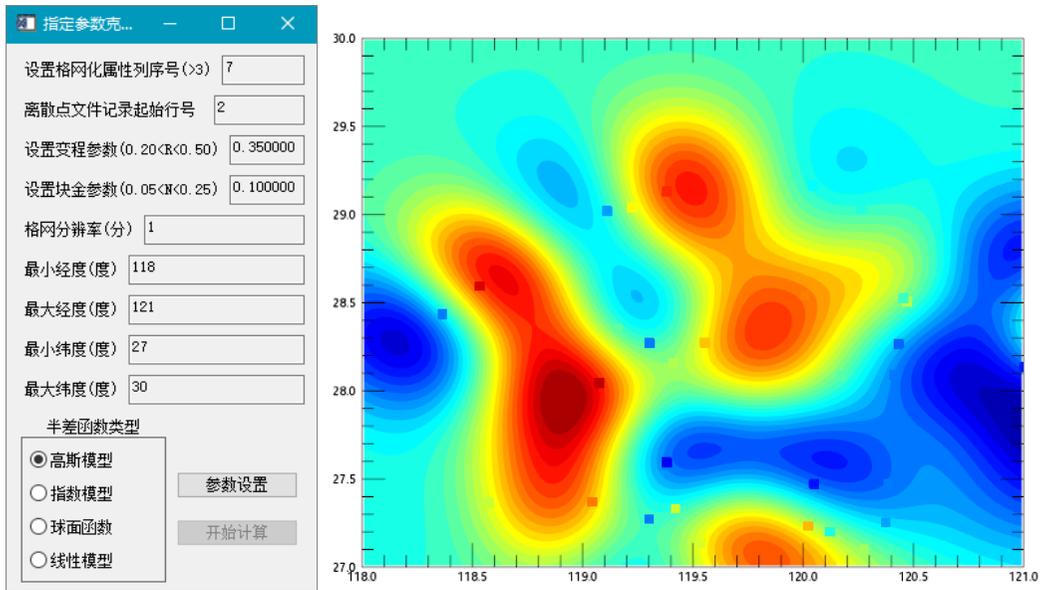
功能：采用直接平均法将高分辨率离散点数据进行格网化。

6.15 指定参数克里金格网化

功能：按输入的格网规格和选定的半（方）差函数形式及参数值，对离散点值数据进行格网化运算。

输入：待格网化的离散点值文件。

参数设置：如图 1。



- (1) 设置待格网化的离散点属性列序号，输入点值属性记录起始行号。
- (2) 设置克里金半差函数形式：高斯函数、指数函数、球面函数或线性函数。
- (3) 输入半差函数参数值：变程 (R) 和块金 (N) 参数。
- (4) 设置格网分辨率和经纬度范围。

输出：如图 2。

(1) 图中离散点值（彩色小方框）颜色与其附近格网值颜色越接近，表明格网化残差越小。

(2) 用户可依据图 2 中离散值与格网值色彩匹配情况，调整半差函数形式及其参数值，提高格网化性能。

6.16 加权基函数插值格网化

功能：按输入的格网规格和选定的插值权函数形式及参数值，对离散点值数据进行乘权格网化运算。

输入：待格网化的离散点值文件。

参数设置：如图 1。

(1) 输入点值属性记录起始行号，设置待格网化的离散点属性列序号。

(2) 设置插值权函数形式：余弦函数、高斯函数或指数函数。

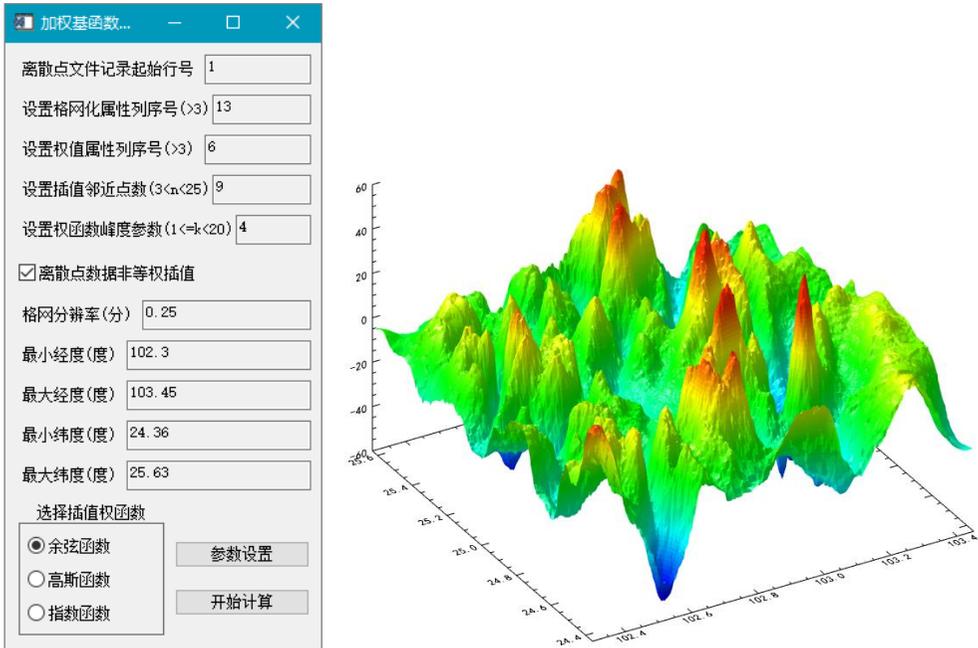
(3) 设置权值属性所在列序号，选择离散点数据非等权插值。

①计算插值点数值时，程序将离散点记录属性中的权值与权函数（插值点与离散点之间距离为自变量的函数）相乘，作为离散点权值。

②当不选择“离散点数据非等权插值”时，所有离散点的权值等于其权函数值。

(4) 设置格网分辨率和经纬度范围。

(5) 输入权函数峰度参数。参数值越大，权函数值随距离衰减越快。



输出：输出格网保留 4 位有效数字，结果如图 2。

说明：

(1) 加权基函数插值格网化，适合各种空间分布差异大、精度不均匀的地球物理观测数据格网化，自适应采样点密度，无边缘效应，有利于构造高性能地球物理场。

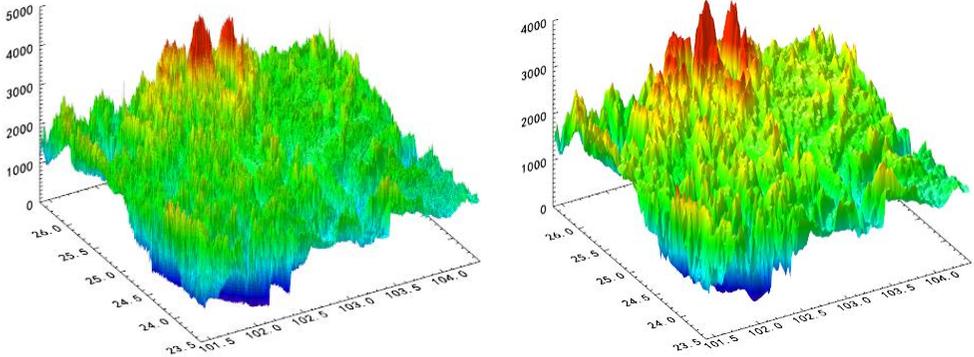
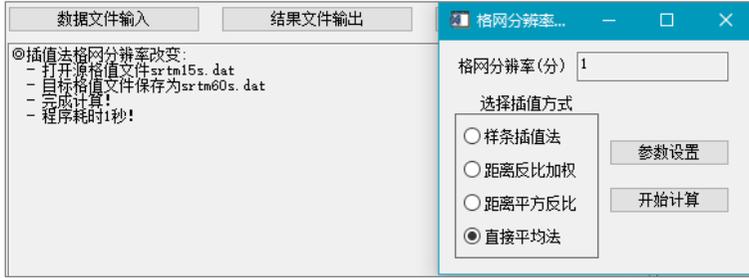
(2) 权函数峰度越小，插值邻近点数越大，格网化过程的低通滤波能力越强，边缘平滑度越强，对稀疏数据的插值能力也越强。

(3) 离散重力场元格网化建议：地形代表性误差是重力数据格网化的主要误差来源。为此，用户可先计算离散重力点的局部地形影响，以局部地形影响为参考属性，调用“5.16 指定参考属性观测量权值计算”，计算离散重力点权值，然后调用本模块，构造高性能的格网平均重力场。

6.17 插值法改变格网分辨率

功能：按输入的格网分辨率和选定的插值方法提高或降低格网的分辨率。

参数设置：如图 1。



说明：

(1) 直接平均法仅用于降低分辨率。当目标分辨率高于源分辨率时，若用户仍选择“直接平均法”，程序转而自动调用样条插值法。

6.18 按经纬度范围提取数据

功能：按用户给定的经纬度范围，提取点值文件、格网文件或向量格网文件中的数据，按源文件格式输出。

输入：源点值文件（无头文件）、格网文件或向量格网文件。

参数设置：输入提取数据的经纬度范围，选择源文件格式。如图。

说明：

- (1) 当源文件为离散点值文件时，输出文件格式不变。
- (2) 当源文件为数字格网或向量格网时，输出格值保留 4 位小数。



6.19 按属性条件提取点记录

功能：按所指定属性的最大最小值范围，提取点值文件记录。

参数设置：如图。

- (1) 输入离散点值记录起始行号，设置条件属性所在的列序号。
- (2) 输入条件属性的最小最大值。



说明：

- (1) 当条件属性值全部超出最小最大值范围时，程序将输出一个空文件。
- (2) 提取后的点值文件记录与源点值文件记录格式完全相同。
- (3) 此项功能可实现不同来源、不同属性的离散点值数据分离。
- (4) 此项功能与“2.11 文件数据统计信息提取”组合，能根据属性统计信息构造条件，分离粗差记录。

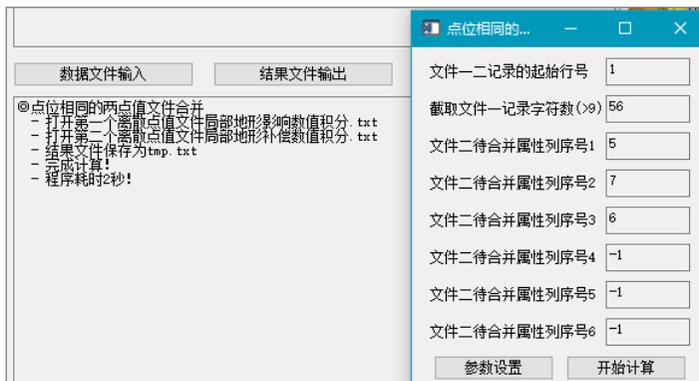
6.20 点位相同的两文件合并

功能：输入两个记录数相等、点位一一对应的点值文件，从文件一记录中截取指定字符数，从文件二记录中选择指定属性（不超过 6 个），组成新的记录，另存为点值文件。

输入：

- (1) 两个记录数、点位完全相同的两个点值文件。
- (2) 若存在头文件，两个文件的头文件占住的行数也应相同。

参数设置：如图 1。



- (1) 设置文件一、文件二记录的起始行号。
- (2) 设置输出文件记录从文件一记录中截取的字符数 n 。

⊙当用户输入的字符数 n 大于文件一记录的字符数时，程序自动让其等于文件一记录的字符数。

(3) 文件二待合并属性的列序号。

⊙可从文件二记录中按需要和先后顺序，最多选择 6 个属性。

⊙当输入的属性序号超出文件二记录范围时，程序自动忽略该项属性序号设置。

输出：合并后的离散点值文件。

6.21 格网陆地海洋数据分离

功能：将源格网或向量格网的陆地或海洋区域格值用指定的常数值替换，以分离格网中的陆地和海洋数据。

输入：源格网或向量格网数据文件，和陆海数字高程模型文件。

说明：

(1) 由陆海数字高程模型（陆地高程大于零，海洋水深小于零）内插源格网中心点的高程值，大于零为陆地，小于零为海洋，然后根据用户设置要求，将位于陆地或海洋格网的源格值用常数替换。

(2) 源格网的经纬度范围和空间分辨率均不大于陆海数字高程模型的经纬度范围和格网分辨率。

6.22 参考面支持的粗差探测

功能：选择低通格网作为参考面，内插离散点处指定属性的参考值，由残差属性值的统计性质，探测并分离离散点值粗差记录。

输入：待粗差探测的离散点值文件，和参考面格网数字模型文件。

参数设置：

(1) 设置待探测点值文件记录的起始行号，以及待探测属性所在列序号。

(2) 设置粗差识别标准，用 n 倍标准差表示，即点值与平均值之差的绝对值大于 n 倍标准差的记录是粗差记录。

输出：合并后的离散点值文件。

(1) 无粗差的点值文件。头文件与记录格式同输入待探测的点值文件。

(2) 分离出的粗差点值文件。头文件为平均值、标准差、最小值、最大值。记录格式同输入待探测的点值文件。

第七章 典型作业流程与方案

本章提供若干典型作业流程(可根据实际数据情况和工程目标,对其进行调整优化),方便用户测试验证 PALGrav3.0 主要模块的功能和性能,掌握复杂多源数据的高精度重力场逼近与大地水准面精化分析的基本方法。

7.1 不同类型场元多种性质地形影响的计算

目的:熟悉地面/海面及地球外部、不同类型扰动重力场元、多种性质地形影响的高精度计算流程。

数据:

