扰动重力场空域边值积分算法公式

7.9.1 广义 Stokes 与 Hotine 积分公式

（1）已知地球外部某一等位面上空间异常Δg，地球外部空间计算点的扰动位$T(r,\theta,\lambda)$或高程异常$\zeta(r,\theta,\lambda)$，可用广义 Stokes 积分公式计算：

$$T(r,\theta,\lambda)=\gamma\zeta(r,\theta,\lambda)=\frac{1}{4\pi}\iint_s \Delta g' S(r,\psi,r')ds \tag{9.1}$$

式中：r'为空间异常$\Delta g'$所在等位面上流动点（面元ds）的地心距；$S(r,\psi,r')$称为广义 Stokes 核函数，且：

$$S(r,\psi,r')=\frac{2}{L}+\frac{1}{r}-\frac{3L}{r^2}-\frac{5r'cos\psi}{r^2}-\frac{3r'}{r^2}cos\psi ln\frac{r-r'cos\psi+L}{2r} \tag{9.2}$$

式中：L为流动点到计算点的空间距离。

当计算点与流动点位置相同时，积分奇异：

$$\zeta|_0=\frac{A_0}{\gamma}\Delta g_0 \tag{9.3}$$

（2）已知地球外部某一等位面上扰动δg，地球外部空间计算点的扰动位$T(r,\theta,\lambda)$或高程异常$\zeta(r,\theta,\lambda)$，可用广义 Hotine 积分公式计算：

$$T(r,\theta,\lambda)=\gamma\zeta(r,\theta,\lambda)=\frac{1}{4\pi}\iint_s \delta g' H(r,\psi,r')ds \tag{9.4}$$

式中：$H(r,\psi,r')$为广义 Hotine 核函数，且：

$$H(r,\psi,r')=\frac{2}{L}-\frac{1}{r}-\frac{3r'cos\psi}{r^2}-\frac{1}{r'}ln\frac{r-r'cos\psi+L}{r(1-cos\psi)} \tag{9.5}$$

当计算点与流动点位置相同时，积分奇异：

$$\zeta|_0=\frac{A_0}{\gamma}\delta g_0 \tag{9.6}$$

若取r、r'为常量，广义 Stokes/Hotine 积分公式可用 FFT 算法进行快速计算。

7.9.2 广义 Vening-Meinesz 积分公式

对广义 Stokes 公式两端求水平导数，得：

$$\xi=\frac{-1}{4\pi r\gamma}\iint_s \Delta g'\frac{\partial S(r,\psi,r')}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}ds，\eta=\frac{-1}{4\pi r cos\varphi\gamma}\iint_s \Delta g'\frac{\partial S(r,\psi,r')}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}ds \tag{9.7}$$

对$cos\psi=sin\varphi sin\varphi'+cos\varphi cos\varphi' cos(\lambda'-\lambda)$ (9.8)

两边进行微分运算得：

$$-sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=cos\varphi sin\varphi'-sin\varphi cos\varphi' cos(\lambda'-\lambda) \tag{9.9}$$

$$-sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=cos\varphi cos\varphi' sin(\lambda'-\lambda) \tag{9.10}$$

由球面三角公式可得：

$$sin\psi cos\alpha=cos\varphi sin\varphi'-sin\varphi cos\varphi' cos(\lambda'-\lambda) \tag{9.11}$$

$$sin\psi sin\alpha = cos\varphi' sin(\lambda' - \lambda) \tag{9.12}$$

综合（9.9）~（9.12）可得：

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -cos\alpha, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -cos\varphi sin\alpha \tag{9.13}$$

代入（9.7）得：

$$\xi = \frac{1}{4\pi r\gamma}\iint_s \Delta g' \frac{\partial S(r,\psi,r')}{\partial\psi} cos\alpha ds, \quad \eta = \frac{1}{4\pi r\gamma}\iint_s \Delta g' \frac{\partial S(r,\psi,r')}{\partial\psi} sin\alpha ds \tag{9.14}$$

