

## 球面径向基函数重力场逼近理论与算法

PAGravf4.5, 章传银

基于单一边界面上单一类型观测扰动场量边值条件的空域重力场边值理论, 无法适应空天地海多种异构重力场探测技术的需求。谱域重力场逼近理论, 不涉及边界面和边值条件问题, 可直接由多种类型观测场量按最小二乘法逼近重力场, 因而成为现代重力场逼近理论的主流方法。下面介绍球面径向基函数谱域重力场逼近理论和方法。

### 7.10.1 外部扰动位的球面径向基函数表示

地球外部空间点 $\mathbf{x}$ 的扰动位可表示为规格化面球函数的线性组合

$$T(\mathbf{x}) = \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{F}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \quad (10.1)$$

式中:  $\mathbf{x} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = r(\sin\theta\cos\lambda, \sin\theta\sin\lambda, \cos\theta)$ ;  $\theta, \lambda, r$  分别是地球外部点 $\mathbf{x}$ 的地心余纬、经度和地心距;  $\bar{F}_{nm}$  为完全规格化的 Stokes 系数 (位系数);  $a$  为地球长半轴, 表示规格化的面球基函数 $\bar{Y}_{nm}$  定义在半径等于 $a$ 的球面上, 且

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) &= \bar{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda, \quad \bar{F}_{nm} = \delta\bar{C}_{nm}, \quad m \geq 0 \\ \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) &= \bar{P}_{n|m|}(\cos\theta)\sin|m|\lambda, \quad \bar{F}_{nm} = \bar{S}_{n|m|}, \quad m < 0 \end{aligned} \quad (10.2)$$

$\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$  为完全规格化缔合 Legendre 函数;  $n$  为位系数的阶,  $m$  为位系数的次。

面球函数也可等价地定义在半径为 $\mathcal{R}$ 的 Bjerhammar 球面上 (Bjerhammar 球仅是习惯说法, 与 Bjerhammar 边值问题无关)。因而扰动位 $T(\mathbf{x})$ 也可用 Bjerhammar 球面上的面球函数表示为

$$T(\mathbf{x}) = \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{E}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \quad (10.3)$$

这里的 $\mathcal{R} \in (a - \delta, a + \delta)$ ,  $\delta \ll a$ , 显然有 $a^n \bar{F}_{nm} = \mathcal{R}^n \bar{E}_{nm}$ , 式 (10.3) 和式 (10.1) 中的面球函数基 $\{\bar{Y}_{nm}(\mathbf{e})\}$ 完全相同。

另一方面, 外部扰动位 $T(\mathbf{x})$ 也可表示为 $K$ 个球面径向基函数 (SRBF) 的线性组合

$$T(\mathbf{x}) = \frac{GM}{r} \sum_{k=1}^K d_k \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{GM}{r} \sum_{k=1}^K d_k \Phi_k(\mathbf{x}, \psi_k) \quad (10.4)$$

式中:  $\mathbf{x}_k = \mathcal{R} \cdot \mathbf{e}_k$  是定义在 Bjerhammar 球面上的 SRBF 节点, 也称 SRBF 中心;  $\psi_k$  为球面径向基函数的自变量, 是球面 SRBF 节点 $\mathbf{x}_k$ 到空间计算点 $\mathbf{x}$ 的球面角距;  $d_k$  为 SRBF 系数,  $K$  为 SRBF 节点数, 也即 SRBF 系数个数, 代表空间分辨率 (作用类似于位系数个数);  $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_k(\mathbf{x}, \psi_k)$  为扰动位的球面径向基函数, 可简写为 $\Phi_k(\mathbf{x}) = \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

球面径向基函数 $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 可进一步展开成 Legendre 级数形式

$$\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_k(\mathbf{x}, \psi_k) = \sum_{n=1}^N \phi_n P_n(\psi_k) = \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (10.5)$$

式中:  $\phi_n$  为 SRBF 的 $n$ 阶 Legendre 系数, 它表征了 SRBF 形状, 基本决定了 SRBF 的空域和谱域性质, 也称形状因子; 在不强调谱域阶数 $n$ 时, 也称 $B_n$ 为 SRBF 的 Legendre 系数;  $\mu = \mathcal{R}/r$  因与径向基函数 $\Phi_k(x)$ 的谱域带宽有关, 也称为宽度参数。

