全球负荷形变场(时变重力场)球谐综合算法公式

地球表层大气、土壤水、江河湖库水、冰川冰盖雪山、地下水和海平面变化，都是非潮汐的，这些地表非潮汐负荷变化可用地面等效水高变化统一表示。地面点(R,θ,λ)处等效水高变化h_w可表示为规格化负荷球谐级数：

$$h_w(R,\theta,\lambda)=R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[\Delta C_{nm}^{w}cosm\lambda+\Delta S_{nm}^{w}sinm\lambda]\,\bar{P}_{nm}(cos\theta) \quad (1)$$

式中：R为地球平均半径；$\Delta C_{nm}^{w},\Delta S_{nm}^{w}$为$n$阶$m$次规格化负荷球谐系数；$\bar{P}_{nm}(t)=\bar{P}_{nm}$为完全规格化缔合Legendre 函数。

全球地面等效水高的质量（面密度$\rho_w h_w$）分布，直接引起地面重力位变化：

$$\Phi^{d}(R,\theta,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi G\rho_w R^2}{2n+1}\sum_{m=0}^{n}[\Delta C_{nm}^{w}cosm\lambda+\Delta S_{nm}^{w}sinm\lambda]\,\bar{P}_{nm} \quad (2)$$

由地球重力场理论可知，地面重力位变化Φ^{d}也可用引力位系数变化表示为：

$$\Phi^{d}=\frac{GM}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(\Delta\bar{C}_{nm}cosm\lambda+\Delta\bar{S}_{nm}sinm\lambda)\bar{P}_{nm}\,(cos\theta) \quad (3)$$

式中：$\Delta\bar{C}_{nm},\Delta\bar{S}_{nm}$为完全规格化的位系数变化。

比较（2）与（3）式，得：

$$\Delta\bar{C}_{nm}=\frac{4\pi R^3}{M}\frac{\rho_w}{2n+1}\,\Delta C_{nm}^{w}=\frac{4\pi R^3}{\rho_e V}\frac{\rho_w}{2n+1}\,\Delta C_{nm}^{w}=\frac{4\pi R^3}{4\pi R^3\rho_e/3}\frac{\rho_w}{2n+1}\,\Delta C_{nm}^{w}=\frac{3}{2n+1}\frac{\rho_w}{\rho_e}\Delta C_{nm}^{w}$$

同理，$\Delta\bar{S}_{nm}=\frac{3}{2n+1}\frac{\rho_w}{\rho_e}\Delta S_{nm}^{w}$ (4)

式（2）~（4）中，G为万有引力常数；ρ_w为水的密度；ρ_e为地球平均密度；M、V分别为地球总质量和总体积。

由负荷形变理论可知，对于地面及固体地球外部，

①高程异常（大地水准面）负荷影响

$$\zeta=\frac{GM}{\gamma r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}(1+k_n')\sum_{m=0}^{n}(\Delta\bar{C}_{nm}cosm\lambda+\Delta\bar{S}_{nm}sinm\lambda)\bar{P}_{nm} \quad (5)$$

②地面重力负荷影响⦿

$$g_t=\frac{GM}{r^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\left(1+\frac{2}{n}h_n'-\frac{n+1}{n}k_n'\right)\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}(\Delta\bar{C}_{nm}cosm\lambda+\Delta\bar{S}_{nm}sinm\lambda)\bar{P}_{nm} \quad (6)$$

③扰动重力负荷影响

$$\delta g=\frac{GM}{r^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(1+k_n')\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}(\Delta\bar{C}_{nm}cosm\lambda+\Delta\bar{S}_{nm}sinm\lambda)\bar{P}_{nm} \quad (7)$$

④地倾斜负荷影响⦿

南向：$\xi^{s}=\frac{GM}{\gamma r^2}sin\,\theta\sum_{n=2}^{\infty}(1+k_n'-h_n')\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}(\Delta\bar{C}_{nm}cosm\lambda+\Delta\bar{S}_{nm}sinm\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta}\bar{P}_{nm}$ (8)

西向：$\eta^{s}=\frac{GM}{\gamma r^2\,sin\,\theta}\sum_{n=2}^{\infty}(1+k_n'-h_n')\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\sum_{m=1}^{n}m(\Delta\bar{C}_{nm}sinm\lambda-\Delta\bar{S}_{nm}cosm\lambda)\bar{P}_{nm}$ (9)

⑤垂线偏差负荷影响

南向：$\xi=\frac{GM}{\gamma r^2}sin\,\theta\sum_{n=2}^{\infty}(1+k_n')\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}(\Delta\bar{C}_{nm}cosm\lambda+\Delta\bar{S}_{nm}sinm\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta}\bar{P}_{nm}$ (10)

西向：$\eta=\frac{GM}{\gamma r^2\,sin\,\theta}\sum_{n=2}^{\infty}(1+k_n')\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\sum_{m=1}^{n}m(\Delta\bar{C}_{nm}sinm\lambda-\Delta\bar{S}_{nm}cosm\lambda)\bar{P}_{nm}$ (11)

⑥地面站点位移负荷影响⦿

东方向：$e=-\frac{GM}{\gamma r^2\sin\theta}\sum_{n=2}^{\infty}l'_n\left(\frac{a}{r}\right)^n\sum_{m=1}^{n}m(\Delta\bar{C}_{nm}sinm\lambda-\Delta\bar{S}_{nm}cosm\lambda)\bar{P}_{nm}$ （12）

北方向：$n=-\frac{GM}{\gamma r^2}\sin\theta\sum_{n=2}^{\infty}l'_n\left(\frac{a}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}(\Delta\bar{C}_{nm}cosm\lambda+\Delta\bar{S}_{nm}sinm\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta}\bar{P}_{nm}$ （13）