- (1) 作业区域地面、海面或近地空间计算点大地坐标数据。
- (2) 扩展区域高分辨率陆海数字高程模型。陆地地面正(常)高 > 0 、海洋水深 < 0 。
⊙扩展区域由作业区域向外扩展地形影响积分半径范围。
- (3) 与陆海数字高程模型格网规格相同的地面/海面大地高数字模型。
⊙用于表示陆海地形质量所在位置的大地坐标。大地高精度要求 10m。

7.1.1 各种类型扰动场元的局部地形影响计算

作业流程:

(1) 调用“3.1 局部地形影响数值积分”,选择高程异常、扰动重力、空间异常一起计算,采用 150km 积分半径,由地面数字高程模型(将陆海数字高程模型中海洋水深置零)、地面/海面大地高模型,计算地面、海面或近地空间计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的局部地形影响。



(2) 调用“2.12 文件数据统计信息提取”,统计空间计算点大地高统计性质,由计算区域中心经纬度和计算点大地高平均值组成指定点大地坐标;调用“5.9 过指定点模型等位面构造”,选择最大计算阶数 360,生成与陆海数字高程模型格网规格相同的重力等位

面大地高格网数字模型。

(3) 再次调用“3.1 局部地形影响数值积分”，选择扰动重力，以过指定点的重力等位面作为空间计算点，计算过指定点等位面的扰动重力局部地形影响。

(4) 调用“4.7 广义 V_M 扰动重力积分”，选择 150km 积分半径，由重力力等位面大地高数字模型及其面上扰动重力局部地形影响，按严密广义 Vening-Meinesz 积分公式，计算地面、海面或近地空间计算点垂线偏差的局部地形影响。

说明：

(1) 类似于步骤 (3) (4)，利用第四章重力场积分功能，可以计算其他类型场元的局部地形影响。

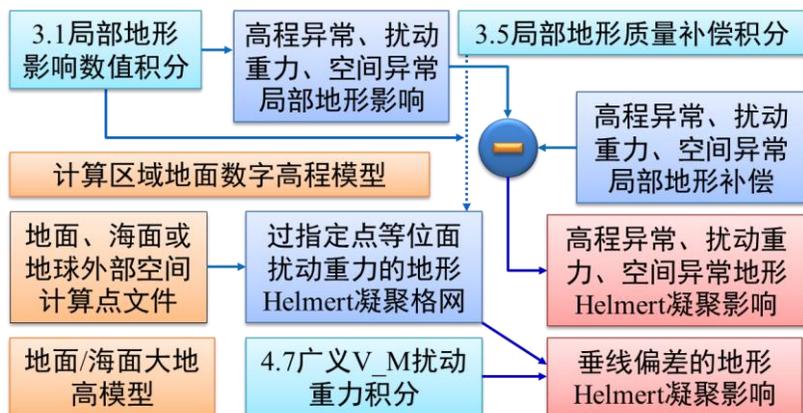
(2) 当计算点大地高在 10m 误差范围内等于大地水准面高时，计算点的高程异常地形影响就是该点处大地水准面的地形影响。

(3) 距海岸线积分半径范围内的海面高程异常、扰动重力、垂线偏差存在局部地形影响，“3.1 局部地形影响数值积分”具备陆海统一的局部地形影响计算能力。

7.1.2 各种类型扰动场元的地形 Helmert 凝聚计算

作业流程：

(1) 调用“3.1 局部地形影响数值积分”，选择高程异常、扰动重力、空间异常一起计算，采用 150km 积分半径，由地面数字高程模型(将陆海数字高程模型中海洋水深置零)、地面/海面大地高模型，计算地面、海面或近地空间计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的局部地形影响。



(2) 调用“3.5 局部地形质量补偿积分”，选择高程异常、扰动重力、空间异常一起计算，采用 150km 积分半径，由地面数字高程模型(将陆海数字高程模型中海洋水深置零)、地面/海面大地高模型，计算地面、海面或近地空间计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的局部地形补偿。

(3) 将计算点处高程异常、扰动重力、空间异常局部地形影响与局部地形补偿分别相减，就得到计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的地形 Helmert 凝聚。

(4) 类似于 7.1.1 (3) (4) 其他类型场元的局部地形影响计算流程, 可以计算其他类型场元的地形 Helmert 凝聚。

说明:

(1) 当计算点大地高在 10m 误差范围内等于大地水准面高时, 计算点的高程异常 Helmert 凝聚就是该点处大地水准面的地形 Helmert 凝聚。

(2) 距海岸线积分半径范围内的海面高程异常、扰动重力、垂线偏差等扰动场元存在陆地地形 Helmert 凝聚影响, 上述流程具备陆海统一的地形 Helmert 凝聚计算能力。

7.1.3 各种类型扰动场元海水完全布格影响计算

作业流程:

(1) 调用“3.7 海水完全布格影响积分”, 选择高程异常、扰动重力、空间异常一起计算, 采用 280km 积分半径, 由陆海数字高程模型、地面/海面大地高模型, 计算地面、海面或近地空间计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的海水完全布格影响。

(2) 类似于 7.1.1 (3) (4) 其他类型场元的局部地形影响计算流程, 可以计算地面/海面及地球外部其他类型场元的海水完全布格影响。

说明: 距海洋积分半径范围内的地面及地球外部高程异常、扰动重力、垂线偏差等各种类型场元存在海水完全布格影响, “3.7 海水完全布格影响积分”具备陆海统一的海水完全布格影响计算能力。

7.1.4 各种类型扰动场元的剩余地形影响计算

作业流程:

(1) 调用“2.10 格网的低通滤波运算”, 选择“滑动平均滤波”, 设置滤波尺度参数 n 等于数字高程模型高低分辨率之比的 1/2, 由高分辨率陆海数字高程模型, 生成格网规格相同的低通陆海数字高程模型。

(2) 调用“6.21 格网陆地海洋数据分离”, 由高分辨率陆海数字高程模型与低通陆海数字高程模型, 分别生成高分辨率地面数字高程模型和高分辨率海洋水深数字模型, 与低通地面数字高程模型和低通海洋水深数字模型。

(3) 调用“3.1 局部地形影响数值积分”, 采用 150km 积分半径, 由高分辨率地面数字高程模型与高分辨率地面/海面大地高模型, 计算地面、海面或近地空间计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的高分辨率局部地形影响。

(4) 调用“3.4 球壳地形质量影响计算”, 选择高程异常、扰动重力、空间异常一起计算, 由高分辨率地面数字高程模型与高分辨率地面/海面大地高模型, 计算地面、海面或近地空间计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的高分辨率球壳布格影响。

(5) 调用“3.1 局部地形影响数值积分”, 由低通地面数字高程模型与高分辨率地面/海面大地高模型, 计算地面、海面或近地空间计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的低通局部地形影响。

(6) 调用“3.4 球壳地形质量影响计算”, 由低通地面数字高程模型与高分辨率地面/

海面大地高模型，计算地面、海面或近地空间计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的低通球壳布格影响。

(7) 将计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的高分辨率局部地形影响与球壳布格影响相加，再减去低通局部地形影响与球壳布格影响之和，就得到计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的陆地剩余地形影响。

(8) 调用“3.7 海水完全布格影响积分”，采用 280km 积分半径，由高分辨率海洋水深数字模型与高分辨率地面/海面大地高模型，计算地面、海面或近地空间计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的高分辨率海水完全布格影响。

(9) 调用“3.7 海水完全布格影响积分”，采用 280km 积分半径，由低通海洋水深数字模型与高分辨率地面/海面大地高模型，计算地面、海面或近地空间计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的低通海水完全布格影响。

(10) 将计算点处高分辨率海水完全布格影响与低通海水完全布格影响相减，就得到计算点处高程异常、扰动重力、空间异常的海水剩余地形影响。

(11) 将全部计算点处陆地剩余地形影响与海水剩余地形影响分别相加，就得到计算点处陆海统一的高程异常、扰动重力、空间异常剩余地形影响。



说明：

(1) 剩余地形影响各计算环节，必需始终采用唯一的高分辨率地面/海面大地高模型表示地形质量所在位置。

(2) 当采用地形面密度球谐系数计算剩余地形影响时，剩余地形影响最小计算阶数一般应不小于参考重力场模型最大计算阶数。

(3) 不同性质的陆地和海洋地形影响可采用多种方式进行组合,生成陆海统一、具有新性质的地形影响。例如:陆海统一的剩余地形影响就是陆地剩余地形影响与海水剩余地形影响的组合;此外,陆地局部地形影响与海水剩余地形影响可以组合;陆地地形 Helmert 凝聚与海水剩余地形影响也可以组合。

(4) 不同性质地形影响的计算流程高度相似。当计算区域不大(如不大于 $5^{\circ}\times 5^{\circ}$)、所有计算点与最近等位面差异不大(如不大于 100m)时,可采用 FFT 积分快速算法代替数值积分算法。

(5) 一般情况下,若某种性质地形影响的短波或超短波成分越丰富,则采用该种性质的地形影响,对重力场数据处理与大地水准面精化越有利。

(6) 第三章中各种性质地形影响的相关图表能直观显示,局部地形影响、地形 Helmert 凝聚、剩余地形影响的超短波成分都很丰富,因而应用广泛;而地壳均衡影响、完全布格影响的短波或超短波成分相对很小,不推荐直接使用。

7.2 地面船测航空多源重力场数据融合流程

目的:熟悉不同高度上、空间交叉分布、多源异质的陆海重力场数据融合基本作业流程,掌握“地形影响+参考重力场组合移去恢复法”作业方案,了解地形影响移去恢复法在重力场数据处理中的基本作用和技术要求。

数据:

(1) 作业区域地面重力、海洋重力测线与航空重力测线离散点值数据文件。

(2) 扩展区域高分辨率陆海数字高程模型。陆地地面正(常)高 > 0 、海洋水深 < 0 。扩展区域由作业区域向外扩展地形影响积分半径范围。

(3) 与陆海数字高程模型格网规格相同的地面/海面大地高数字模型。用于表示陆海地形质量所在位置的大地坐标。大地高精度要求 10m。

(4) 高阶/超高阶地球重力场位系数模型。

(5) 扩展区域高分辨率地面数字高程模型。由扩展区域高分辨率陆海数字高程模型,将海洋水深置零得到。

方法:由唯一的地形数据和参考重力场模型,采用相容的地形影响与重力场算法,按地形影响+参考重力场组合移去恢复法,将地面、海洋和航空实测扰动重力解析延拓到平均高度等位面;对离散点值数据格网化,在进行粗差探测的同时,生成该等位面上扰动重力格网数字模型。

作业流程:

(1) 调用“2.1 扰动重力场元点值计算”,计算地面重力、海洋及航空测线重力点的扰动重力值。

⊙当测点高程为正(常)高时,利用高阶重力场模型,将其转换为大地高。

⊙离散扰动重力点值记录格式:点号(点名)、经度(度小数)、纬度(度小数)、

大地高 (m)、扰动重力 (mGal)、权值。

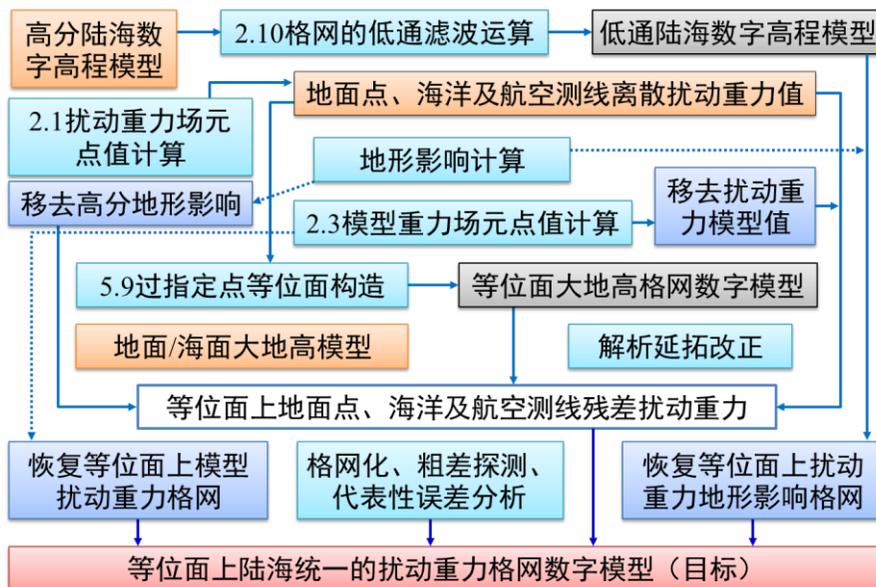
⊙可利用权值区分地面、船测或航空重力，区分不同来源的重力数据。权值大小可通过迭代格网化运算估计，参见 (6) ③。

(2) 移去离散扰动重力高分辨率地形影响：从地面、海洋及航空测线离散扰动重力中，统一移去这些离散点扰动重力的高分辨率地形影响，生成地面、海洋及航空测线剩余扰动重力点值文件。

⊙地形影响性质可选用：局部地形影响、地形 Helmert 凝聚、陆海剩余地形影响、局部地形影响+海水剩余地形影响、地形 Helmert 凝聚+海水剩余地形影响、陆地剩余地形影响+浅海完全布格影响等。