式 (10.5) 中的  $N$  为 Legendre 函数最大阶数, 虽然是扰动位面球函数展开式 (10.3) 中的最大阶数, 但实际上与代表空间分辨率的 SRBF 系数个数  $K$  并没有明确的函数关系。

将式 (10.5) 代入式 (10.4) 得

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= \frac{GM}{4\pi r} \sum_{n=1}^N (2n+1) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{k=1}^K d_k P_n(\psi_k) \\ &= \frac{GM}{4\pi r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_{n=1}^N (2n+1) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \end{aligned} \quad (10.6)$$

顾及球谐函数加法定理

$$P_n(\psi_k) = P_n(\mathbf{e}, \mathbf{e}_k) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (10.7)$$

则式 (10.6) 可写成

$$T(\mathbf{x}) = \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^N B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \sum_{k=1}^K d_k \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}) \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (10.8)$$

比较式 (10.1)、式 (10.3) 与式 (10.8), 可得

$$\bar{F}_{nm} = \left(\frac{R}{a}\right)^n \bar{E}_{nm} = B_n \left(\frac{R}{a}\right)^n \sum_{k=1}^K d_k \bar{Y}_{nm}(\mathbf{e}_k) \quad (10.9)$$

当 SRBF 自变量  $\psi_k$  的作用域 (SRBF 中心的作用距离) 为全球  $\psi_k \in [0, \pi]$  时, 式 (10.9) 成立。利用式 (10.9), 就可由 SRBF 系数  $\{d_k\}$  计算位系数  $\{\bar{F}_{nm}\}$  或  $\{\bar{E}_{nm}\}$ , 进而按球谐综合算法计算地球外部各种重力场量。而用于局部重力场逼近时, SRBF 自变量  $\psi_k$  类似于积分边界面上用球面角距表示的局部重力场积分距离。

SRBF 中心  $\mathbf{x}_k$  在 Bjerhammar 球面上的位置、分布和数量  $K$ , 是 SRBF 重力场逼近的关键性指标, 决定了表达重力场的空间自由度 (空间分辨率) 和空域特征。

### 7.10.2 适合重力场逼近的球面径向基函数

用于重力场逼近的 SRBF 应满足 Laplace 方程。常见的点质量核函数、Poisson 核函数、径向多极子核函数和 Poisson 小波核函数都是具有调和性质的球面径向基核函数。

(1) 球面径向基函数及其归一化表示

令  $\mathbf{x}$  为地球外部计算点,  $\mathbf{x}_k$  为 Bjerhammar 球面  $\Omega_R$  上的 SRBF 节点。

① 点质量核函数

点质量核函数是由 Hardy (1971) 提出的一种逆多面函数 (IMQ), 也是引力位积分公式  $V = G \iiint \frac{dm}{L}$  的核函数, 其解析表达式为

$$\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{L} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|} \quad (10.10)$$

式中:  $L$  为  $\mathbf{x}_k$  到  $\mathbf{x}$  的空间距离。点质量函数也即牛顿核函数 [式 (1.3.38)]。由于  $\Delta(1/L) = 0$ , 因此点质量核函数  $\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$  满足 Laplace 方程。

② Poisson 核函数

Poisson 核函数源于扰动重力场量的 Poisson 积分公式, 其解析表达式为

$$\Phi_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = -2r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{L}\right) - \frac{1}{L} = \frac{r^2 - r_k^2}{L^3} \quad (10.11)$$

③ 径向多极子核函数

径向多极子核函数的解析表达式为

$$\Phi_{RM}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L} \quad (10.12)$$

式中： $m$ 可称为径向多极子核函数的次（order），零次径向多极子核函数( $m = 0$ )就是点质量核函数 $\Phi_{IMQ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_{RM}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

④Poisson 小波核函数

Poisson 小波核函数的解析表达式为

$$\Phi_{PW}^m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = 2(\chi_{m+1} - \chi_m), \quad \chi_m = \left( r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L} \quad (10.13)$$

零次 Poisson 小波核函数( $m = 0$ )就是 Poisson 核函数 $\Phi_P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \Phi_{PW}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 。

⑤球面径向基函数计算

为突出重力场量的谱域性质，通常将球面径向基函数解析表达式（10.10）~式（10.13）表示成 Legendre 级数形式（10.5）后，按 Legendre 级数计算。