顾及$L = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'cos\psi}$，得：

$$\frac{\partial}{\partial\psi}L = \frac{rr'}{L}sin\psi, \quad \frac{\partial}{\partial\psi}\frac{1}{L} = -\frac{1}{L^2}\frac{\partial}{\partial\psi}L = -\frac{rr'}{L^3}sin\psi \tag{9.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi}ln\frac{r-r'cos\psi+L}{2r} = \frac{1}{r-r'cos\psi+L}\left(\frac{rr'}{L}sin\psi + r'sin\psi\right) = \frac{r'sin\psi}{r+L-r'cos\psi}\frac{L+r}{L} \tag{9.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\psi}S(r,\psi,r') &= \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{2}{L} + \frac{1}{r} - \frac{3L}{r^2} - \frac{5r'cos\psi}{r^2} - \frac{3r'cos\psi}{r^2}ln\frac{r-r'cos\psi+L}{2r}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\psi}\frac{2}{L} - \frac{3}{r^2}\frac{\partial}{\partial\psi}L + \frac{5r'sin\psi}{r^2} + \frac{3r'sin\psi}{r^2}ln\frac{r+L-r'cos\psi}{2r} - \frac{3r'cos\psi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\psi}ln\frac{r+L-r'cos\psi}{2r} \\
&= \left(-\frac{2rr'}{L^3} - \frac{3r'}{rL} + \frac{5r'}{r^2} + \frac{3r'}{r^2}ln\frac{r-r'cos\psi+L}{2r} - \frac{3r'cos\psi}{r^2}\frac{r'}{r-r'cos\psi+L}\frac{L+r}{L}\right)sin\psi \\
&= \left[-\frac{2r}{L^3} - \frac{3}{rL} + \frac{5}{r^2} + \frac{3}{r^2}ln\frac{r-r'cos\psi+L}{2r} - \frac{3r'(L+r)cos\psi}{r^2L(r-r'cos\psi+L)}\right]r'sin\psi
\end{aligned} \tag{9.17}$$

同理对广义 Hotine 公式两端求水平导数，可得：

$$\xi = \frac{1}{4\pi r\gamma}\iint_s \delta g' \frac{\partial H(r,\psi,r')}{\partial\psi} cos\alpha ds, \quad \eta = \frac{1}{4\pi r\gamma}\iint_s \delta g' \frac{\partial H(r,\psi,r')}{\partial\psi} sin\alpha ds \tag{9.18}$$

由于

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\psi}ln\frac{r-r'cos\psi+L}{r(1-cos\psi)} &= \frac{r(1-cos\psi)}{r-r'cos\psi+L}\frac{\left(\frac{rr'}{L}sin\psi+r'sin\psi\right)r(1-cos\psi)+(r-r'cos\psi+L)rsin\psi}{r^2(1-cos\psi)^2} \\
&= \frac{sin\psi}{r-r'cos\psi+L}\frac{\frac{L+r}{L}r'(1-cos\psi)+(r-r'cos\psi+L)}{1-cos\psi} = \left[\frac{r'(L+r)}{(r-r'cos\psi+L)L} + \frac{1}{1-cos\psi}\right]sin\psi
\end{aligned} \tag{9.19}$$

因此有：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\psi}H(r,\psi,r') &= \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{2}{L} - \frac{1}{r} - \frac{3r'cos\psi}{r^2} - \frac{1}{r'}ln\frac{r-r'cos\psi+L}{r(1-cos\psi)}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\psi}\frac{2}{L} + \frac{3r'sin\psi}{r^2} - \frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial\psi}ln\frac{r-r'cos\psi+L}{r(1-cos\psi)} \\
&= \left[-\frac{2rr'}{L^3} + \frac{3r'}{r^2} - \frac{L-r}{(r-r'cos\psi+L)L} + \frac{1}{r'(1-cos\psi)}\right]sin\psi
\end{aligned} \tag{9.20}$$

式（9.14）、（9.18）也称为广义 Vening-Meinesz 公式，式（9.17）、（9.20）为广义 Vening-Meinesz 核函数。

利用（9.14）式，可以由某一等位面上的空间异常计算地球外部或地面任意点的垂线偏差。利用（9.18）式，可以由某一等位面上的扰动重力计算地球外部或地面任意点的垂线偏差。