⊙地形影响性质选择标准：离散场元格网化时代表性误差（计算方法参见 5.1 节说明）最小；场元地形影响短波/超短波成分占绝对优势。

(3) 移去离散点扰动重力超高阶模型值：调用“2.3 模型重力场元点值计算”，选择最大计算阶数 1440（一般不低于 720 阶），从地面、海洋及航空测线剩余扰动重力中，移去模型扰动重力，生成地面、海洋及航空测线残差扰动重力点值文件。



(4) 生成扰动重力格网所在的等位面大地高格网数字模型。

⊙调用“文件数据统计信息提取”，由地面数字高程模型（海洋水深置零），提取区域中心位置和平均高度，确定等位面中心点的大地坐标 (B, L, H) 。

⊙调用“5.9 过指定点模型等位面构造”，选择最大计算阶数 720，生成过 (B, L, H) 点重力等位面的大地高格网数字模型。

⊙等位面大地高格网的分辨率与目标扰动重力格网的分辨率相同，经纬度范围与地面数字高程模型范围相同（扩展区域）。

(5) 将离散的地面、海洋及航空测线残差扰动重力，解析延拓到过 (B, L, H) 点的重力

等位面上，生成等位面上地面点、海洋及航空测线残差扰动重力点值文件。

⊙当离散点与等位面的高差较小(如不大于 200m)时,可直接忽略解析延拓过程,令解析延拓改正数等于零。

⊙当离散点与等位面高差较大时,可利用“6.13 点值简单内插格网化”“4.13 场元径向梯度数值积分”“2.8 径向梯度法解析延拓”等功能,计算残差扰动重力解析延拓改正数。

⊙由于残差扰动重力已经移去了高阶重力场模型值和地形影响,因此解析延拓改正数一般很小。

⊙等位面上离散残差扰动重力实测点值记录格式:点号(点名)、经度、纬度、大地高、扰动重力、权值、残差扰动重力。

(6)迭代进行格网化、粗差探测、代表性误差分析,由离散残差扰动重力点值文件,生成等位面上残差扰动重力格网数字模型。

①调用“6.16 加权基函数插值格网化”或“6.13 点值简单内插格网化”,由等位面上离散残差扰动重力点值,生成残差扰动重力格网数字模型。

②调用“6.12 格网内插离散点属性”,由残差扰动重力格网数字模型,内插离散点处残差扰动重力计算值。

③在等位面上,将地面、海洋及航空测线残差扰动重力实测值与内插计算值相减,探测并剔除粗差,分别计算地面、海洋及航空重力代表性误差。

⊙迭代①~③步骤(一般迭代 2~3 次),生成地面、海洋及航空重力融合后的等位面上残差扰动重力格网数字模型。

⊙在迭代过程中,利用生成的代表性误差,优化地面、海洋及航空重力权值,提升多源重力场融合性能。

⊙格网化运算为非解析运算,应在等位面上进行。基于残差场元的粗差探测和统计分析也应在等位面进行,以保证其可靠性。

⊙代表性误差计算方法参见 5.1 节说明(2)。

(7)恢复等位面上模型扰动重力格网:调用“2.3 模型重力场元点值计算”,选择与流程(3)中相等的最大计算阶数,计算等位面上扰动重力模型值格网,与残差扰动重力格网相加,生成等位面上剩余扰动重力格网数字模型。

(8)恢复等位面上扰动重力地形影响格网:计算等位面上扰动重力地形影响格网,与剩余扰动重力格网相加,生成等位面上扰动重力格网数字模型(目标)。

⊙调用“6.17 插值法改变格网分辨率”,分别由扩展区域高分辨率陆海数字高程模型与地面/海面大地高数字模型,生成与目标格网分辨率相同的低分辨率陆海数字高程模型与地面/海面大地高格网模型。

⊙采用与流程(2)性质相同的地形影响,相等的积分半径,调用相同的地形影响功能模块,由低分辨率陆海数字高程模型与地面/海面大地高格网模型,计算等位面扰动重力地形影响格网模型。

⊙将等位面上剩余扰动重力格网与扰动重力地形影响格网相加,生成等位面上扰

动重力格网数字模型。

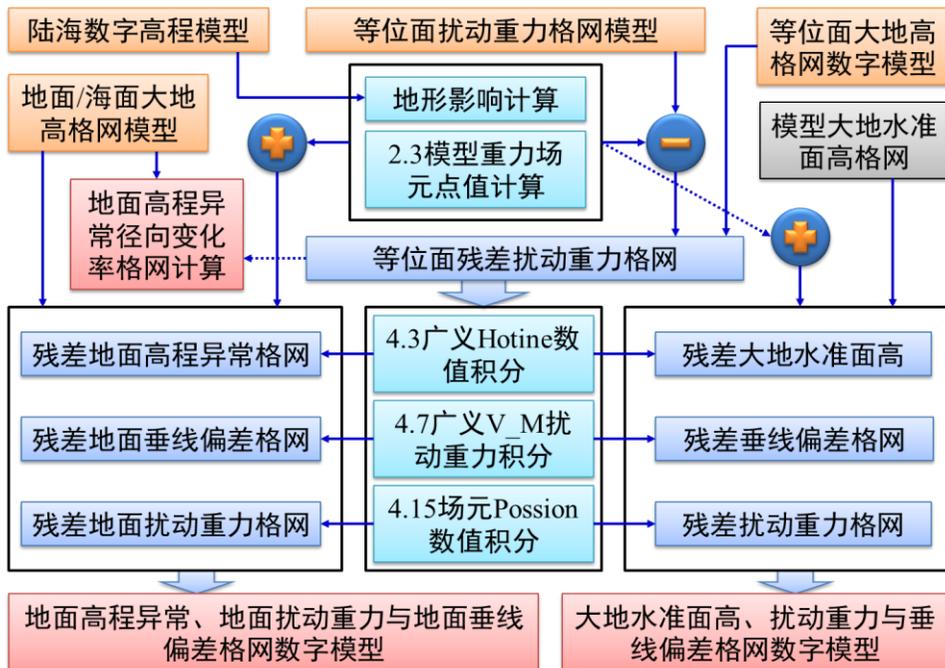
7.3 重力大地水准面及高程异常的精细化流程

目的：基于多源重力场数据融合的等位面扰动重力格网数字模型，生成完全相容的区域重力场及大地水准面系列格网数字模型，以满足区域高程基准统一及精化、重力场及高程基准高精度应用服务的需要。

数据：

- (1) 作业区域基于多源重力场数据融合的扰动重力格网数字模型。
- (2) 扰动重力格网所在的等位面大地高格网数字模型。
- (3) 扩展区域陆海数字高程模型。陆地地面正（常）高 > 0 、海洋水深 < 0 。扩展区域由作业区域向外扩展地形影响积分半径范围。
- (4) 与陆海数字高程模型格网规格相同的地面/海面大地高格网数字模型。
- (5) 参考地球重力场位系数模型。

方法：Stoke 框架中“地形影响+参考重力场”组合移去恢复法。



作业流程：

(1) 移去扰动重力地形影响：从等位面扰动重力格网中，移去扰动重力的地形影响，生成等位面剩余扰动重力格网数字模型。

①地形影响性质可选用：局部地形影响、地形 Helmert 凝聚、陆海剩余地形影响、局部地形影响+海水剩余地形影响、地形 Helmert 凝聚+海水剩余地形影响等。

②地形影响性质选择标准:

⊙扰动重力、高程异常地形影响短波/超短波成分占绝对优势;

⊙扰动场元地形影响的量级不大于其残差扰场元量级的 3 倍;

⊙扰动场元地形影响的中长波成分很小, 如积分半径范围内的平均值接近零。

③当选择的地形影响性质、积分半径大小及地形数据与 7.2 完全相同时, 可将此项步骤与 7.2 (8) 合并成一个步骤。即在 7.2 中不恢复等位面上扰动重力地形影响。

(2) 移去格网扰动重力模型值: 调用“2.3 模型重力场元点值计算”, 选择最大计算阶数 360 (一般不高于 720 阶), 从剩余扰动重力格网数字模型中, 移去模型扰动重力, 生成等位面残差扰动重力格网数字模型。

(3) 调用“2.3 模型重力场元点值计算”, 选择最大计算阶数 720, 计算模型大地水准面高格网, 用于表示计算大地水准面的计算点位置。

(4) 残差重力场及残差大地水准面系列格网精化。

⊙调用“4.3 广义 Hotine 数值积分”, 以模型大地水准面高格网为计算点, 由等位面残差扰动重力格网及其所在等位面大地高格网数字模型, 采用 200km 积分半径, 计算残差大地水准面高格网。

⊙调用“4.3 广义 Hotine 数值积分”, 以地面/海面大地高数字模型格网为计算点, 由等位面残差扰动重力格网及其所在等位面大地高格网数字模型, 采用 200km 积分半径, 计算残差地面高程异常格网。

⊙调用“4.7 广义 V_M 扰动重力积分”, 计算残差地面垂线偏差向量格网; 调用“4.15 场元 Possion 数值积分”, 计算残差地面扰动重力格网。

(5) 恢复参考重力场模型值, 生成剩余重力场及剩余大地水准面系列格网。

⊙调用“2.3 模型重力场元点值计算”, 选择与流程 (3) 中相等的最大计算阶数, 以模型大地水准面高格网为计算点, 计算大地水准面高模型值。

⊙调用“2.3 模型重力场元点值计算”, 以地面/海面大地高数字模型格网为计算点, 计算地面高程异常、地面扰动重力和地面垂线偏差的模型值。

⊙将重力场及大地水准面格网的残差值与模型值分别相加, 生成剩余大地水准面、剩余地面高程异常、剩余地面扰动重力和剩余地面垂线偏差向量格网。

(6) 恢复重力场及大地水准面系列格网的地形影响, 生成完全相容的区域重力场及大地水准面系列格网数字模型。

⊙采用与流程 (1) 性质相同的地形影响, 相等的积分半径, 调用相同的地形影响功能模块, 以模型大地水准面高格网为计算点, 计算大地水准面地形影响。

⊙采用与流程 (1) 性质相同的地形影响, 相等的积分半径, 调用相同的地形影响功能模块, 以地面/海面大地高数字模型格网为计算点, 计算地面高程异常、地面扰动重力和地面垂线偏差的地形影响。

⊙将重力场及大地水准面格网的剩余值与地形影响值分别相加, 生成大地水准面高、地面高程异常、地面扰动重力和地面垂线偏差向量格网。

(7) 调用“5.3 高程异常模型径向变化计算”“5.4 高程异常径向变化残差精化”，采用与步骤(1)~(6)相同的数据、相等的积分半径和相容的重力场算法，计算地面高程异常径向变化率格网数字模型。

(8) 区域重力大地水准面成果及相容性检核

⊙重力大地水准面成果清单：①重力大地水准面高格网，②地面高程异常格网，③地面扰动重力格网，④地面垂线偏差向量格网，⑤地面大地高模型格网，⑥地面高程异常径向变化率格网，⑦过指定点等位面扰动重力格网，⑧等位面大地高格网。

⊙重力大地水准面格网与地面高程异常格网相容性，用“4.15 场元 Possion 数值积分”检核验证。

⊙地面扰动重力格网与过指定点等位面扰动重力格网的相容性，用“4.15 场元 Possion 数值积分”检核验证。

⊙地面扰动重力格网 δg 与地面高程异常径向变化率格网 ζ_r 的相容性检核公式： $\delta g = -\gamma\zeta_r$ ， γ 为格网中心点的正常重力。

说明：

(1) 地面高程异常、地面扰动重力和地面垂线偏差等地面扰动场元计算点位置，用地面/海面大地高格网数字模型表示。

(2) 等位面扰动重力场元的位置用等位面大地高表示，大地水准面及其上的扰动重力、垂线偏差所在位置用模型大地水准面高格网表示。

(3) 在 GNSS 代替水准测定正常高时，需利用地面高程异常径向变化率格网，将 GNSS 水准高程异常由 GNSS 水准点归算到数字高程模型面上。

7.4 全国重力场框架中大地水准面逐级精化

目的：在统一的重力场框架中，充分发挥全国重力场高精度中长波优势，逐级控制省级、地市及局部地区重力大地水准面精化，避免大地水准面中长波精度损失与局部变形，有效提升各级重力大地水准面的精度水平，消除各级大地水准面的边缘效应和拼接问题，实现任意大小和形状的大地水准面局部更新，维持高程基准的全国统一性，保证不同时期高程基准成果及应用服务的有效继承与衔接。

基本方法：

(1) 逐级控制基本原则：低一级局部重力大地水准面精化，用高一级区域重力场成果构建参考重力场；重力大地水准面局部地区更新，用本地区原有的最新重力场成果构建参考重力场。

(2) 重力大地水准面局部更新：用更新前的区域重力场成果，构建数值格网形式的参考重力场，按移去恢复法，采用固定积分半径，只精化有新重力数据的局部地区。

(3) 边缘效应与拼接问题消除方法：采用相邻区域 2 倍积分半径范围内重力数据，将之前不完整积分补加到完整积分。

为突出技术特点，这里以全国、省级和地市级 3 个等级为例，说明重力场逐级控制的

区域大地水准面精化的一般方案。全国重力大地水准面精化方案见 7.3 节。

7.4.1 省级、地市级重力大地水准面精化方案

(1) 集成全省及周边积分半径范围内的各种陆海重力数据资源，综合确定全省陆海统一的扰动重力格网数字模型。

(2) 从全省陆海扰动重力格网中，移去全国陆海扰动重力格网模型参考值，移去扰动重力高分辨率地形影响，得到全省残差扰动重力格网。

(3) 采用广义 Hotine 积分，按固定积分半径，由残差扰动重力和全省数字高程模型确定残差地面高程异常格网。

(4) 利用全省数字高程模型，由全国重力场模型，确定全省数字高程模型面上的地面高程异常模型参考值。

(5) 计算地面数字高程模型面上的地面高程异常变化率格网模型。

(6) 将全省剩余地面高程异常与地面高程异常模型参考值相加（恢复），得到全省重力似大地水准面模型。

省级重力大地水准面成果包括：①全省陆海扰动重力格网模型；②全省重力地面高程异常格网模型；③与地面高程异常对应的全省地面大地高数字模型；④全省地面高程异常径向变化率格网。