为简化数学表达，可将球面径向基函数 $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ 的 Legendre 级数进行归一化处理，计算归一化系数，用归一化后的 Legendre 级数展开式计算球面径向基函数。在处理多种类型观测场量时，可将各种类型场量的球面径向基函数统一除以扰动位球面径向基函数的归一化系数。由重力场量之间的线性变换原理可知，归一化后，各种类型场量之间的解析函数关系不变。

令 $\mathbf{x}, \mathbf{x}_k$ 的球面角距 $\psi_k = 0$ ，则 $\cos\psi_k = 1$ ，顾及 $P_n(\cos\psi_k) = P_n(1) = 1$ ，代入式（10.5），得扰动位球面径向基函数归一化系数的通用表达式为

$$\Phi^0 = \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n \quad (10.14)$$

归一化后的扰动位球面径向基函数 Legendre 级数为

$$\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{\Phi^0} \sum_{n=1}^N \phi_n P_n(\psi_k) = \frac{1}{\Phi^0} \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{4\pi} B_n \mu^n P_n(\psi_k) \quad (10.15)$$

PAGrav4.5 采用式（10.15）计算归一化后的球面径向基函数，如图 8。上述四种形式的扰动位球面径向基函数及其对应的 Legendre 系数如表 1。

表 1 扰动位球面径向基函数及其 Legendre 系数

径向基函数	解析表达式 $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$	第 $n$ 阶形状因子 $\phi_n$	Legendre 系数 $B_n$
点质量核函数	$\frac{1}{L} = \frac{1}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}_k }$	$\mu^n$	$\frac{1}{2n+1}$
Poisson 核函数	$\frac{r^2 - r_k^2}{L^3}$	$(2n+1)\mu^n$	1
径向多极子核函数	$\frac{1}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L}$	$C_n^m \mu^{n-m} (n \geq m)$	$\frac{C_n^m}{2n+1} \mu^{-m}$
Poisson 小波核函数	$2(\chi_{m+1} - \chi_m)$ $\chi_m = \left( r_k \frac{\partial}{\partial r_k} \right)^m \frac{1}{L}$	$(-n \ln \mu)^m (2n+1) \mu^n$	$(-n \ln \mu)^m$

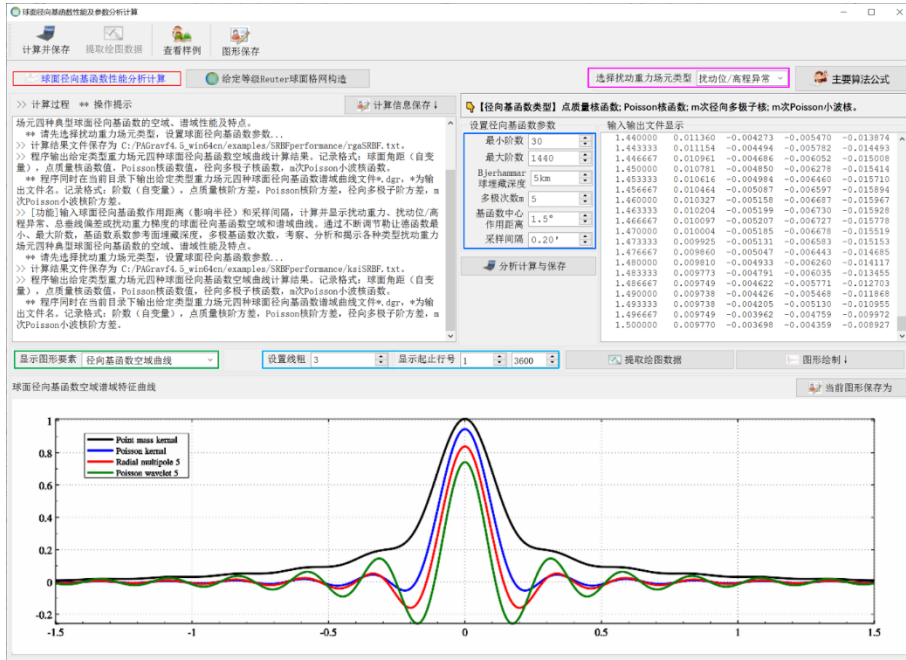


图 8 归一化后四种球面径向基函数曲线计算

(2) 各种扰动场量球面径向基函数级数表示

依据扰动重力场量定义，可由式 (10.6) 扰动位的球面径向基函数展开式（最右边表达式）导出其他各种类型扰动场量的球面径向基函数参数化形式。

$$T(x) = \gamma \zeta(x) = \frac{GM}{4\pi r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (2n+1) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\psi_k) \quad (10.16)$$