径向：$r=\frac{GM}{\gamma r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n h'_n\sum_{m=0}^{n}(\Delta\bar{C}_{nm}cosm\lambda+\Delta\bar{S}_{nm}sinm\lambda)\bar{P}_{nm}$ （14）

⑦扰动重力梯度负荷影响:

$$T_{nn}=-\frac{GM}{r^3}\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)(1+k'_n)\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}(\Delta\bar{C}_{nm}cosm\lambda+\Delta\bar{S}_{nm}sinm\lambda)\bar{P}_{nm} \quad (15)$$

⑨水平重力梯度负荷影响:

北向：$T_{\varphi\varphi}=-\frac{GM}{r^3}\sum_{n=2}^{\infty}(1+k'_n)\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}(\Delta\bar{C}_{nm}cosm\lambda+\Delta\bar{S}_{nm}sinm\lambda)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\bar{P}_{nm}$ （16）

东向：$T_{\lambda\lambda}=-\frac{GM}{r^3cos^2\varphi}\sum_{n=2}^{\infty}(1+k'_n)\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=1}^{n}(1+k_{nm})m^2(\Delta\bar{C}_{nm}sinm\lambda+\Delta\bar{S}_{nm}cosm\lambda)\bar{P}_{nm}$ （17）

上述标注⦿的大地测量观测量或参数，只有其点位与地球固连情况下有效。

式（5）~（17）中h'_n、l'_n和k'_n分别为n阶径向、水平和位负荷勒夫数。依据 Farrell 地表负荷形变理论，采用球对称无旋转弹性地球模型 PREM 有关参数，计算地表单位点质量负荷（面密度，1 kg/m^2）作用下的地表负荷勒夫数，如表 1。

表 1 负荷勒夫数取值

阶数n	h'_n	l'_n	k'_n	阶数n	h'_n	l'_n	k'_n
1	-0.2871129880	0.1045044062	-1.0000000000	160	-3.2942117980	0.0058106942	-0.0093636844
2	-0.9945870591	0.0241125159	-0.3057703360	180	-3.3907532400	0.0051551676	-0.0084470364
3	-1.0546530210	0.0708549368	-0.1962722363	200	-3.4867370690	0.0046324760	-0.0077337989
4	-1.0577838950	0.0595872318	-0.1337905897	250	-3.7248624300	0.0037212221	-0.0065109062
5	-1.0911859150	0.0470262750	-0.1047617976	300	-3.9588101480	0.0031642726	-0.0057493979
6	-1.1492536560	0.0394081176	-0.0903495805	350	-4.1853482260	0.0028105951	-0.0052320414
7	-1.2183632010	0.0349940065	-0.0820573391	400	-4.4014325530	0.0025772705	-0.0048534799
8	-1.2904736610	0.0322512320	-0.0765234897	450	-4.6045856190	0.0024162122	-0.0045579733
9	-1.3618478650	0.0303856246	-0.0723928769	500	-4.7931516890	0.0022987082	-0.0043145187
10	-1.4309817610	0.0290225900	-0.0690776844	600	-5.1234075730	0.0021315364	-0.0039191204
12	-1.5609348550	0.0271636708	-0.0638847506	700	-5.3914177940	0.0020034613	-0.0035936423
14	-1.6797703790	0.0259680057	-0.0598385602	800	-5.6025165630	0.0018887552	-0.0033104524
16	-1.7880882500	0.0251266737	-0.0564748883	1000	-5.8875374130	0.0016743075	-0.0028324828

18	-1.8864404740	0.0244708343	-0.0535490132	1500	-6.1543113080	0.0012327687	-0.0020071634
20	-1.9754659020	0.0238986214	-0.0509272630	2000	-6.2038470670	0.0009427101	-0.0015226332
25	-2.1615247260	0.0225448633	-0.0452625739	3000	-6.2137113920	0.0006307787	-0.0010176493
30	-2.3044581340	0.0211578086	-0.0405033192	4000	-6.2144649520	0.0004731032	-0.0007634795
35	-2.4152406280	0.0197609745	-0.0364524519	5000	-6.2148224370	0.0003784752	-0.0006108869
40	-2.5028874800	0.0184188171	-0.0329970228	6000	-6.2150593160	0.0003153917	-0.0005091296
45	-2.5741299450	0.0171690959	-0.0300450548	8000	-6.2153555850	0.0002365398	-0.0003819009
50	-2.6337485520	0.0160264262	-0.0275153569	10000	-6.2155334610	0.0001892299	-0.0003055465
60	-2.7300189390	0.0140651027	-0.0234487653	12000	-6.2156520860	0.0001576905	-0.0002546364
70	-2.8076818590	0.0124702089	-0.0203629907	14000	-6.2157368460	0.0001351626	-0.0002182685
80	-2.8746338100	0.0111640070	-0.0179658948	16000	-6.2158004300	0.0001182669	-0.0001909907
90	-2.9350553590	0.0100800427	-0.0160636283	18000	-6.2158498910	0.0001051258	-0.0001697735
100	-2.9913054190	0.0091686192	-0.0145257169	25000	-6.2159607070	0.0000756901	-0.0001222433
120	-3.0965116190	0.0077267323	-0.0122109806	30000	-6.2160082030	0.0000630749	-0.0001018717
140	-3.1965444360	0.0066448758	-0.0105711243	32000	-6.2160230550	0.0000591327	-0.0000955054
150	-3.2455767690	0.0062018042	-0.0099238838	32768	-6.2160282710	0.0000577468	-0.0000932672
$h'_\infty = -6.209144$			$l'_\infty =$ 0.000000			$k'_\infty =$ 0.000000	