地市级重力大地水准面精化以全省重力大地水准面成果为参考重力场，精化方案、作业流程及成果与全省完全相同。

技术特色：重力大地水准面边缘问题与拼接问题已完全消失。

7.4.2 全国重力大地水准面局部地区更新方案

(1) 全国重力大地水准面省区更新

⊙将全国扰动重力格网中省级范围的扰动重力格网，用相同分辨率的省级扰动重力格网直接替换。

⊙将全国重力地面高程异常格网用相同分辨率的省级地面高程异常格网（扩展积分半径范围）直接替换。

(2) 全省重力大地水准面地市范围更新

⊙将全省扰动重力格网中地市级范围的扰动重力格网，用相同分辨率的地市级扰动重力格网直接替换。

⊙将全省重力高程异常格网用相同分辨率的地市级重力高程异常格网（扩展积分半径范围）直接替换。

(3) 任意形状和范围的大地水准面局部更新

在区域范围内，当局部地区有新的重力数据时，可采用局部更新。

⊙根据新重力数据分布情况，确定需更新的局部范围，将新重力数据与原有重力数据融合，生成局部地区新的扰动重力格网。

⊙以已有最新区域重力场为参考重力场，采用移去恢复法，确定局部地区残差地面高

(3) 重力地面高程异常格网所在的地面大地高格网模型。

(4) 地面高程异常径向变化率格网模型。

方法：利用 GNSS 水准残差高程异常，评估大地水准面成果的精度水平，精化高程基准基准零点重力位，计算基准差异。进而以 GNSS 水准残差高程异常之间的空间关系满足 Poisson 积分方程为约束目标，通过调节积分半径大小来控制空间尺度，分离 GNSS 水准残差高程异常中满足 Poisson 积分方程的成分，实现 GNSS 水准与重力大地水准面的解析融合。

作业流程：

(1) 由 GNSS 水准高程异常成果与重力地面高程异常成果，生成离散 GNSS 水准残差高程异常文件。

①利用地面高程异常径向变化率格网模型，将 GNSS 水准高程异常，由 GNSS 水准点归算到重力地面高程异常所在的地面大地高格网模型面上。

②内插 GNSS 水准点处重力地面高程异常，由归算后的 GNSS 水准高程异常，计算 GNSS 水准残差高程异常。

③统计 GNSS 水准残差高程异常，对 GNSS 水准残差高程异常配权（初始可用等权），生成离散 GNSS 水准残差高程异常文件。

(2) 调用“5.12 地面高程异常成果精度评估”，由 GNSS 水准残差高程异常，估计并确定重力地面高程异常差误差、实用地面高程异常内部误差、实用地面高程异常差误差曲线与 GNSS 水准高程异常差误差曲线。

(3) 利用“5.13 高程基准零点重力位参数计算”，计算区域高程基准与重力大地水准面重力位差 $W_R - U_0$ ，将 GNSS 水准残差地面高程异常减去基准差异量 $(W_R - U_0)/\gamma$ ，得到基准统一后的 GNSS 水准残差地面高程异常文件。

(4) 利用“5.14 泊松方程约束 GNSS 水准融合”，计算残差地面高程异常格网，生成剩余 GNSS 水准残差点值文件。

①统计地面大地高数字模型，确定格网中心点及平均大地高，调用“5.9 过指定点模型等位面构造”，确定过格网中心、大地高为平均大地高的等位面大地高格网。

②调用“5.14 泊松方程约束 GNSS 水准融合”，由离散 GNSS 水准残差高程异常和等位面大地高格网，计算残差地面高程异常格网，生成剩余 GNSS 水准残差量点值文件。

③重复调用“5.14 泊松方程约束 GNSS 水准融合”，将剩余 GNSS 水准残差作为 GNSS 水准残差高程异常，计算残差地面高程异常格网的迭代值，直到剩余残差量的标准差和平均值均无明显变化为止。

(5) 由剩余 GNSS 水准残差点值文件，按 3 倍剩余残差标准差，探测并剔除 GNSS 水准粗差，并依据剩余残差的空间分布性质，对 GNSS 水准高程异常重新配权。

(6) 重复作业流程 (2) ~ (5) 1~2 次（至多 3 次）后，将最后一次的残差地面高程异常格网迭代值相加，再与重力地面高程异常格网相加，并恢复 GNSS 水准残差高程异常的基准差异量 $(W_R - U_0)/\gamma$ ，生成坐标框架中地面高程异常格网模型。

(7) 由剩余 GNSS 水准残差高程异常点值文件，调用“5.15 残差高程异常水准网拟稳平差”，改善水准网长距离高程传递质量。

①将 GNSS 水准点的正常高，与剩余 GNSS 水准残差高程异常相加，生成 GNSS 水准点正常高的新值。

②以全部 GNSS 水准点为拟稳基准，以流程(3)中最终的权值作为 GNSS 水准点正常高改正数(基准未知数)的权。

⊙拟稳基准条件方程：以 GNSS 水准点正常高改正数为基准未知数，将未知数加权平均等于零作为条件方程。

③以 GNSS 水准点为水准网的起算点，以全部水准点正常高改正数为未知数，并将其中的 GNSS 水准点正常高改正数作为基准未知数，由水准网测段文件，构建全部测段的观测方程。

④按附有基准未知数条件的间接平差方法，重新对水准网进行拟稳平差。

⑤平差后，地面高程异常格网纳入 GNSS 定位所在的坐标参考框架中，并与水准网高程和大地水准面成果实现高度统一。

当 GNSS 水准网的质量或可靠性在空间分布上存在差异较大时，可只选择其中质量与可靠性较高的 GNSS 水准点作为拟稳基准。

(8) 综合地面高程异常成果精度评估、泊松方程约束的 GNSS 水准融合以及水准网拟稳平差结果，评价大地水准面、GNSS 水准网与高程基准成果的质量和精度水平。

说明：

(1) 本流程通过 Possion 积分方程约束，调整积分半径，分离 GNSS 水准高程异常中高精度短波成分，同时在空间尺度上有效保留重力地面高程异常高精度中长波成分，实现 GNSS 水准与重力地面高程异常的高精度融合。

(2) 重力地面高程异常的中长波精度足够高，上述流程通过分离 GNSS 水准高程异常中不满足 Possion 积分约束，将不具有重力场性质的剩余残差重新进行平差，达到控制长距离水准误差累积的目的。

(3) 水准网的拟稳基准点选择：可根据 GNSS 水准网的质量和精度水平，选择部分或全部 GNSS 水准点，作为水准网重新平差的拟稳基准。GNSS 水准点正常高改正数(基准未知数)的平差值可用于高程基准统一的质量评估。

第八章 主要公式及算法

8.1 空间任意点正常重力场参数计算

(1) 球坐标系中地球空间点 (r, θ, λ) 的正常引力位 U 可表示为球谐级数形式:

$$U(r, \theta) = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (1.1)$$

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left(1 - n + \frac{5nj_2}{e^2} \right) \quad (1.2)$$

式中: r 为计算点到椭球中心的距离; λ 为计算点的经度; $\theta = \pi/2 - \varphi$ 为地心余纬, φ 为地心纬度; a 为椭球的长半轴; J_2 为地球动力学形状因子; GM 为地心引力常数; ω 为地球平均自转速率; e 为正常椭球的第一偏心率; $P_{2n}(\cos \theta)$ 为 Legendre 函数。

(2) 将正常引力位 $U(r, \theta)$ 公式 (1.1) 对球坐标求偏导数, 可得球坐标系中地球空间点的正常重力向量:

$$\gamma(r, \theta) = \gamma_r e_r + \gamma_\theta e_\theta \quad (1.3)$$

$$\gamma_r = -\frac{GM}{r^2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right] + \omega^2 r \sin^2 \theta \quad (1.4)$$

$$\gamma_\theta = \frac{\partial U}{r \partial \theta} = -\frac{GM}{r^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{2n}(\cos \theta) \right] + \omega^2 r \sin \theta \cos \theta \quad * (1.5)^1$$

由于 $e_r \perp e_\theta$, 因此可得正常重力标量值:

$$\gamma = \sqrt{\gamma_r^2 + \gamma_\theta^2} \quad * (1.6)$$

可得正常重力线方向相对地心的北偏角为:

$$\vartheta_\gamma = \tan^{-1} \frac{\gamma_\theta}{\gamma_r} \quad * (1.7)$$

(3) 将正常重力向量 $\gamma(r, \theta)$ 公式 (1.3) 对球坐标求偏导数, 可得球坐标系中地球空间点正常重力梯度张量的对角线元素:

$$U_{rr} = -2 \frac{GM}{r^3} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(2n+1) \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right] + \omega^2 \sin^2 \theta \quad * (1.8)$$

$$U_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{r^2 \partial \theta^2} = \frac{\partial \gamma_\theta}{r \partial \theta} = -\frac{GM}{r^3} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P_{2n}(\cos \theta) \right] + \omega^2 \cos 2\theta \quad * (1.9)$$

由于 $e_r \perp e_\theta$, 因此可得正常重力梯度标量值:

$$U_{nn} = \sqrt{U_{rr}^2 + U_{\theta\theta}^2} \quad * (1.10)$$

可得正常重力梯度方向相对地心的北偏角为:

$$\vartheta_E = \tan^{-1} \frac{U_{\theta\theta}}{U_{rr}} \quad * (1.11)$$

¹ 本章中标柱*的算法公式由研发者推导, 并通过算法之间相容性测试验证。

(4) 低阶 $P_n(t)$ 及其对 θ 一、二阶导数算法

$$\text{令 } t = \cos \theta, \quad u = \sin \theta \quad (1.12)$$

$$P_n(t) = \frac{2n-1}{n} t P_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(t) \quad (1.13)$$

$$P_1 = t, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_n(t) = \frac{2n-1}{n} t \frac{\partial}{\partial \theta} P_{n-1}(t) - \frac{2n-1}{n} u P_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{n-2}(t) \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_1(t) = -u, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} P_2(t) = -3ut \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P_n(t) = \frac{2n-1}{n} \left(t \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P_{n-1} - 2u \frac{\partial}{\partial \theta} P_{n-1} - t P_{n-1} \right) - \frac{n-1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P_{n-2} \quad * (1.17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P_1(t) = -t, \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P_2(t) = 3(1 - 2t^2) \quad (1.18)$$

8.2 重力场位系数模型场元计算公式

地球外部点 (r, θ, λ) 扰动位 T 或高程异常 ζ 可表示为如下球谐级数形式:

$$T(r, \theta, \lambda) = \zeta \gamma = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\delta \bar{C}_{nm} \cos m \lambda + \bar{S}_{nm} \sin m \lambda) \bar{P}_{nm} \quad (2.1)$$

式中: $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ 称为完全规格化的 Stokes 系数, 又称位系数; $\bar{P}_{nm} = \bar{P}_{nm}(t)$ 为完全规格化缔合 Legendre 函数; n 称为位系数的阶; m 称为位系数的次。且:

$$\delta \bar{C}_{2n,0} = \bar{C}_{2n,0} + \frac{J_{2n}}{\sqrt{4n+1}} \quad (2.2)$$

$$\delta \bar{C}_{2n,m} = \bar{C}_{2n,m} (m > 0) \quad \delta \bar{C}_{2n+1,m} = \bar{C}_{2n+1,m} \quad (2.3)$$