$$\delta g(x) = -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{GM}{4\pi r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (2n+1)(n+1) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (10.17)$$

$$\Delta g(x) = \frac{GM}{4\pi r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (2n+1)(n-1) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (10.18)$$

$$\xi(x) = \frac{GM}{4\pi r^2 \gamma} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n (2n+1) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (10.19)$$

$$\eta(x) = \frac{GM}{4\pi r^2 \gamma} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n (2n+1) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (10.20)$$

$$T_{rr}(x) = \frac{GM}{4\pi r^3} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (2n+1)(n+1)(n+2) B_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (10.21)$$

式中： $\alpha_k$ 是 $\psi_k$ 的大地方位角。

对于局部重力场逼近目的，通常借助参考重力场模型，移去中低阶扰动重力场的模型值，由区域观测残差场量逼近残差场元。此时式 (10.16) ~ 式 (10.21) 中阶数 $n$ 的最小最大值范围（重力场的谱域带宽）和自变量 $\psi_k$ 定义域，与选择的参考重力场、目标区域重力场结构及其空间分辨率（SRBF 节点数 $K$ 或球面格网等级 $Q$ ）都密切相关，需采用实际数据测试分析后确定。

(3) Reuter 格网构造与 SRBF 节点设计

可以采用全球和区域一致的球面等面积 Reuter 格网，根据给定的格网等级 $Q$ ，构造

球面径向基函数 SRBF 节点（中心），再通过自适应算法，对比观测扰动场量的空间分布情况，使得观测点空间分布与 SRBF 节点空间分布处处一致。Reuter 网格等级  $Q$  用于表示球面等面积格网的空间分辨率，其作用相当于全球重力位系数模型的最大阶数  $N_{maxn}$ 。

### ① 单位球面 Reuter 网格及有关参数算法

给定 Reuter 网格等级  $Q$ （偶数），则球坐标系中单位球面 Reuter 网格的地心纬度间隔  $d\varphi$  和单元格网  $i$  中心的地心纬度  $\varphi_i$  算法公式为

$$d\varphi = \frac{\pi}{Q}, \quad \varphi_i = -\frac{\pi}{2} + \left(i - \frac{1}{2}\right) d\varphi, \quad 1 \leq i < Q \quad (10.22)$$

纬度  $\varphi_i$  处的平行圈方向单元格网数  $J_i$ 、经度间隔  $d\lambda_i$  与边长  $dl_i$  算法为

$$J_i = \left\lceil \frac{2\pi \cos \varphi_i}{d\varphi} \right\rceil = \lceil 2Q \cos \varphi_i \rceil, \quad d\lambda_i = \frac{2\pi}{J_i}, \quad dl_i = d\lambda_i \cos \varphi_i \quad (10.23)$$

式中： $\lceil \cdot \rceil$  为取整运算。不难发现， $dl_i \approx d\varphi$ 。记

$$\varepsilon_i = \frac{ds_i - ds}{ds} = \frac{dl_i - d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\lambda_i}{d\varphi} \cos \varphi_i - 1 \quad (10.24)$$

式中： $ds$  为赤道附近单元格网面积； $ds_i$  为平行圈  $\varphi_i$  处单元格网面积； $\varepsilon_i$  表示平行圈单元格网面积相对赤道附近单元格网面积的相对偏差。 $\varepsilon_i$  一般很小，约万分之几，具体数值与 Reuter 网格等级  $Q$  有关。赤道附近单元格网面积  $ds = d\varphi \cdot d\varphi$ ，单元格网面积相对偏差  $\varepsilon_{Q/2} = 0$ 。

对于局部区域，给定目标区域经纬度范围，可直接按式（10.22）确定  $i$  的最小最大值，再按式（10.23）计算每个平行圈处的最大  $J_i$ ，从而确定网格等级为  $Q$  的区域 Reuter 网格，无需计算全球 Reuter 网格。