将r、r'近似为常数，广义 Vening-Meinesz 积分公式（9.14）、（9.18）可用 FFT 算法进行快速计算。

7.9.3 扰动重力场元逆运算积分公式

（1）高程异常积分计算扰动重力

根据扰动重力定义，对扰动位T的 Poisson 积分公式取垂线方向导数，

$$\delta g=\frac{\partial T}{\partial n}\approx-\frac{\gamma\partial\zeta}{\partial r}=-\frac{\gamma}{2\pi}\iint_s\ \frac{\zeta-\zeta_p}{l^3}ds \tag{9.21}$$

式中：n为铅垂线方向（与向径r方向反向）；l为球面上计算点与流动点之间的距离。

$$l=2r\,sin\frac{\psi}{2} \tag{9.22}$$

式（9.21）也称为球近似下逆 Hotine 积分公式。

当流动点与计算点重合时，积分奇异：

$$\delta g|_0=\frac{\gamma\sqrt{A_0/\pi}}{4}\left(\zeta_{xx}+\zeta_{yy}\right) \tag{9.23}$$

式中ζ_{xx}、ζ_{yy}为计算点的高程异常二阶水平偏导数，$\gamma\zeta_{xx}$、$\gamma\zeta_{yy}$分别为水平重力梯度北向、水平重力梯度东向。

利用（9.21）式，可以由等位面上的高程异常计算该等位面上的扰动重力。

由于扰动重力δg是扰动位T沿垂线方向n的导数，因此，式（9.21）要求边界面（高程异常所在面）是等位面。

（2）高程异常积分计算空间异常

将重力测量基本方程代入式（9.21）得：

$$\Delta g=-\frac{\gamma}{2\pi}\iint_s\ \frac{\zeta-\zeta_p}{l^3}ds-\frac{\zeta\gamma}{2r} \tag{9.24}$$

式（9.24）也称为球近似下逆 Stokes 积分公式。

利用（9.24）式，可以由等位面上的高程异常计算该等位面上的空间异常。

（3）垂线偏差积分计算高程异常

$$\zeta=\frac{r}{4\pi}\iint_\sigma\ ctg\frac{\psi}{2}(\xi cos\alpha+\eta sin\alpha)\,d\sigma \tag{9.25}$$

当流动点与计算点重合时，积分奇异：

$$\zeta|_0=\frac{A_0}{4\pi}\left(\xi_y+\eta_x\right) \tag{9.26}$$

式中：ξ_y、η_x分别为ξ和η在东方向和北方向的偏导数。

利用（9.25）式，可由等位面上的垂线偏差计算该等位面上的高程异常。

（4）垂线偏差积分计算空间异常

$$\Delta g=-\frac{\gamma}{4\pi}\iint_\sigma\ \left(3csc\psi-csc\psi csc\frac{\psi}{2}-tg\frac{\psi}{2}\right)(\xi cos\alpha+\eta sin\alpha)\,d\sigma \tag{9.27}$$

当流动点与计算点重合时，积分奇异：

$$\Delta g|_0=-\frac{\gamma\sqrt{A_0/\pi}}{4}\left(\xi_y+\eta_x\right) \tag{9.28}$$

利用（9.27）式，可由等位面上的垂线偏差计算该等位面上的空间异常。

（5）垂线偏差积分计算扰动重力

由重力测量基本方程，顾及（9.25）和（9.27）式，可得到由垂线偏差计算扰动重力的公式：

$$\delta g=\frac{-\gamma}{4\pi}\iint_\sigma\left(3csc\psi-csc\psi csc\frac{\psi}{2}-tg\frac{\psi}{2}-2ctg\frac{\psi}{2}\right)(\xi cos\alpha+\eta sin\alpha)\,d\sigma \tag{9.29}$$

利用（9.29）式，可由等位面上的垂线偏差计算该等位面上的扰动重力。

当流动点与计算点重合时，积分奇异：

$$\delta g|_0=-\frac{\gamma}{2\pi}\left(\sqrt{\pi A_0}+\frac{A_0}{r}\right)\left(\xi_y+\eta_x\right) \tag{9.30}$$