地球外部点 (r, θ, λ) 的空间异常 Δg 、扰动重力 δg 、垂线偏差 (ξ, η) 、(垂向)扰动重力梯度 T_{nn} 、水平重力梯度 $(T_{\varphi\varphi}, T_{\lambda\lambda})$ 的球谐级数分别为:

$$\Delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\delta \bar{C}_{nm} \cos m \lambda + \bar{S}_{nm} \sin m \lambda) \bar{P}_{nm} \quad (2.4)$$

$$\delta g = -T_r = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\delta \bar{C}_{nm} \cos m \lambda + \bar{S}_{nm} \sin m \lambda) \bar{P}_{nm} \quad (2.5)$$

$$\xi = \frac{T_\theta}{\gamma} = -\frac{T_\varphi}{\gamma} = \frac{GM}{\gamma r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\delta \bar{C}_{nm} \cos m \lambda + \bar{S}_{nm} \sin m \lambda) \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{nm} \quad (2.6)$$

$$\eta = -\frac{T_\lambda}{\gamma} = \frac{GM}{\gamma r^2 u} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=1}^n m (\delta \bar{C}_{nm} \sin m \lambda - \bar{S}_{nm} \cos m \lambda) \bar{P}_{nm} \quad (2.7)$$

$$T_{nn} = -T_{rr} =$$

$$-\frac{GM}{r^3} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2) \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\delta \bar{C}_{nm} \cos m \lambda + \bar{S}_{nm} \sin m \lambda) \bar{P}_{nm} \quad * (2.8)$$

$$T_{\varphi\varphi} = -T_{\theta\theta} = -\frac{GM}{r^3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\delta \bar{C}_{nm} \cos m \lambda + \bar{S}_{nm} \sin m \lambda) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{nm} \quad * (2.9)$$

$$T_{\lambda\lambda} = -\frac{GM}{r^3 u^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n m^2 (\delta \bar{C}_{nm} \cos m \lambda + \bar{S}_{nm} \sin m \lambda) \bar{P}_{nm} \quad * (2.10)$$

$$\text{式中: } T_r = \frac{\partial}{\partial r} T(r, \theta, \lambda), \quad T_{rr} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} T(r, \theta, \lambda) \quad * (2.11)$$

$$T_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} T(r, \theta, \lambda), \quad T_{\theta\theta} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} T(r, \theta, \lambda) \quad * (2.12)$$

$$T_\lambda = \frac{\partial}{ru\partial\lambda} T(r, \theta, \lambda), \quad T_{\lambda\lambda} = \frac{\partial^2}{r^2 u^2 \partial\lambda^2} T(r, \theta, \lambda) \quad * (2.13)$$

$$T_{rr} + T_{\theta\theta} + T_{\lambda\lambda} \equiv 0, \quad T_{rr}^n + T_{\theta\theta}^n + T_{\lambda\lambda}^n \equiv 0, \quad T_* = \sum_{n=2}^{\infty} T_*^n \quad * (2.14)$$

式中: T_*^n 表示 T_* 的 n 阶谐分量。

8.3 缔合勒让德函数及其导数算法

(1) $\bar{P}_{nm}(t)$ 标准前向列递推算法($n < 1900$)

$$\begin{cases} \bar{P}_{nm}(t) = a_{nm}t\bar{P}_{n-1,m}(t) - b_{nm}\bar{P}_{n-2,m}(t) \quad \forall n > 1, m < n \\ \bar{P}_{nn}(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\bar{P}_{n-1,n-1} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$a_{nm} = \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n+m)(n-m)}}, \quad b_{nm} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m-1)}{(2n-3)(n+m)(n-m)}}$$

$$\bar{P}_{00}(t) = 1, \quad \bar{P}_{10}(t) = \sqrt{3}t, \quad \bar{P}_{11}(t) = \sqrt{3}u \quad (3.2)$$

(2) $\bar{P}_{nm}(t)$ 改进 Belikov 递推算法($n < 64800$)

当 $n = 0, 1$ 时, 采用 (3.2) 式; 当 $n \geq 2$ 时:

$$\bar{P}_{n0}(t) = a_n t \bar{P}_{n-1,0}(t) - b_n \frac{u}{2} \bar{P}_{n-1,1}(t), \quad m = 0 \quad (3.3)$$

$$\bar{P}_{nm}(t) = c_{nm} t \bar{P}_{n-1,m}(t) - d_{nm} u \bar{P}_{n-1,m+1}(t) + e_{nm} u \bar{P}_{n-1,m-1}(t), \quad m > 0 \quad (3.4)$$

$$a_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}}, \quad b_n = \sqrt{\frac{2(n-1)(2n+1)}{n(2n-1)}} \quad (3.5)$$

$$c_{nm} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{(n+m)(n-m)(2n+1)}{2n-1}}, \quad d_{nm} = \frac{1}{2n} \sqrt{\frac{(n-m)(n-m-1)(2n+1)}{2n-1}} \quad (3.6)$$

当 $m > 0$ 时, 有:

$$e_{nm} = \frac{1}{2n} \sqrt{\frac{2}{2-\delta_0^{m-1}}} \sqrt{\frac{(n+m)(n+m-1)(2n+1)}{2n-1}} \quad (3.7)$$

PALGrav3.0 软件系统主要采用改进的 Belikov 递推算法, 计算超高阶规格化缔合勒让德函数。

(3) $\bar{P}_{nm}(t)$ 函数跨阶次递推算法($n < 20000$)

当 $n = 0, 1$ 时, 采用 (3.2) 式; 当 $n \geq 2$ 时:

$$\bar{P}_{nm}(t) = \alpha_{nm}\bar{P}_{n-2,m}(t) + \beta_{nm}\bar{P}_{n-2,m-2}(t) - \gamma_{nm}\bar{P}_{n,m-2}(t) \quad (3.8)$$

$$\alpha_{nm} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)(n-m-1)}{(2n-3)(n+m)(n+m-1)}}$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{1 + \delta_0^{m-2}} \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-2)(n+m-3)}{(2n-3)(n+m)(n+m-1)}} \quad (3.9)$$

$$\gamma_{nm} = \sqrt{1 + \delta_0^{m-2}} \sqrt{\frac{(n-m+1)(n+m-3)}{(n+m)(n+m-1)}}$$

(4) $\frac{\partial}{\partial\theta} \bar{P}_{nm}(\cos\theta)$ 的非奇异递推算法

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial t} \bar{P}_{nm}(t) \quad (3.10)$$

为 $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ 对 θ 的一阶微分, \bar{P}'_{nm} 为 $\bar{P}_{nm}(t)$ 对 t 的一阶导数。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{n0} = -\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{P}_{n1}, & \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{n1} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{P}_{n0} - \sqrt{\frac{(n-1)(n+2)}{2}} \bar{P}_{n2} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m)(n-m+1)}{2}} \bar{P}_{n,m-1} - \sqrt{\frac{(n-m)(n+m+1)}{2}} \bar{P}_{n,m+1}, & m > 2 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{00}(t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{10}(t) = -\sqrt{3}u, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{P}_{11}(t) = \sqrt{3}t \quad (3.12)$$

(5) $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{nm}$ 的非奇异递推算法

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{n0} = -\frac{n(n+1)}{2} \bar{P}_{n0} + \sqrt{\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{8}} \bar{P}_{n2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{n1} = -\frac{2n(n+1)+(n-1)(n+2)}{4} \bar{P}_{n1} + \sqrt{\frac{(n-2)(n-1)(n+2)(n+3)}{4}} \bar{P}_{n3} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{nm} &= \frac{\sqrt{(n-m+1)(n-m+2)(n-m-1)(n+m)}}{4} \bar{P}_{n,m-2} - \frac{(n+m)(n-m+1)+(n-m)(n+m+1)}{4} \bar{P}_{nm} \\ &\quad - \frac{(n+m)(n-m+1)+(n-m)(n+m+1)}{4} \bar{P}_{nm} \\ &\quad + \frac{\sqrt{(n-m-1)(n-m)(n+m+1)(n+m+2)}}{4} \bar{P}_{n,m+2}, \quad m > 2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{00}(t) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{10}(t) = -\sqrt{3}t, \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bar{P}_{11}(t) = -\sqrt{3}u \quad (3.15)$$

8.4 椭球与球边界面的边值校正公式

(1) 重力的椭球校正: 地球外部某一椭球面上的重力值 g 由垂线方向到正常重力方向的校正, 也称为重力的垂线偏差影响。

$$\varepsilon_p = \gamma \sin \theta \cos \theta \left[3J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{\omega^3 r^3}{GM} \right] \xi \quad (4.1)$$

(2) 重力值 g 由正常重力方向到地心方向的改正

$$\varepsilon_h = \gamma e^2 \sin \theta \cos \theta \xi \quad (4.2)$$

(3) 正常重力值 γ 由正常重力方向到地心方向的改正

$$\varepsilon_\gamma = 3\gamma \left[J_2 \frac{a^2}{r^3} (3\cos^2 \theta - 1) - \frac{\omega^3 r^3}{GM} \sin^2 \theta \right] T \quad (4.3)$$

当边界面为椭球面时, 只需(4.1)式一项椭球校正; 只有当边界面为球面时, 才同时需要(4.1)~(4.3)式的三项边值校正。

当场元位于椭球面或球面上, 且需要在 Stokes 框架中进一步进行重力场积分或(椭)球谐分析时, 才需要将以椭球面或球面为非等位边界面的 Molodensky 问题, 通过边值校正, 转为 Stokes 问题。

8.5 地球外部扰动场元地形影响算法

地球重力场理论指出, 地球外部任意类型扰动场元都可以表示为同一高度等位面上

扰动位、扰动重力或其对位置偏导数的线性组合，如，空间异常可用扰动位和扰动重力的线性组合表示，垂线偏差可用扰动位的当地水平偏导数表示，重力梯度可以用扰动重力的垂向导数表示。因此，若解决了扰动位和扰动重力的地形影响问题，也就自然解决了其他各种类型扰动场元的地形影响问题。

(1) 扰动位的地形影响

忽略大气质量影响，则地球外部计算点实际扰动位 T 可表示为地形质量引力位 T^t 与扣除地形后的扰动位 T^{NT} 之和：

$$T = T^{NT} + T^t = T^{NT} + T^B + T^R \quad (5.1)$$

式中： T^t 为全部地形质量对计算点产生的引力位，称为扰动位的地形影响； T^R 为局部地形质量对计算点产生的引力位，称为扰动位的局部地形影响； T^B 为厚度等于地形高度的球壳质量对计算点产生的引力位，称为扰动位的球壳布格影响。

由实际扰动位 T 在地球外部的调和性质可知，扰动位的地形影响、局部地形影响和球壳布格影响在地球外部均是调和的。

球近似下地球外部（ $r \geq R + h$ ， R 为地球平均半径）扰动位的地形影响：

$$T^t = T^B + T^R = 4\pi\tilde{\rho} \frac{R^2 h}{r} \left(1 + \frac{h}{R} + \frac{h^2}{3R^2} \right) + T^R \quad (5.2)$$

式中： h 为地球外部计算点正下方的地形高程； r 为计算点的地心距； $\tilde{\rho} = \frac{1}{h} \int_R^{R+h} \rho(r') dr'$ 为地面到大地水准面间地形的几何平均密度，称为地形等效密度。

(2) 扰动重力的地形影响

将(5.1)式代入扰动重力定义式，可得球近似下地球外部任意高度上：

$$\delta g = -\frac{\partial T^{NT}}{\partial r} - \frac{\partial T^t}{\partial r} = \delta g^{NT} + \delta g^t = \delta g^{NT} + \delta g^B + \delta g^R \quad (5.3)$$

式中： δg^t 称为扰动重力的地形影响； δg^B 称为扰动重力的球壳布格影响； δg^R 称为扰动重力的局部地形影响。

在陆地地面上，扰动重力局部地形影响的平面近似等于传统意义上平面地形改正的负值。

球近似下地球外部扰动重力的地形影响：

$$\delta g^t = \delta g^B + \delta g^R = 4\pi\tilde{\rho} \frac{R^2 h}{r^2} \left(1 + \frac{h}{R} + \frac{h^2}{3R^2} \right) + \delta g^R \quad (5.4)$$

式(5.2)、(5.4)截断到 h/R 的二次项，因此适合地面及近地空间（如航空高度），但不适合卫星高度。

(3) 地球外部局部地形影响积分公式

根据定义，仅考虑地表密度 ρ ，扰动位的局部地形影响可表示为：

$$T^R = G\rho \int_{\lambda'} \int_{\varphi'} \int_{R+h}^{R+h'} L^{-1}(r, \psi, r') r'^2 dr' \cos\varphi' d\varphi' d\lambda' \quad (5.5)$$

式中： $\int L^{-1}(r, \psi, r') r'^2 dr'$

$$= \frac{1}{2}(r' + 3rt)L + \frac{r'^2}{2}(3t^2 - 1)\ln|r' - rt + L| + C \quad * (5.6)$$

$t = \cos\psi$, C 为积分常数; L 为流动点到计算点的空间距离。

当计算点与流动点位置相同时, 扰动位局部地形影响积分奇异:

$$T^R|_0 = \frac{1}{6}G\rho_0 A_0 \sqrt{A_0/\pi}(h_{xx} + h_{yy}) \quad * (5.7)$$

式中: ρ_0 为计算点的地形密度; A_0 为计算点积分面元的面积; h_{xx}, h_{yy} 为计算点的地形在北方向 x 和东方向 y 的二阶水平偏导数。

根据扰动重力定义, 由(5.4)式可得扰动重力的局部地形影响:

$$\delta g^R = -G\rho \int_{\lambda'} \int_{\varphi'} \int_{R+h}^{R+h'} \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial r} r'^2 dr' \cos\varphi' d\varphi' d\lambda' \quad (5.8)$$

$$\text{式中: } \int \frac{\partial L^{-1}(r, \psi, r')}{\partial r} r'^2 dr' = \frac{(r'^2 + 3r^2)t + rr'(1-6t^2)}{L} + r(3t^2 - 1)\ln|r' - rt + L| + C \quad (5.9)$$

当计算点与流动点位置相同时, 扰动重力局部地形影响积分奇异:

$$\delta g^R|_0 = \frac{1}{2}G\rho_0 \sqrt{\pi A_0}(h_x^2 + h_y^2) \quad * (5.10)$$

式中: (h_x, h_y) 为计算点的地形坡度向量。

(4) 场元地形影响积分 FFT 快速算法

① 扰动位局部地形影响快速算法

令 $E = \frac{1}{2}(r' + 3rt)L + \frac{r'^2}{2}(3t^2 - 1)\ln|r' - rt + L|$, 则:

$$\frac{\partial E}{\partial r'} = \frac{r'^2}{L}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial r'^2} = \frac{2r'}{L} - \frac{r'^3 - rr'^2 t}{L^3}, \quad \frac{\partial^3 E}{\partial r'^3} = \frac{2}{L} - \frac{5r'^2 - 4rr't}{L^3} + \frac{3r'^2(r' - rt)^2}{L^5} \quad (5.11)$$