### ② 自适应观测点分布的 SRBF 中心点设计

PAGrav4.5 采用一种简易的 Reuter 网格套合算法，以设计自适应观测点空间分布的 SRBF 中心点，其计算方案为：先由给定 Reuter 网格等级  $Q$ ，构造区域等面积 Reuter 网格，然后统计每个 SRBF 中心点（节点）所在单元 Reuter 网格内的有效观测点数  $j$ ，当  $j$  小于设计最少观测点数时（将最少观测点数作为输入参数），剔除该 SRBF 中心点，遍历所有单元 Reuter 网格后，就可得到适应观测点空间分布的 SRBF 网络（SRBF 中心点集）。

显然，当观测点为规则格网时，SRBF 节点也呈现规则分布；当观测点分布不规则时，SRBF 节点分布也不规则，测点分布密度大的地方，SRBF 节点分布密度也大。可见，SRBF 中心点空间分布与观测点空间分布处处一致。

令全球重力位系数模型最大阶数为  $N_{maxn}$ ，让 Reuter 网格等级  $Q = N_{maxn}$ 。对于全球性球面均匀 Reuter 网格，SRBF 中心点数量  $K$  与 Reuter 网格等级  $Q$  之间存在关系

$$K = \sum_{i=1}^Q J_i = \sum_{i=1}^Q \lceil 2Q \cos \varphi_i \rceil > N_{maxn} (N_{maxn} + 2) \quad (10.25)$$

式中： $\lceil \cdot \rceil$  为取整运算。式（10.25）表明，对于全球重力场逼近目的，全球性球面 SRBF 系数个数  $K$ （即 SRBF 中心点数量）略大于位系数个数  $N_{maxn} (N_{maxn} + 2)$ 。

### 7.10.3 谱域 SRBF 法局部重力场逼近计算

地球重力场逼近问题，本质上是由一种类型观测重力场量，求解地球外部空间其他各种类型重力场元的线性空间变换问题。可见，移去常数因子 $GM/(4\pi)$ 和相同变量因子 $1/r$ 后，不改变扰动场量之间的解析关系，式 (10.16) ~ 式 (10.21) 因而可改写为

$$\zeta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (2n+1) B_n \mu^n P_n(\psi_k) \quad (10.26)$$

$$\delta g(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (2n+1)(n+1) B_n \mu^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (10.27)$$

$$\Delta g(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (2n+1)(n-1) B_n \mu^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (10.28)$$

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r\gamma} \sum_{k=1}^K d_k \cos \alpha_k \sum_n (2n+1) B_n \mu^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (10.29)$$

$$\eta(\mathbf{x}) = \frac{1}{r\gamma} \sum_{k=1}^K d_k \sin \alpha_k \sum_n (2n+1) B_n \mu^n \frac{\partial P_n(\psi_k)}{\partial \psi_k} \quad (10.30)$$

$$T_{rr}(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^K d_k \sum_n (2n+1)(n+1)(n+2) B_n \mu^{n-1} P_n(\psi_k) \quad (10.31)$$

将表 1 中对应的 SRBF 勒让德系数 $B_n$ 代入上述各式，就是以（残差）扰动场量 $F(\mathbf{x}_i)$ 为观测量、SRBF 系数 $d_k$ 为未知数的 SRBF 重力场逼近基本观测方程

$$\mathbf{L} = \{F(\mathbf{x}_i)\}^T = \mathbf{A}\{d_k\}^T + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, K) \quad (10.32)$$

式中： $\mathbf{A}$ 为 $M \times K$ 设计矩阵， $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为 $M \times 1$ 观测量误差向量； $M$ 为观测数， $K$ 为 SRBF 中心点数即未知数 $d_k$ 个数； $\mathbf{x}_i$ 为观测点空间位置。

为保持局部重力场逼近性能的空间一致性，在构建观测方程 (10.32) 过程中，技术上要求所有 SRBF 中心的作用距离 $dr$ （也称影响半径，即 $\psi_k \leq dr$ ）相等。这里的作用距离 $dr$ 相应于 SRBF 自变量的定义域，因此任一观测场量仅用半径 $dr$ 范围内 SRBF 节点球面径向基函数的线性组合表示。SRBF 中心作用距离 $dr$ 等效于空域局部重力场在边界面上的积分距离。