式（9.25）、（9.27）、（9.29）也称为球近似下逆 Vening-Meinesz 积分公式。

将r近似为常数，则上述所有扰动场元积分逆运算（9.21）、（9.24）、（9.25）、（9.27）和（9.29）式，均可用 FFT 算法进行快速计算。

7.9.4 扰动场元积分正反运算公式

（1）扰动场元 Poisson 积分公式

任意类型扰动重力场元μ都可用扰动位或其对坐标偏导数的任意线性组合，因此，其径向梯度计算方法及场元 Poisson 积分公式都相同。

已知某一边界面上扰动重力场元，则地球外部任意点(r,θ,λ)处同类型场元满足的 Poisson 积分关系：

$$\mu(r,\theta,\lambda)=\frac{1}{4\pi r}\iint_s\ \mu'\frac{r^2-r'^2}{L^3}ds \tag{9.31}$$

当流动点与计算点重合时，$\psi\to 0$，$r'\to rt$，$L\to r\psi$，$r-r't\to r\psi^2$，扰动场元的 Poisson 积分式在计算点处奇异。顾及

$$ds=r'^2sin\psi d\psi d\alpha=\pi r^2\psi_0^2 \tag{9.32}$$

可得：$\frac{1}{4\pi r}\iint_s\ \frac{r^2-r'^2}{L^3}ds=\frac{1}{2r}\int_0^{\psi_0}r^2\frac{\psi^2}{r^3\psi^3}r^2\psi d\psi=\frac{1}{2}\psi_0=\frac{1}{2r}\sqrt{ds/\pi}$ （9.33）

因此有：$\mu|_0=\frac{\mu'}{2r}\sqrt{ds/\pi}$ （9.34）

（2）扰动场元径向梯度积分公式

已知某一等位面上扰动重力场元，则 Stokes 框架中该场元的径向梯度可采用如下积分式计算：

$$\frac{\partial\mu}{\partial r}=\frac{1}{2\pi}\iint_s\ \frac{\mu-\mu'}{l^3}ds \tag{9.35}$$

将r、r'视为常量后，式（9.31）（9.35）可用 FFT 算法进行快速计算。

（3）扰动重力梯度积分正反算公式

①已知地球外部某一等位面上扰动重力梯度T_{rr}，地球外部空间计算点(r,θ,λ)的扰

动重力$\delta g=-T_r$满足如下积分公式:

$$\delta g(r,\theta,\lambda)=\frac{1}{4\pi}\iint_s \ T_{rr}H(r,\psi,r')ds \tag{9.36}$$

式中: $H(r,\psi,r')$为广义 Hotine 核函数。

②已知某一等位面上扰动重力δg, 则该等位面上任意点的扰动重力梯度可采用如下积分式计算:

$$T_{rr}=\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\delta g-\delta g'}{l^3}ds \tag{9.37}$$

(4) 扰动重力积分计算扰动重力梯度

已知某一边界面上扰动重力δg, 也可以计算地球外部计算点(r,θ,λ)的扰动重力梯度T_{rr}。

将 Poisson 积分式 (9.31) 用于扰动重力δg, 有:

$$\delta g(r,\theta,\lambda)=\frac{1}{4\pi r}\iint_s \ \delta g'\frac{r^2-r'^2}{L^3}ds \tag{9.38}$$

顾及$T_{rr}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}T\right)=-\frac{\partial}{\partial r}(\delta g)$, 将 (9.38) 式两边对$r$求偏导, 得:

$$T_{rr}=-\frac{1}{4\pi r}\iint_s \ \delta g'\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2-r'^2}{L^3}ds=\frac{1}{4\pi r}\iint_s \ \delta g'\frac{r^3-5rr'^2+(r^2+3r'^2)r'^2cos\psi}{L^5}ds \tag{9.39}$$

由边界面扰动重力计算地球外部扰动重力梯度的 (9.39) 式, 从第一边值问题解 Poisson 积分公式导出, 因此, 不要求边界面必须是重力等位面。