令 \tilde{r} 为计算点正下方地面点的地心距, 将 E 在 $r' = \tilde{r}$ 附近按泰勒级数展开, 忽略 $O(\Delta h^4)$, 代入(5.5)式得:

$$T^R = G\rho \int_{\sigma} \left(\frac{\tilde{r}^2 \Delta h}{l} + \frac{\tilde{r} \Delta h^2}{l} - \frac{\tilde{r}^3 - r\tilde{r}^2 t}{2l^3} \Delta h^2 + \frac{\Delta h^3}{3l} - \frac{5\tilde{r}^2 - 4r\tilde{r}t}{6l^3} \Delta h^3 + \frac{\tilde{r}^2(\tilde{r} - rt)^2}{2l^5} \Delta h^3 \right) d\sigma \quad (5.12)$$

式中: $\Delta h = h' - h$ 为地面流动点高程 h' 与计算点正下方地面高程 h 之差。

$$\Delta h^2 = h'^2 - 2h'h + h^2$$

$$\Delta h^3 = h'^3 - 3h'^2 h + 3h'h^2 - h^3$$

$$l = \sqrt{r^2 + \tilde{r}^2 - 2r\tilde{r}t} \quad (5.13)$$

将(5.13)代入(5.12)式, 在球近似下, 令 \tilde{r} 为地面的平均地心距, r 为计算点的平均地心距, 将(5.12)式展开后, 右边每一项均可采用 FFT 算法进行快速计算。

② 扰动重力局部地形影响快速算法

同理, 令 $F = \frac{r'(r+r't) + 3rt(r-r't)}{L} + r(3t^2 - 1)\ln|r' - rt + L|$,

$$\frac{\partial F}{\partial r'} = \frac{r'^3 t - rr'^2}{L^3}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r'^2} = \frac{3r'^2 t - 2rr'}{L^3} + 3r'^2 \frac{(r-r't)(r'-rt)}{L^5}, \quad \text{则:}$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial r'^3} = \frac{6r't-2r}{L^3} + 3r' \frac{2(r'-rt)(3r't-2r)+rr'+r'^2t}{L^5} - 15r'^2 \frac{(r'-rt)^2(r-r't)}{L^7} \quad (5.14)$$

将 F 在 $r' = \tilde{r}$ 附近按泰勒级数展开, 忽略 $O(\Delta h^4)$, 并代入 (5.8) 得:

$$\delta g^R = -G\rho \int_{\sigma} \left(\frac{\tilde{r}t-r}{l^3} \tilde{r}^2 \Delta h + \frac{3\tilde{r}t-2r}{2l^3} \tilde{r} \Delta h^2 + 3 \frac{(r-\tilde{r}t)(\tilde{r}-rt)}{2l^5} \tilde{r}^2 \Delta h^3 + \frac{3\tilde{r}t-r}{3l^3} \Delta h^3 \right. \\ \left. + \tilde{r} \frac{2(\tilde{r}-rt)(3\tilde{r}t-2r)+r\tilde{r}+\tilde{r}^2t}{2l^5} \Delta h^3 - 5\tilde{r}^2 \frac{(\tilde{r}-rt)^2(r-\tilde{r}t)}{2l^7} \Delta h^3 \right) d\sigma \quad (5.15)$$

将 (5.13) 代入 (5.15) 式, 在球近似下令 \tilde{r} 、 r 为常数, 将 (5.15) 展开后, 右边各项均可采用 FFT 算法进行快速计算。

8.6 局部地形补偿与 Helmert 凝聚

(1) 任意类型扰动场元的地形 Helmert 凝聚

地形的 Helmert 凝聚, 涉及一种称为地形质量补偿的概念, 简称地形补偿。大地水准面外部任意类型扰动场元的地形补偿定义为: 为抵消移去地形质量即扣除地形影响后导致地球引力场发生变化, 从而对该类型扰动场元进行的质量补偿量。

地形 Helmert 凝聚可分解为两个步骤: 扣除地形质量生成的引力场, 即减去地形影响; 补偿扣除地形质量后引起的引力场变化, 即加上地形补偿。因此, 对于地球外部任意类型扰动场元 α , 地形 Helmert 凝聚引起的扰动场元变化, 称为该扰动场元的地形 Helmert 凝聚, 可统一表示为:

$$\alpha^h = -\alpha^t + \alpha^c \quad (6.1)$$

式中: α^h 为扰动场元 α 的地形 Helmert 凝聚; α^t 为 α 的地形影响; α^c 为 α 的地形补偿。

对地形进行 Helmert 凝聚后的大地水准面外部空间, 称为 Helmert 空间, 对应的引力场为 Helmert 引力场, 它是调和的, 与实际地球引力场相差由地形 Helmert 凝聚引起的引力场变化。

(2) 球近似下地形补偿与 Helmert 凝聚算法

这里给出大地水准面外部调和空间中, 任意高度扰动位和扰动重力地形补偿的球近似算法。

① 扰动位的地形补偿

$$T^c = T^B + T^{cR} = T^B + GR^2 \int_{\sigma} \frac{\mu' - \mu}{L} d\sigma \quad (6.2)$$

式中: T^{cR} 称为扰动位的局部地形补偿; $d\sigma$ 为单位球面的流动面元; μ 称为地形质量补偿密度, 球近似下有:

$$\mu = \tilde{\rho} \left(1 + \frac{h}{R} + \frac{h^2}{3R^2} \right) \quad (6.3)$$

式中: h 为计算点正下方的地面高程; $\tilde{\rho}$ 为地形等效密度。

将扰动位的局部地形补偿 T^{cR} 分解为:

$$T^{cR} = GR^2 \int_{\sigma} \frac{\mu'}{L} d\sigma - GR^2 \int_{\sigma} \frac{\mu}{L} d\sigma \quad * (6.4)$$

显然式 (6.4) 右边两项均可用 FFT 算法进行快速计算。

当计算点与流动点位置相同时, T^{cR} 是奇异积分:

$$T^{cR}|_0 = \frac{R^2}{6\bar{r}^2} GA_0\sqrt{A_0/\pi}(\mu_{xx} + \mu_{yy}) \quad * (6.5)$$

式中: μ_{xx}, μ_{yy} 为计算点地形质量补偿密度在北方向 x 和东方向 y 的二阶偏导数。

②扰动重力地形补偿

$$\delta g^c = \delta g^B + \delta g^{cR} = \delta g^B + GR^2 \int_{\sigma} (\mu' - \mu) \frac{r-r't}{L^3} d\sigma \quad (6.6)$$

式中: δg^{cR} 称为扰动重力的局部地形补偿。

将 δg^{cR} 分解为:

$$\delta g^{cR} = GR^2 \left(r \int_{\sigma} \frac{\mu'}{L^3} d\sigma - \tilde{r} \int_{\sigma} \frac{\mu't}{L^3} d\sigma - \mu r \int_{\sigma} \frac{1}{L^3} d\sigma + \mu \tilde{r} \int_{\sigma} \frac{t}{L^3} d\sigma \right) \quad * (6.7)$$

式(6.7)右边各项均可用FFT算法进行快速计算。

当计算点与流动点位置相同时, 积分奇异:

$$\delta g^{cR}|_0 = \frac{R^2}{12\bar{r}^3} GA_0\sqrt{A_0/\pi}(\mu_{xx} + \mu_{yy}) \quad * (6.8)$$

③地形 Helmert 凝聚计算

综合(6.2)和(6.6)式不难发现, 球近似下地球外部扰动场元 α 的地形 Helmert 凝聚可表示为:

$$\alpha^h = -\alpha^t + \alpha^c = -(\alpha^B + \alpha^R) + (\alpha^B + \alpha^{cR}) = -\alpha^R + \alpha^{cR} \quad * (6.9)$$

由(6.9)式可知, 球近似下球壳布格影响 α^B 抵消, 即地形 Helmert 凝聚等于局部地形补偿 α^{cR} 与局部地形影响 α^R 之差。可见, 扰动场元的地形 Helmert 凝聚一般比其局部地形影响要小些。

将(5.5)和(6.4)式, 以及(5.7)和(6.7)式分别代入(6.9)式, 就可求得球近似下地球外部扰动位的地形 Helmert 凝聚和扰动重力的地形 Helmert 凝聚, 进而可以得到其他各种类型扰动场元的地形 Helmert 凝聚。

8.7 陆海地形面密度球谐分析与综合

(1) 地面/海面任意一点 $P(R, \varphi, \lambda)$ 的地形面密度 $q(\varphi, \lambda)$ 可用规格化的球谐系数展开式表示为:

$$q(\varphi, \lambda) = \varrho h = R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (7.1)$$

式中: R 为地球平均半径; A_{nm}, B_{nm} 为 n 阶 m 次规格化地形面密度球谐系数。

式(7.1)中, 当 P 位于陆地地面时, h 为陆地地形高度($h > 0$), ϱ 为地形密度, 可取 $\varrho = 2.6 \times 10^3 \text{km/m}^3$; 当 P 位于海面时, h 为海洋水深($h < 0$), ϱ 为地形密度与海水密度之差(即海水补偿密度), 可取 $\varrho = 1.57 \times 10^3 \text{km/m}^3$ 。

(2) 球坐标下地球外部空间点 (r, θ, λ) 引力位的陆海完全布格影响可用全球陆海地形面密度球谐级数表示为:

$$V^{tbg}(r, \theta, \lambda) = \frac{3GM}{r\rho_e} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (7.2)$$

式中： $\rho_e = 5.517 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 为地球平均密度。

(3) 球坐标下地球外部空间点 (r, θ, λ) 引力位的剩余地形影响可用全球陆海地形面密度球谐级数表示为：

$$V^{rtm}(r, \theta, \lambda) = \frac{3GM}{r\rho_e} \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (7.3)$$

(4) 规格化地形面密度球谐系数与规格化地形位系数之间的关系：

$$\bar{C}_{nm}^t = \frac{3}{r} A_{nm}, \quad \bar{S}_{nm}^t = \frac{3}{r} B_{nm} \quad (7.4)$$

这里的地形位系数 \bar{C}_{nm}^t 、 \bar{S}_{nm}^t 定义为：由陆地地面与大地水准面间的地形质量、海面与海底之间海水补偿质量组合，生成的地球外部引力场，经规格化球谐展开后，对应的地形引力场位系数。

8.8 广义 Stokes 与 Hotine 积分公式

(1) 已知地球外部某一等位面上空间异常 Δg ，地球外部空间计算点的扰动位 $T(r, \theta, \lambda)$ 或高程异常 $\zeta(r, \theta, \lambda)$ ，可用广义 Stokes 积分公式计算：

$$T(r, \theta, \lambda) = \gamma \zeta(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \iint \Delta g S(r, \psi, r') ds \quad (8.1)$$

式中： r' 为空间异常 Δg 所在等位面上流动点的地心距； $S(r, \psi, r')$ 称为广义 Stokes 核函数，且： $S(r, \psi, r') = \frac{2}{L} + \frac{1}{r} - \frac{3L}{r^2} - \frac{5r' \cos\psi}{r^2} - \frac{3r'}{r^2} \cos\psi \ln \frac{r+L-r' \cos\psi}{2r}$ * (8.2)

式中： L 为流动点到计算点的空间距离。

当计算点与流动点位置相同时，积分奇异：

$$\zeta|_0 = \frac{A_0}{\gamma} \Delta g \quad (8.3)$$

(2) 已知地球外部某一等位面上扰动 δg ，地球外部空间计算点的扰动位 $T(r, \theta, \lambda)$ 或高程异常 $\zeta(r, \theta, \lambda)$ ，可用广义 Hotine 积分公式计算：

$$T(r, \theta, \lambda) = \gamma \zeta(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \iint \delta g H(r, \psi, r') ds \quad (8.4)$$

式中 $H(r, \psi, r')$ 为广义 Hotine 核函数，且：

$$H(r, \psi, r') = \frac{2}{L} - \frac{1}{r} - \frac{3r' \cos\psi}{r^2} - \frac{1}{r'} \ln \frac{r+L-r' \cos\psi}{r(1-\cos\psi)} \quad (8.5)$$

当计算点与流动点位置相同时，积分奇异：

$$\zeta|_0 = \frac{A_0}{\gamma} \delta g \quad (8.6)$$

若取 r 、 r' 为常量，广义 Stokes/Hotine 积分公式可用 FFT 算法进行快速计算。

8.9 广义 Vening-Meinesz 积分公式

对广义 Stokes 公式两端求水平导数，得：

$$\xi = \frac{-T_\varphi}{\gamma} = \frac{-1}{4\pi r\gamma} \iint \Delta g \frac{\partial S(r,\psi,r')}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} ds, \quad \eta = \frac{-T_\lambda}{\gamma} = \frac{-1}{4\pi r u \gamma} \iint \Delta g \frac{\partial S(r,\psi,r')}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} ds \quad (9.1)$$

式中: $u = \cos\varphi$, $T_\varphi = \frac{\partial}{r\partial\varphi} T$, $T_\lambda = \frac{\partial}{ru\partial\lambda} T$ 。

$$\text{对 } \cos\psi = \sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda' - \lambda) \quad (9.2)$$