### 7.10.4 多种异构观测系统协同的参数估计

一般情况，不同类型、不同空间分布的观测重力场量，对不同 SRBF 系数的敏感性存在明显差异，表现为各自观测方程中 SRBF 系数参数向量的设计矩阵（敏感矩阵）基本不具备可比性。若直接由每种场量观测方程按最小二乘法组成各自法方程，再按方差分量估计法配权后对这些法方程进行加权组合，一般难以获得 SRBF 系数的稳定解。

然而，我们总能将所有类型扰动场量的观测方程按其对应 SRBF 系数灵敏性差异分成若干组，各组观测扰动场量之间统计独立，组内观测方程的设计矩阵差异较小，每组观测方程构成一个观测系统。之后，先由每组观测方程按最小二乘原理组成各自法方程，并对法方程进行规范化处理，再按不同组的观测质量对各观测系统配权，将规范后的法方程进行加权求和，生成组合后的法方程，解算未知 SRBF 系数估值。协同组合后的法方程可表示为

$$\sum_k \left( \frac{w_k}{Q_k} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k \right) \{d_k\}^T = \sum_k \left( \frac{w_k}{Q_k} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{L}_k \right) \quad (10.34)$$

式中： $k = 1, \dots, K$ ， $K$ 为观测系统的分组数； $\{d_k\}$ 为待估 SRBF 系数参数向量； $\mathbf{A}_k, \mathbf{L}_k, \mathbf{P}_k$ 分别为第 $k$ 组观测方程的参数设计矩阵、观测向量与观测量权阵； $\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{L}_k$ 分别为第 $k$ 组观测系统法方程的系数矩阵和常数矩阵。

特别地，第 $k$ 组观测量的观测权 $\mathbf{P}_k$ 仅用于区别第 $k$ 组系统内观测量之间的精度差异，与其他组观测量误差或观测质量完全无关； $Q_k$ 为第 $k$ 组系统法方程规范化参数，取第 $k$ 组观测系统法方程系数阵 $\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k$ 对角线元素的均方根； $w_k$ 为第 $k$ 组观测系统的系统权值，仅用于区别不同观测系统的质量。

组内观测量的观测权 $P_{ki}$ ，各组观测系统之间的系统权 $w_k$ ，以及各组系统观测量敏感待估 SRBF 系数的作用范围，可用于研究和控制重力场逼近的性能和质量。每组法方程规范化参数 $Q_k$ 主要取决于其对应观测系统的设计矩阵 $\mathbf{A}_k$ 结构，至多随其内部观测权 $P_{ki}$ 的差异发生微小变化，因而规范化参数 $Q_k$ 自身的可调节性小，例如，若组内观测量等权，则第 $k$ 组规范化参数 $Q_k$ 仅由第 $k$ 组观测系统的设计矩阵 $\mathbf{A}_k$ 唯一确定。

不难发现，第 $k$ 组系统观测量的权 $\{P_{ki}\}$ ，在法方程规范化后，只对第 $k$ 组观测系统内部的观测量起作用，而与其他组系统的观测量误差完全无关。各组系统观测量空间分布的差异性，也会在法方程规范化后，而变得不太突出。例如，若某一组观测系统的观测量空间分布密度远大于待估 SRBF 系数应有的空间分辨率，而另一组观测系统只有数十个观测量，则经法方程规范化后，只有数十个观测量的观测系统，一般也不会因为组合了观测量分布稠密的其他组观测系统，而失去该组观测量对 SRBF 系数的敏感性。

不同组观测系统的系统权 $w_k$ 主要用于体现不同观测系统质量的差异，而与各组之间的观测量类型无关，因而可按高度简化的方差分量估计法概略计算，即先由每组系统的观测误差，估计其对未知数的影响，再对比分析各种观测系统观测误差对未知数的影响差异，配置系统权值。其一般方法为：先取 $w_k \equiv 1$ ，规范化并组合法方程，获得 SRBF 系数初步估值，将 SRBF 系数初步估值作为已知量，分别代入各组系统的观测方程，评估每组系统的观测质量，更新各组观测系统的系统权 $\{w_k\}$ 。 $\{w_k\}$ 能快速收敛，一般情况下，一次估计就能稳定不变，至多迭代估计一次， $\{w_k\}$ 就不再有进一步优化的潜力。

设将 SRBF 系数初步估值代入第 $k$ 组系统观测方程后，经统计获得该组观测量的方差为 $\sigma_k^2$ ，则由该组观测系统数学模型，按误差传播定律并近似化后，得

$$\tilde{\sigma}_{k,s}^2 = \frac{1}{(\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k)_s} \sigma_k^2, \quad w_k = \left( \sum_s \tilde{\sigma}_{k,s}^2 \right)^{-1} \quad (10.35)$$

式中： $s$ 为待估 SRBF 系数的序号； $\tilde{\sigma}_{k,s}^2$ 为第 $k$ 组系统相对第 $s$ 个 SRBF 系数的粗估方差。

由式 (10.35) 估算的系统权 $w_k$ ，仅是一个待估 SRBF 系数向量全局性统计指标，难以体现不同观测系统对不同 SRBF 系数的敏感性差异，通常需要对比各种观测系统的方差 $\tilde{\sigma}_{k,s}^2$ 函数（以 SRBF 系数序号 $s$ 为自变量）曲线，再根据实际情况分析优化系统权 $w_k$ 。这也意味着，没有必要刻意强调由式 (10.35) 估算系统权 $w_k$ 的准确性问题。

### 7.10.5 远区外边界 SRBF 系数零约束方法

对于局部重力场逼近目的，可采用外区边界约束，抑制远区和边缘效应，提高 SRBF 系数估计性能。当 SRBF 节点 $v$ 位于区域边缘时，令其对应的 SRBF 系数等于零即 $d_v = 0$ 为观测方程，以抑制边缘效应，提升 SRBF 系数 $\{d_k\}$ 估计的稳定性和可靠性。附加外区边界零约束的法方程为

$$[A^T P A + \epsilon \mathbf{E}]\{d_k\}^T = A^T P L \quad (10.33)$$

式中： $\mathbf{E}$ 为对角线矩阵，当且仅当其下标对应的 SRBF 中心位于区域边缘时等于 1，其余为零； $\epsilon$ 为法方程矩阵 $A^T P A$ 对角线元素均方根的倒数。

复杂多种异构观测场量协同的 SRBF 局部重力场逼近，一般需按多种观测系统协同法构建法方程，在此基础上再引入外区边界零约束，最终的法方程求解一般不再需要正则化，从而有效避免各种场量及其相互之间的解析函数关系受观测误差影响。而法方程解算，可选择 LU 三角分解法（平方根法）、Cholesky 分解法或未知数最小范数法。

### 7.10.6 残差场量多次累积 SRBF 逼近方案

从信号处理的角度上看，目标场元是观测场量与滤波器 SRBF 的卷积。当目标场元与观测场量类型不同时，单一 SRBF 函数基难以同时与观测场量和目标场元的谱域中心及带宽有效匹配，可能导致目标场元的谱泄漏。而且，除 Bjerhammar 球埋藏深度（宽度参数 $\mu$ ）外，SRBF 类型、最小最大阶数、Reuter 格网等级、SRBF 中心分布及作用距离也都影响重力场逼近性能。因此，仅以宽度参数 $\mu$ 为参数的 SRBF 系数最优估计，不足以保证重力场的最佳逼近。

为解决这一关键问题，这里基于重力场逼近的线性可加性，给出多次累积 SRBF 逼近法重力场建模方案，代替以宽度参数 $\mu$ 为参数的 SRBF 系数优化估计方案，且每次逼近不再要求确定 Bjerhammar 球半径 $R$ 或 $\mu$ 。当每次 SRBF 逼近采用不同谱域特征的 SRBF，多次累积 SRBF 逼近通过组合多个 SRBF 谱域中心及带宽，可充分解析目标场元的谱域信号，避免谱泄漏，从而实现目标扰动场元的最佳逼近。

单次 SRBF 逼近有效性的定量准则：(1) 保证残差目标场元空间分布连续可微，让残差观测场量的标准差尽量小；(2) 残差观测场量的统计平均值随累积次数增加趋于零，且不明显反号。多次累积 SRBF 逼近法的每次残差逼近，本质是以上次 SRBF 逼近结果为参考重力场，按移去恢复法精化残差目标场元。