两边进行微分运算得:

$$-\sin\psi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda' - \lambda) \quad (9.3)$$

$$-\sin\psi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \cos\varphi\cos\varphi'\sin(\lambda' - \lambda) \quad (9.4)$$

由球面三角公式可得:

$$\sin\psi\cos\alpha = \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda' - \lambda) \quad (9.5)$$

$$\sin\psi\sin\alpha = \cos\varphi'\sin(\lambda' - \lambda) \quad (9.6)$$

综合 (9.3) ~ (9.6) 可得:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos\alpha, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos\varphi\sin\alpha \quad (9.7)$$

代入 (9.1) 得:

$$\xi = \frac{1}{4\pi r\gamma} \iint \Delta g \frac{\partial S(r,\psi,r')}{\partial \psi} \cos\alpha ds, \quad \eta = \frac{1}{4\pi r\gamma} \iint \Delta g \frac{\partial S(r,\psi,r')}{\partial \psi} \sin\alpha ds \quad (9.8)$$

顾及 $L = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi}$, 得:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} L = \frac{rr'}{L} \sin\psi, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{1}{L} = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial \psi} L = -\frac{rr'}{L^3} \sin\psi \quad * (9.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \ln \frac{r+L-r'\cos\psi}{2r} = \frac{1}{r+L-r'\cos\psi} \left(\frac{rr'}{L} \sin\psi + r' \sin\psi \right) = \frac{r' \sin\psi}{r+L-r'\cos\psi} \frac{L+r}{L} \quad * (9.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} S(r, \psi, r') &= \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{2}{L} + \frac{1}{r} - \frac{3L}{r^2} - \frac{5r'\cos\psi}{r^2} - \frac{3r'\cos\psi}{r^2} \ln \frac{r+L-r'\cos\psi}{2r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{2}{L} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial}{\partial \psi} L + \frac{5r' \sin\psi}{r^2} + \frac{3r' \sin\psi}{r^2} \ln \frac{r+L-r'\cos\psi}{2r} - \frac{3r' \cos\psi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \ln \frac{r+L-r'\cos\psi}{2r} \\ &= \left(-\frac{2rr'}{L^3} - \frac{3r'}{rL} + \frac{5r'}{r^2} + \frac{3r'}{r^2} \ln \frac{r+L-r'\cos\psi}{2r} - \frac{3r' \cos\psi}{r^2} \frac{r'}{r+L-r'\cos\psi} \frac{L+r}{L} \right) \sin\psi \\ &= \left[-\frac{2r}{L^3} - \frac{3}{rL} + \frac{5}{r^2} + \frac{3}{r^2} \ln \frac{r+L-r'\cos\psi}{2r} - \frac{3r'(L+r)\cos\psi}{r^2 L(r+L-r'\cos\psi)} \right] r' \sin\psi \quad * (9.12) \end{aligned}$$

同理对广义 Hotine 公式两端求水平导数, 可得:

$$\xi = \frac{1}{4\pi r\gamma} \iint \delta g \frac{\partial H(r,\psi,r')}{\partial \psi} \cos\alpha ds, \quad \eta = \frac{1}{4\pi r\gamma} \iint \delta g \frac{\partial H(r,\psi,r')}{\partial \psi} \sin\alpha ds \quad (9.12)$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \frac{\partial}{\partial \psi} \ln \frac{r+L-r'\cos\psi}{r(1-\cos\psi)} &= \frac{r(1-\cos\psi) \left(\frac{rr'}{L} \sin\psi + r' \sin\psi \right) r(1-\cos\psi) + (r+L-r'\cos\psi) r \sin\psi}{r^2(1-\cos\psi)^2} \\ &= \frac{\sin\psi}{r+L-r'\cos\psi} \frac{L+r r'(1-\cos\psi) + (r+L-r'\cos\psi)}{1-\cos\psi} = \left[\frac{r'(L+r)}{(r+L-r'\cos\psi)L} + \frac{1}{1-\cos\psi} \right] \sin\psi \quad * (9.13) \end{aligned}$$

因此有:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} H(r, \psi, r') = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{2}{L} - \frac{1}{r} - \frac{3r'\cos\psi}{r^2} - \frac{1}{r'} \ln \frac{r+L-r'\cos\psi}{r(1-\cos\psi)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{2}{L} + \frac{3r' \sin \psi}{r^2} - \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \psi} \ln \frac{r+L-r' \cos \psi}{r(1-\cos \psi)} \\
&= \left[-\frac{2rr'}{L^3} + \frac{3r'}{r^2} - \frac{L-r}{(r+L-r' \cos \psi)L} + \frac{1}{r'(1-\cos \psi)} \right] \sin \psi \quad * (9.14)
\end{aligned}$$

式(9.8)、(9.12)也称为广义 Vening-Meinesz 公式, 式(9.12)、(9.14)为广义 Vening-Meinesz 核函数。

利用(9.8)式, 可以由某一等位面上的空间异常计算地球外部或地面任意点的垂线偏差。利用(9.12)式, 可以由某一等位面上的扰动重力计算地球外部或地面任意点的垂线偏差。

将 r 、 r' 近似为常数, 广义 Vening-Meinesz 积分公式(9.8)、(9.12)可用 FFT 算法进行快速计算。

8.10 扰动重力场元逆运算积分公式

(1) 由高程异常计算扰动重力

根据扰动重力定义, 对扰动位 T 的 Poisson 积分公式取垂线方向导数, 得:

$$\delta g = \frac{\partial T}{\partial n} \approx -\frac{\gamma \partial \zeta}{\partial r} = -\frac{\gamma}{2\pi} \iint \frac{\zeta - \zeta_p}{l^3} ds \quad (10.1)$$

式中: n 为铅垂线方向(与向径 r 方向反向); l 为球面上计算点与流动点之间的距离。

$$l = 2r \sin \frac{\psi}{2} \quad (10.2)$$

式(10.1)也称为球近似下逆 Hotine 积分公式。

当流动点与计算点重合时, 积分奇异:

$$\delta g|_0 = \frac{\gamma \sqrt{A_0/\pi}}{4} (\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) \quad (10.3)$$

式中 ζ_{xx} 、 ζ_{yy} 为计算点的高程异常二阶水平偏导数。

利用(10.1)式, 可以由等位面上的高程异常计算该等位面上的扰动重力。

由于扰动重力 δg 是扰动位 T 沿垂线方向 n 的导数, 因此, 式(10.1)要求边界面(高程异常所在面)是等位面。

(2) 由高程异常计算空间异常

将重力测量基本方程代入式(10.1)得:

$$\Delta g = -\frac{\gamma}{2\pi} \iint \frac{\zeta - \zeta_p}{l^3} ds - \frac{\zeta \gamma}{2r} \quad * (10.4)$$

式(10.4)也称为球近似下逆 Stokes 积分公式。

利用(10.4)式, 可以由等位面上的高程异常计算该等位面上的空间异常。

(3) 由垂线偏差计算高程异常

$$\zeta = \frac{r}{4\pi} \iint_{\sigma} ctg \frac{\psi}{2} (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) d\sigma \quad (10.5)$$

当流动点与计算点重合时, 积分奇异:

$$\zeta|_0 = \frac{A_0}{4\pi}(\xi_y + \eta_x) \quad (10.6)$$

式中： ξ_y 、 η_x 分别为 ξ 和 η 在东方向和北方向的偏导数。

利用(10.5)式，可由等位面上的垂线偏差计算该等位面上的高程异常。

(4) 由垂线偏差计算空间异常

$$\Delta g = -\frac{\gamma}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(3csc\psi - csc\psi csc\frac{\psi}{2} - tg\frac{\psi}{2} \right) (\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha) d\sigma \quad (10.7)$$

当流动点与计算点重合时，积分奇异：

$$\Delta g|_0 = -\frac{\gamma\sqrt{A_0/\pi}}{4}(\xi_y + \eta_x) \quad (10.8)$$

利用(10.7)式，可由等位面上的垂线偏差计算该等位面上的空间异常。

(5) 由垂线偏差计算扰动重力

由重力测量基本方程，顾及(10.5)和(10.7)式，可得到由垂线偏差计算扰动重力的公式：

$$\delta g = \frac{\gamma}{4\pi} \iint_{\sigma} \left(3csc\psi - csc\psi csc\frac{\psi}{2} - tg\frac{\psi}{2} - 2ctg\frac{\psi}{2} \right) (\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha) d\sigma \quad (10.9)$$

利用(10.9)式，可由等位面上的垂线偏差计算该等位面上的扰动重力。

当流动点与计算点重合时，积分奇异：

$$\delta g|_0 = -\frac{\gamma}{2\pi} \left(\sqrt{\pi A_0} + \frac{A_0}{r} \right) (\xi_y + \eta_x) \quad (10.10)$$

式(10.5)、(10.7)、(10.9)也称为球近似下逆 Vening-Meinesz 积分公式。

将 r 近似为常数，则上述所有扰动场元积分逆运算(10.4)、(10.5)、(10.7)和(10.9)式，均可用 FFT 算法进行快速计算。

8.11 场元 Possion 与径向梯度积分

任意类型扰动重力场元 μ 都可用扰动位或其对坐标偏导数的任意线性组合，因此，其径向梯度计算方法及场元 Possion 积分公式都相同。

(1) 已知某一边界面上扰动重力场元，则地球外部任意点 (r, θ, λ) 处同类型场元满足的 Possion 积分关系：

$$\mu(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi r} \iint \mu' \frac{r^2 - r'^2}{L^3} ds \quad (11.1)$$

当流动点与计算点重合时， $\psi \rightarrow 0$ ， $r' \rightarrow rt$ ， $L \rightarrow r\psi$ ， $r - r't \rightarrow r\psi^2$ ，扰动场元的 Possion 积分式在计算点处奇异。顾及

$$ds = r'^2 \sin\psi d\psi d\alpha = \pi r^2 \psi_0^2 \quad (11.2)$$

$$\text{可得：} \frac{1}{4\pi r} \iint \frac{r^2 - r'^2}{L^3} ds = \frac{1}{2r} \int_0^{\psi_0} r^2 \frac{\psi^2}{r^3 \psi^3} r^2 \psi d\psi = \frac{1}{2} \psi_0 = \frac{1}{2r} \sqrt{ds/\pi} \quad * (11.3)$$

$$\text{因此有：} \mu|_0 = \frac{\mu'}{2r} \sqrt{ds/\pi} \quad (11.4)$$

(2) 已知某一等位面上扰动重力场元，则 Stokes 框架中该场元的径向梯度可采用如

下积分式计算：

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\mu - \mu'}{l^3} ds \quad (11.5)$$

将 r 、 r' 视为常量后，式 (11.1) (11.5) 可用 FFT 算法进行快速计算。

8.12 扰动重力梯度积分正反算公式

(1) 已知地球外部某一等位面上扰动重力梯度 T_{nn} ，地球外部空间计算点 (r, θ, λ) 的扰动重力 $\delta g = -T_r$ ，满足如下积分公式：

$$\delta g(r, \theta, \lambda) = -\frac{1}{4\pi} \iint T_{nn} H(r, \psi, r') ds \quad (12.1)$$

式中： $H(r, \psi, r')$ 为广义 Hotine 核函数。

(2) 已知某一等位面上扰动重力 δg ，则该等位面上任意点的扰动重力梯度可采用如下积分式计算：

$$T_{nn} = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{\delta g - \delta g'}{l^3} ds \quad (12.2)$$

8.13 高程异常的解析相容性评估算法

已知 A 点的高程异常 ζ_A ，按下式计算 A 点处的大地水准面高 N_A ：

$$N_A = \zeta_A - \Delta\zeta_A = \zeta_A - \int_0^{h_A} \frac{\delta g}{\gamma} dh \quad * (13.1)$$

式中： $\Delta\zeta_A$ 为 A 点高程异常与大地水准面高之差。

利用布隆斯公式，计算得到 A 点处大地水准面上的重力位 W_A^N ：

$$W_A^N = N_A \gamma_A^N + U_A^N \quad (13.2)$$

式中： γ_A^N 、 U_A^N 分别为 A 点处大地水准面上的正常重力和正常重力位，由正常椭球参数精确计算。

按 (13.1) (13.2) 式，计算全部离散点处大地水准面上的重力位 $W_p^N (p = A, B, C, \dots)$ 。依据大地水准面的重力位为常数，所有离散点处的 W_p^N 应该基本相等。

可见，将扰动地球重力场固有特征“大地水准面重力位为常数”作为衡量标准，可以准确评估高程异常的重力场性能。这就是高程异常重力场解析相容性评估基本原理。

高程异常的重力场解析相容性评估方法，还可用于 GNSS 水准粗差探测、GNSS 水准网质量评估以及水准测量误差传递规律分析。在困难山区，可通过 GNSS 水准点的相对重力联测，增强 GNSS 水准网的质量和粗差探测能力。

8.14 大地水准面成果的精度评估方法

PALGrav3.0 基于 GNSS 水准与重力场频域误差特性，按照 GNSS 水准与重力地面高程异常融合的技术要求，提出地面高程异常的误差表达与精度评估方法。下面以正常高系统中地面高程异常精度评估为例，介绍基于 GNSS 水准和重力场误差特性的精度评估一般方法。该方法完全适用正高系统中大地水准面成果的精度评估。

8.14.1 已有大地水准面成果精度评估方法的局限性

目前，大地水准面成果精度评估普遍采用实测 GNSS 水准数据，主要方法可归纳为如下两类：一类通过统计 GNSS 水准高程异常与重力地面高程异常之间的差异，来评价重力地面高程异常成果的质量；另一类是所谓的 GNSS 水准外部检核方法。该方法以未参与融合或外业实测的 GNSS 水准点为检核点，通过比较检核点实测高程异常与融合后的地面高程异常之间差异，来评实用地面高程异常成果的精度。

先来分析第一类评估方法的合理性。重力地面高程异常，按全球积分确定或精化，中长波精度高，短波超短波精度低。GNSS 水准点的正常高，按水准方法传递，误差沿水准路线累积，导致 GNSS 水准高程异常的中长波误差大。显然，中长波误差大的 GNSS 水准高程异常，无法有效评估中长波精度高的重力地面高程异常。

再分析 GNSS 水准外部检核方法的有效性。由于检核点正常高无可避免地要以参与融合的 GNSS 水准点起算（或误差强相关），因此，检核点高程异常与融合后的地面高程异常之差，只是检核点与其距离最近 GNSS 水准点之间的高程异常差，所得精度指标，显然不能表达实用地面高程异常精度。

PALGrav3.0 利用距离等于 GNSS 水准点平均间距的两地面点实用高程异常差的标准差（命名为实用地面高程异常内部误差），来准确表达这种精度指标。

可见，已有方法难以有效评价大地水准面的精度，这已成为高程基准现代化及其成果应用面临的关键问题。

8.14.2 GNSS 水准与重力高程异常误差特性及其融合要求

区域地面高程异常精化计算一般分两步进行：第一步，由重力场数据，按边值问题解的积分方法，精化重力地面高程异常；第二步，将 GNSS 水准高程异常与重力地面高程异常融合，生成实际应用的实用地面高程异常（简称实用地面高程异常）。

(1) GNSS 水准与重力地面高程异常的频域误差特性

GNSS 水准点的正常高，按水准高差逐站传递方法测定，由于水准视线直接置于当地水准面中，因而距离较近的两点间正常高差一般具有很高的精度，但是，水准传递误差沿路线累积，导致长距离两点间的正常高差误差较大。

忽略 GNSS 大地高差误差，则两点间 GNSS 水准高程异常差的精度一般随距离增大而降低。这表明，短距离两点间 GNSS 水准高程异常差的精度高，长距离误差大。

重力地面高程异常，是地球重力场外部边值问题解，由重力数据经全球积分间接确定或精化，中长波精度高、短波超短波误差大，即空间尺度越小，相对误差越大。在局部地区一般表现为两点间重力地面高程异常差的误差不随距离增大而出现明显变化。

(2) GNSS 水准与重力地面高程异常融合的技术要求

由 GNSS 水准高程异常与重力地面高程异常的频域误差特性，不难理解，有效合理的 GNSS 水准与重力地面高程异常融合方法应满足如下技术要求：

①融合算法能有效整合重力地面高程异常的高精度中长波成分与 GNSS 水准高程异

常高精度短波成分。

②GNSS 水准高程异常的贡献，随空间距离增大逐渐减弱；重力地面高程异常的贡献，不随空间距离增大发生明显变化。

③在误差处理方面，能同时有效抑制短波重力地面高程异常误差，控制长距离 GNSS 水准高程异常误差的累积。

8.14.3 地面高程异常的误差估计与精度评估方法

(1) 实用地面高程异常的误差估计方法

为有效利用 GNSS 水准和重力地面高程异常误差在频域中的性质，需要采用统计分析技术，构造实用地面高程异常误差估计的一般方法。

考察两个相距 L 的 GNSS 水准点。令两点间 GNSS 水准高程异常差为 $\Delta\zeta_{Gnssl}$ ，误差为 σ_{Gnssl} ，重力地面高程异常差为 $\Delta\zeta_{Grav}$ ，误差为 σ_{Grav} ；GNSS 水准残差高程异常差（即 GNSS 水准高程异常差与重力地面高程异常差之差） $d = \Delta\zeta_{Grav} - \Delta\zeta_{Gnssl}$ ，误差为 σ_d 。（这里的误差用标准差 1RMS 表示，下同）按误差传播定律有：

$$\sigma_d^2 = \sigma_{Gnssl}^2 + \sigma_{Grav}^2 \quad (14.1)$$

依据两点间 GNSS 水准高程异常差的误差随距离增加而增大的一般特点， σ_{Gnssl} 是随距离 L 递增的非负函数，即 $\sigma_{Gnssl} = \Psi(L) \geq 0$ 。

两点间 GNSS 水准高程异常差的误差由两项构成，即 GNSS 基线大地高差误差和水准正常高差误差。其中，GNSS 基线大地高差的误差为 $\sigma_{\Delta H} = \sqrt{a^2 + b^2 L^2}$ 。

令 GNSS 水准正常高差误差 $\sigma_{\Delta h} = \sigma L$ ，按误差传播定律，可得 GNSS 水准高程异常差的误差为：

$$\sigma_{Gnssl} = \Psi(L) = \sqrt{a^2 + b^2 L^2 + \sigma^2 L^2} \geq 0 \quad * (14.2)$$

式中： a 为 GNSS 基线大地高差的固定误差， b 为比例误差系数，由 GNSS 定位结果给出，视为已知量； σ 为每千米正常高差的误差，为待估参数； L 以千米为单位。

这里的每千米正常高差误差 σ ，与两地面点的距离相乘，用于表示两点间正常高差的误差；而水准网中的每千米水准高差中误差，用于描述沿水准路线长度累积的水准高差误差。两者有些差别。

将（14.2）式代入（14.1）式，则 GNSS 水准残差高程异常差误差满足：

$$\sigma_d^2 = a^2 + b^2 L^2 + \sigma^2 L^2 + \sigma_{Grav}^2 \quad * (14.3)$$

按照两点间重力地面高程异常差的误差不随距离明显变化的一般特点，对于选定的成果区域， σ_{Grav} 可视为待估计的常数。

设成果区域内有 n 个 GNSS 水准点，两两组合构成 $N = C_n^2 = n(n-1)/2$ 条边，计算每条边的 GNSS 水准残差高程异常差 $d^k (k = 1, 2, \dots, N)$ 。将全部 $\{d^k\}$ 按边长大小排序，再大致等分成 $M (5 \leq M < n)$ 组。

令 $\bar{L}_i (i = 1, 2, \dots, M)$ 为第 i 组的平均边长， σ_i 为第 i 组 $\{d^k\}_i$ 的标准差 σ_i ，代入（14.3）式，得到由 M 个非线性方程构成的方程组：

$$\sigma_i^2 = a^2 + b^2 \bar{L}_i^2 + \sigma^2 \bar{L}_i^2 + \sigma_{Grav}^2 \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (14.4)$$

以 (14.4) 式为观测方程, 利用 M 个标准差 σ_i 及对应的平均边长 \bar{L}_i , 以 σ^2 、 σ_{Grav}^2 为未知参数, 以 $(\sigma^2 > 0, \sigma_{Grav}^2 > 0)$ 为约束条件, 按约束最小二乘法, 确定每千米正常高差误差估值 $\hat{\sigma}$ 和重力地面高程异常差误差估值 $\hat{\sigma}_{Grav}$ 。

当 GNSS 水准融合算法满足上述技术要求时, 则区域范围内, 间距为 L 的任意两点间实用地面高程异常差的误差估值 $\hat{\sigma}_L$, 可按加权方法计算, 从而得到实用地面高程异常差误差估值 $\hat{\sigma}_L$ 随两点间距离 L 变化的通用公式:

$$\hat{\sigma}_L = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 L^2 + \hat{\sigma}^2 L^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 L^2 + \hat{\sigma}^2 L^2 + \hat{\sigma}_{Grav}^2}} \hat{\sigma}_{Grav} \quad * (14.5)$$

(2) 地面高程异常误差估计算法的性能特点

由 GNSS 水准和重力地面高程异常误差频域特性可知, 当两点间距离足够大时, GNSS 水准高程异常差的误差远大于重力地面高程异常差的误差, 此时 (14.5) 式中 $\sigma_{Gnssl} = \sqrt{a^2 + b^2 L^2 + \sigma^2 L^2} \gg \hat{\sigma}_{Grav}$, 实用地面高程异常差误差估值 $\hat{\sigma}_L$ 近似为:

$$\hat{\sigma}_L = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 L^2 + \hat{\sigma}^2 L^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 L^2 + \hat{\sigma}^2 L^2 + \hat{\sigma}_{Grav}^2}} \hat{\sigma}_{Grav} \approx \frac{\sqrt{a^2 + b^2 L^2 + \hat{\sigma}^2 L^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 L^2 + \hat{\sigma}^2 L^2}} \hat{\sigma}_{Grav} = \hat{\sigma}_{Grav} \quad (14.6)$$

式 (14.6) 表示, 实用地面高程异常差的精度, 不低于重力地面高程异常差的精度, 即 $\hat{\sigma}_L \leq \hat{\sigma}_{Grav}$ 。进一步分析可知, 短距离实用高程异常差的精度, 也不低于 GNSS 水准高程异常差的精度。

可见, 按 (14.5) 式评估地面高程异常精度, 能有效体现经 GNSS 水准融合后的实用地面高程异常误差特性, 即中长波精度依靠重力地面高程异常控制, 短波精度用 GNSS 水准高程异常改善。

由于水准测量误差随线路长度累积而增大, 因此科学合理的水准网精度评估, 一般用每千米水准路线高差中误差表示, 而不用水准点高程误差表示。同理, (14.5) 式指出, 两点间实用地面高程异常差的误差 $\hat{\sigma}_L$ 是其距离 L 的非线性递增函数, 可见, 区域地面高程异常精度评估, 采用随距离非线性变化的实用地面高程异常差误差曲线表达, 显然要比用地面高程异常误差表示, 更为科学准确。

若确需延续以前的习惯, 可将 GNSS 水准点的平均间距 \bar{D} , 代入 (14.5) 式, 计算距离等于 GNSS 水准点平均间距的两点间实用高程异常差的误差 θ , 用于表达实用地面高程异常的内部误差。这项误差指标一般远小于 GNSS 水准残差高程异常的标准差。

8.14.4 地面高程异常误差表达与精度评估流程

(1) 地面高程异常成果的精度表达

PALGrav3.0 重点推荐, 地面高程异常成果的精度评估, 用如下两项误差指标和两条误差曲线完整表达:

①误差指标 1: 重力地面高程异常差误差 $\hat{\sigma}_{Grav}$ 。此误差指标一般会明显大于 GNSS 水准残差高程异常的标准差。

②误差指标 2: 实用地面高程异常内部误差 θ 。此误差指标可代替已有 GNSS 水准外部检核方法得到的标准差, 两者性质相似。

③误差曲线 1: 按 (14.5) 式计算, 以两点间距离 L 为自变量的实用地面高程异常差误差曲线。由指标 1 构造的误差曲线 $\hat{\sigma}_L = \hat{\sigma}_{Grav}$ 是该误差曲线的最大逐渐线。

④误差曲线 2: 按 (14.2) 式计算, 以两点间距离 L 为自变量的 GNSS 水准高程异常差误差曲线。

(2) 地面高程异常精度评估计算流程

①设 GNSS 水准点总数为 n , 将每点 GNSS 水准高程异常减去重力地面高程异常, 得 n 个 GNSS 水准残差高程异常, 进行统计分析。

②将全部 n 个 GNSS 水准点进行两两组合, 构成 $N = C_n^2 = n(n-1)/2$ 条边, 计算每条边的长度和 GNSS 水准残差高程异常差。

③将 N 条边按长度递增排序, 并将其大致等分成 $M(5 \leq M < n)$ 组, 计算每组的平均长度 \bar{L}_i 和 GNSS 水准残差高程异常差的标准差 σ_i 。

④以 (14.4) 式为观测方程, σ^2 、 σ_{Grav}^2 为未知参数, ($\sigma^2 > 0$, $\sigma_{Grav}^2 > 0$)为约束条件, 按约束最小二乘法, 估计 $\hat{\sigma}$ 和 $\hat{\sigma}_{Grav}$ 。

⑤将 $\hat{\sigma}$ 代入 (14.2) 式, 就是 GNSS 水准高程异常差的误差估计算法; 将 $\hat{\sigma}$ 和 $\hat{\sigma}_{Grav}$ 代入 (14.5) 式, 就是实用地面高程异常差的误差估计算法。

⑥将区域 GNSS 水准点的平均间距 $L = D$ 代入 (14.5) 式, 计算实用地面高程异常内部误差 θ 。

具体算例见 5.12 的说明。

8.14.5 区域地面高程异常精度评估的典型特点

(1) 两点间实用地面高程异常差的误差是其距离的非线性递增函数, 区域似大地水准面精度, 应采用随距离非线性变化的实用地面高程异常差误差曲线表达。

(2) 实用地面高程异常差的误差, 既不大于重力地面高程异常差的误差, 也不大于 GNSS 水准实测高程异常差的误差。

(3) 当两点间距离接近或小于 GNSS 水准点平均间距时, GNSS 水准高程异常对实用地面高程异常的贡献起主要作用。

(4) 较大尺度空间的实用地面高程异常精度, 主要依靠重力地面高程异常控制。这说明这里的误差表达和估计方法, 符合重力场性质。

(5) 区域似大地水准面成果的精度评估, 由本节给出的两项误差指标和两条误差曲线共 4 个要素完整表达。